

امید پیروزی

مطابق نصاب جدید معارف

۳

پیشتاز ریاضی

شامل موضوعات:

- حساب
- الجبر
- معادلات
- تصاعد
- لوگارتم
- لیمت
- مشتق
- انتیگرال
- احتمالات
- احصائیه

تألیف:

استاد محمد عظیم خاموش

۱۳۹۲ خورشیدی





امید پیروزی

۳

مطابق نصاب جدید معارف

پیشتاز ریاضی

شامل موضوعات:

- حساب
- الجبر
- معادلات
- تصاعد
- لوگارتم
- لیمت
- مشتق
- انتیگرال
- احتمالات
- احصائیه

تألیف:

استاد محمد عظیم خاموش

۱۳۹۲ خورشیدی



خاموش، محمد عظیم، ۱۳۹۲
پیشتاز ریاضی (امید پیروزی)، مؤلف: محمد عظیم خاموش، کابل: انتشارات عازم، ۱۳۹۲
نمبر مسلسل انتشارات عازم: ۱۰۶
چاپ اول زمستان ۱۳۹۲

پیشتاز ریاضی

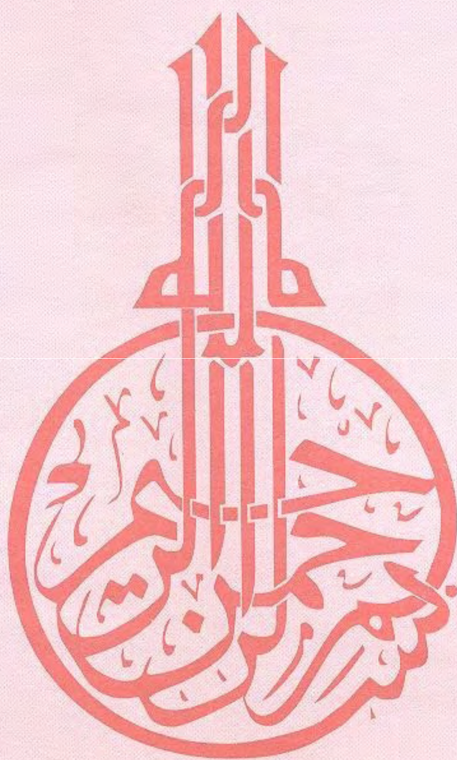
مؤلف:
محمد عظیم "خاموش"
ویراستار:
دوکتور اجمل "عازم"
ناشر:
انتشارات عازم
چاپ:
مطبعهٔ عازم
تیراژ:
۳۰۰۰جلد
چاپ اول: زمستان۱۳۹۲





قیمت ۴۰۰ افغانی

آدرس دفتر مرکزی: کابل، ایستگاه اخیر پوهنتون کابل، سرک پنجم سیلوی مرکزی / تیلفون‌ها: ۰۷۹۹۵۷۲۸۱۷، ۰۷۰۰۰۵۱۷۷۵ و ۰۷۰۰۲۸۰۲۱۰
پست الکترونیک: aazem_pub@hotmail.com ,aazem.pp@gmail.com
آدرس مراکز پخش:
کابل، مارکیت جوی شیر، کتابفروشی مولانای بلخی (رح) / ۰۷۷۶۱۲۱۱۵۱ / کابل، سرک پنجم سیلو، جوار مسجد سنگ کش ها، کتابفروشی نور مهتاب
صفحهٔ انترنتی: www.aazempublications.af / www.aazemprintinghouse.af



قابل توجه!

- انتشارات عازم ثبت و راجستر شدهٔ وزارت محترم اطلاعات و فرهنگ کشور مطابق قوانین نافذهٔ کشور فعالیت می نماید.
- مشتریان محترم کتاب های منتشرهٔ انتشارات عازم را طور عمده تنها از دفتر مرکزی انتشارات عازم و نمایندگی‌های رسمی آن خریداری نموده می توانند.
- انتشارات عازم حق طبع، تکثیر و ترجمهٔ کتاب‌های منتشرهٔ خویش را به صورت انحصاری دارد.
- از اینکه عده‌یی از سودجویان با پیروی از فرهنگ بیگانه، کتاب‌های مختلف را به صورت غیر قانونی و جعلی طبع، فوتوکاپی و تکثیر می‌نمایند و به این ترتیب به رشد فرهنگی کشور آسیب می‌رسانند، انتشارات عازم جداً مصمم است، تا مطابق قانون اساسی کشور و قانون کاپی رایت، به پیگرد قانونی مجرمین پردازد.

"بی‌خبری از احکام قانون عذر پنداشته نمی‌شود." (ماده ۵۶ قانون اساسی افغانستان)

سخــن ناشر

خدای عزوجل را سپاس می‌گذاریم که انتشارات عازم را توفیق عطا فرمود تا چاپ اول کتاب پیشتاز ریاضی تألیف محترم استاد محمد عظیم خاموش را از چاپ خارج و به هموطنان عزیز تقدیم می‌دارد.

انتشارات عازم در طول ۲۰ سالی که از فعالیت آن می‌گذرد، در حدود بیش از سه‌صد عنوان کتاب‌های طبی، اجتماعی و ادبی را به خواستاران علم و فرهنگ کشور عرضه کرده است و اینک با تصحیح و ویراستاری دقیق کتاب حاضر را به نشر می‌رساند.

پرواضح است که فعالیت نشراتی ما در چنان روزگاران دشوار آغاز و ادامه یافت که در سراسر کشور به جز یکی دو مؤسسه خدمات کمپیوتری، آنهم به عنوان مراکز خدمات آموزشی کمپیوتر، چیز دیگری وجود نداشت. برای نخستین بار آثار درسی استادان پوهنتون طب کابل توسط داکتر اجمل عازم، با خصوصیات و اوصاف رو به تکامل یکی پی دیگر مکرراً تهیه، چاپ و برای هموطنان نیازمند توزیع و تقدیم گردید.

با استفاده از فرصت، در این مقدمه، یادآوری نکات عمدهٔ ذیل را مکرراً ضرور می‌دانیم:

- گلیم شیوه‌های ناسالم چاپ و تکثیر کتاب که در پاکستان از سال‌ها به این طرف معمول بوده است و در آن واضحاً تقلب و بی‌فرهنگی مشهود است و با تأسف در وطن ما نیز این مرض سرایت کرده و سطح کار مطبوعاتی ما را تنزل داده، باید هرچه زودتر جمع شود، زیرا در دوران بحران ۲۲ سالهٔ اخیر به ده‌ها عنوان کتاب و آثار نویسنده‌گان و مؤلفان افغان و ایران در پاکستان متقلبانه کاپی، چاپ و تکثیر گردیده و در کتاب‌فروشی‌های کابل و سایر ولایت‌های کشور انبار شده و خواننده‌گان را به گمراهی و بی‌ذوقی کشانیده است. در اکثر این کتاب‌های کاپی شده جز نام کتاب، سایر مشخصات؛ چون نام مؤلف، محل چاپ، آدرس ناشر، تعداد چاپ و تاریخ چاپ وجود ندارد و یا اگر مشخصات آن هم کاپی گردیده باشد، از کاپی کننده و اجازهٔ قانونی چاپ ذکری صورت نگرفته، تنها تغییری که در آن وجود دارد همانا رقم تعداد است که خلاف واقع و فریبنده است.
- حق چاپ و تکثیر کتاب باید محفوظ و محترم شمرده شده و زحمت‌های ناشر نباید در اثر دستبردها خدشه‌دار گردد. مؤلف کتاب نیز بنابر بزرگداشت از کاری که در تهیه و چاپ اثرش از طرف ناشر انجام شده در موضع دفاع از حقوق ناشر قرار گیرد.
- یکی دیگر از ضررهای این شیوهٔ ناسالم، دلسرد ساختن مؤلفان و نویسنده‌گان از کار انکشافی شان است. هرچند کار چاپی و نشراتی لازم و ملزوم یکدیگر اند؛ اما هریک از آنها دو بخش کار از هم متمایز اند. هر مطبعه‌دار و متخصص امور چاپی نمی‌تواند ناشر به حساب آید تا صلاحیت علمی و مسلکی نشر کتاب را نداشته باشد.
- بر ناشر است تا کمیسیون‌های با صلاحیت مرکب از اشخاص خبره و آگاه را ایجاد نمایند تا:
  - در قدم نخست کتاب مورد نشر را از نظر محتوا ارزیابی و درجهٔ مفیدیت آن را تشخیص دهد.
  - تشخیص دهد که عنوان‌های برجسته، متوسط و خورد و همچنان جدول‌ها و تصویرها در جاهای معین و به اندازه‌های معین آن تنظیم گردد.
  - اثر مورد نظر را از نظر ادبی تحلیل نموده، کاستی‌ها را رفع و مؤلف را در کارش همه جانبه یاری رساند.
  - به نکات و رموز محتویات اثر از نگاه مسلکی وارد باشد.
  - قابلیت‌های تخنیکی چاپ را در اثر مورد نظر به کار گیرد؛ طور مثال تشخیص دهد که در یک کتاب درسی طبی کدام قطع و صحافت و نوع چاپ و

در یک اثــر ادبی کدام خصوصیت‌ها مد نظر باشد. همچنان بتواند تشخیص دهد که تصویرها را با رنگ‌های مختلف آن چگونه به کار ببرد تا استفاده از کتاب سهل و زیبایی آن بیشتر گردد.

- باید یادآور شد که در تمام دنیا چه در ارگان‌های دولتی و چه در ارگان‌های مربوط به سازمان‌های اجتماعی، بخش نـشراتی تعیـین کننـدهٔ کـار چـاپی است.

متأسفانه دست اندرکاران چاپ و نشر و مؤلفان کتاب در کشور ما تا کنون به نکات یاد شده کمتر توجه کرده اند. نباید بیش از این به انارشی‌ها در ایـن زمینـه اجازه داده شود؛ بلکه سعی و تلاش جدی در راستای رعایت قانون و تحکیم قانونیت طور همه جانبه صورت گیرد. امید است ناشران محترم این نکات را منحیـث اصول نشراتی طور جدی در نظر گیرند.

انتشارات عازم با رعایت جدی نکاتی که گفته آمد، در خدمت فرهنگیان کشور قرار دارد. توفیق از خدای بزرگ(ج) است.

الحاج پوهاند عبدالعزیز "عازم"

رییس انتشارات عازم

فهرست مندرجات

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

فصل هشتم

فصل نهم

فصل دهم

فصل یازدهم

فصل دوازدهم

مقدمه

توانا بـود هرکه دانا بود
ز دانش دل پیر برنا بود

به‌نام خداوند لوح و قلم و امتنان بی‌پایان از بارگاه ایزد منان که انسان را اشرف مخلوقات گردانیده تا باشد از نعمت‌های خداوند لایزال بهره‌مند گردیده و برای منافع بشریت گامی به پیش بگذارد.

با توجه به تحولات سریع در عرصه‌های مختلف علوم و فنون امروزی اهمیت آموزش علوم ساینس و در رأس زبـان طبیعـت؛ یعنـی ریاضـیات خیلـی برجسته گردیده و هزاران جوان دانش‌آموز و علاقمندان را به‌خود معطوف گردانیده است. از جانبی تغییرات مشهودی کـه در ایـن سـال‌هـا در سیـستم نصاب تعلیمی معارف افغانستان عزیز رونما گردیده است، باعث یک مقدار پریشانی و تشویش بین آنعده جوانان عزیز دانش‌آمـوز مـا کـه بـرای آینـده تحصیلی خویش نگران اند، گردیده که چه‌طور می‌توان به‌طور منظم و سیستماتیک جهت رفع مشکلات خویش قدم بردارند. در واقـع در ایـن مرحلـه باید دانش‌آموزان بتوانند با توجه به علایق و نگرش‌های خود، در باره‌ی آینده خویش تصمیم بگیرند و توانایی‌های خویش را تبارز دهند، تا باشـد راه را برای فردای شان هموار سازند.

بناً با توجه به تجارب سی و سه سال دوره پرورش جوانان و علاقمندان دانش‌آموز در بخش ریاضیات و فزیک و خصوصاً آماده‌سـازی شـاگردان بـرای امتحان سراسری پوهنتون‌های افغانستان در سلسله کتاب‌های پیشتاز کانکور نیاز مبرم بر تهیه کتاب جدید بـه‌طـور مفـصل و مـشرح در بخـش‌هـای ریاضیات و فزیک برای دانش‌آموزان و سایر علاقمندان را در پروسه تدریس احساس نمودم. گرچه در سال‌های قبل (۱۳۷۷) بـا شـرایط دشـواری کـه دامنگیر میهن باستانی ما بود با قبول مشکلات فراوان به چاپ کتاب **(ریاضیات برای همه)** پرداختم که با وجود کمی و کاستی‌هایی که داشـت در همان مقطع زمانی ممد درسی خوبی برای نیازمندان گردید.

کتابی که امروز در دسترس شما عزیزان قرار دارد نتایج تجارب سالیان متمادی من از پروسه فعال تدریس ریاضـیات و مـشکلات عینـی شـاگردان در جریان آموزش دوازده سال دوره آموزشی شان می‌باشد. بناً سعی به عمل آمده تا چنان موضوعات به‌طور پی‌هم و در یک تسلسل منطقی، عام‌فهـم، بـا حل مثال‌های متعدد و طرح مسایل عمده و اساسی دنبال گردد تا برای نیازمندان کدام مشکل مبرم و گیچ‌کننده بـاقی نمانـد و مرحلـه بـه مرحلـه بـه مطالب مهم و اساسی دسترسی پیدا نمایند.

هدف اساسی در محتوای این کتاب دستیابی نیازمندان از تهداب ریاضیات؛ یعنی حساب سر آغاز گردیده و مهم‌ترین مطالبی که معاونت خوبی برای آموزش بهتر در نصاب تعلیمی جدید معارف در دوره مکاتب ابتدایی، متوسط و ثانوی الی انتیگرال، احتمالات و احصائیه می‌گردد، طراحی گردیده است. تصور من اینست که اگر دانش‌آموز تحت یک پروسه منظم آموزشی از محتوای این کتاب بهره‌مند گردد کوچک‌ترین مشکلی در دوره آمادگی برای پذیرش پوهنتون‌ها در سطح افغانستان و منطقه نخواهد داشت.

در اخیر با شکران از حضرت حق تعالی که نعمت آموزش علم را بر ما انعام نمود، بر روان پاک استادان عالیقدر؛ چون پروفیسور عبدالغفار "کاکړ"، انجنیر غلام دستگیر "ړنگ"، استاد میاگل "خوګیاڼی"، انجنیر عثمان خان، استاد عبدالغفور "مرزا" و سایر دست‌اندرکاران ریاضیات که پرورۀ دست آن‌ها می‌باشم و فعلاً جهان فانی را وداع گفته اند، درود می‌فرستم و بهشت برین را برایشان تمنا دارم.

یک‌بار دیگر از آنعده استادان و عزیزانی که در تهیه این کتاب تشویق و یاری ام نموده اند، خاصتاً از محترم پوهاند عبدالعزیز عازم رییس انتشارات عازم ابراز قدردانی نمایم، همچنان از ارجمندان شان داکتر اجمل عازم، اکمل عازم و آرین عازم که با نهایت حوصله‌مندی در تایپ، دیزاین، طراحی شکل‌ها، تصحیح و ویراستاری متن و بالاخره چاپ کتاب به صورت شبانه‌روزی همکاری نموده اند، تشکر نمایم. از خداوند متعال موفقیت‌های بزرگ برای‌شان تمنا می‌نمایم.

با عرض حرمت

محمد عظیم خاموش

فصل اول

حساب

مقدمه

انسانی که توسط خداوند (ج) در روی کره خاکی خلق گردید، جهت توافق با محیط با تجارب گوناگون ضرورت داشت که در اثر همین تجارب متعدد علوم تهداب گذاری گردید و مبنای تمام این تجارب بر اساس زبان قوانین طبیعت یعنی ریاضی پایه‌گذاری گردیده است. پس می‌توان ریاضی را به حیث علم ارتباط بین تمام علوم معرفی و کسب معلومات در باره این علوم را یگانه وسیله لازمی جهت رده‌یابی در تمام عرصه‌های زنده‌گانی در عصر کنونی و اکتشافات قابل ملاحظه علوم مثبته (ساینس) دانست.

چون ریاضیات شامل بخش‌های مانند حساب، الجبر، هندسه و مثلثات بوده که باهم در ارتباط نزدیک و در یک تسلسل منطقی قرار دارند که در شروع بحث خویش راجع به حساب معلومات ارائه خواهیم نمود. در نتیجه می‌توان حساب را به حیث علم شمارش اشیا و کمیات قابل پیمایش تعریف نمود که نتایج آنها ذریعه اعداد نمایش داده می‌شود و به شکل سمبول‌های مختلف قابل نمایش می‌باشد که همه آنها زاده ذهنیت انسان‌های بسیار قدیمی می‌باشد که این سمبول‌ها عبارت اند از؟

اعداد رومی: ..... I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI

اعداد شرقی: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ....

اعداد غربی: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

به خاطر داشته باشید که اساس سیستم اعداد بر ده رقم اصلی (ارقام) استوار بوده که عبارت از:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

می‌باشد که این اعداد به گمان اغلب ابتدأ در هندوستان به شکل سیستم شمارش بنیادگذاری گردیده بعداً به یونان، ایتالیا و توسط اعراب به اروپا انتقال یافته است. به همین علت این سیستم اعداد را به نام سلسله هند و عربیک یاد می‌نمایند.

حس عددی و سلسله شمارش

قابلیت که انسان‌ها می‌تواند به وسیله آن مقدار افزایش یا کاهش اشیا را درک نمایند حس عددی نامیده می‌شود که حتا در یک شکل محدود آن این حس در وجود حیوانات نیز وجود دارد. مثلاً زمانیکه یک تخم از آشیانه یک پرنده کم شود و یا یک چوچه پشک از بین دیگران کم گردد حیوانات مذکور از خود عکس‌العمل نشان می‌دهند که خود نشان دهنده حس عددی است.

سیستم اعداد شامل طبقات بوده و هر طبقه دارای سه مرتبه (یک‌ها، ده‌ها، و صدها) می‌باشد که این طبقات عبارت از واحدها (احاد)، هزارها، ملیون‌ها، ملیاردها یا بلیون‌ها که بیشتر معمول می‌باشد گرچه طبقات دیگر نیز به ترتیب بعداز ملیاردها وجود دارد مانند (تریلیون Trillion، کوادرلیون Quadrillion، کووینتیلیون Quintillion، سیکستیلیون Sextillion، سیپتیلیون Septillion وغیره) که چندان قابل استفاده قرار نمی‌گیرد.

سیستم این طبقه‌بندی قرار شکل ذیل قابل توضیح می‌باشد:

واحدها (احاد)			هزارها			ملیون‌ها			ملیارد (بلیون)ها		
یک‌ها	ده‌ها	صدها	یک‌ها	ده‌ها	صدها	یک‌ها	ده‌ها	صدها	یک‌ها	ده‌ها	صدها
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

در خواندن و یا نوشتن اعداد، اولاً عدد مورد نظر را از سمت راست به چپ طبقه‌بندی نموده، بعداً هر طبقه از سمت چپ (به شکل اعداد سه رقمی از مرتبه صدها) جداگانه خوانده می‌شود، قابل یاد آوری است که در مراتب و طبقاتی که صفرها در آن‌ها قرار داشته باشند در جریان خوانش خوانده نمی‌شود.

مثال‌ها: اعداد ذیل را بخوانید:

مثال (۱): 5746

$5746 = 5000 + 700 + 40 + 6$

پنج هزار و هفت صد و چهل و شش

البته این روش برای اعداد بزرگ مشکل می‌باشد. بناءً به روش ساده‌تر آن را انجام خواهیم داد.

مثال (۲): 561396290548

واحدها	هزارها	ملیون‌ها	ملیاردها
548	290	396	561
پنجصد و شصت و یک (ملیارد) و سه صدو نودو شش (ملیون) و دوصد نود (هزار) و پنجصد چهل و هشت			

مثال (۳): 52402000054

واحدها	هزارها	ملیون‌ها	ملیاردها
054	000	402	52
پنجاه و دو (ملیارد) و چهار صدو دو (ملیون) و پنجاه و چهار			

مثال (۴): 645069300000

واحدها	هزارها	ملیون‌ها	ملیاردها
000	300	069	645
شش صد و چهل و پنج (ملیارد) و شصت و نو (ملیون) و سه صد (هزار)			

مثال (۵): 93746007

واحدها	هزارها	ملیون‌ها
007	746	93
نودوسه (ملیون) و هفت صد و چهل و شش هزار و هفت		

مثال (۶): 200070023000

واحدها	هزارها	ملیون‌ها	ملیاردها
000	023	070	200
دوصد (ملیارد) و هفتاد (ملیون) و بیست و سه (هزار)			

به همین ترتیب در عملیه نوشتن همین مراحل برعکس تکرار می‌گردد.

مثال‌ها: اعداد ذیل را بنویسید؟

مثال (۱)

شش صدو بیست و پنج (ملیارد) و دو صد نودو سه (ملیون) و پنجصد (هزار) و هفت صد و چهارده			
714	500	293	625
واحدها	هزارها	ملیون‌ها	ملیاردها

مثال (۲)

پنجصد دو (ملیارد) و هفت صد و نو (هزار) و بیست و پنج			
025	702	000	502
واحدها	هزارها	ملیون‌ها	ملیاردها

مثال (۳)

سه صدو سی هفت (ملیارد) و پنجصد دوازده (ملیون) و چهار هزار			
000	004	512	337
واحدها	هزارها	ملیون‌ها	ملیاردها

قابل تذکر است این که اعداد مانند (0, 1, 2, 3, 4...) را به نام اعداد کامل یاد می‌نمایند، که بعداً ست اعداد را در فصل دوم (الجبر) مورد مطالعه قرار خواهیم داد:

اعداد جفت: اعداد کامل مانند ..... ,12 ,10 ,8 ,6 ,4 ,2 را اعداد جفت می‌نامند.

اعداد طاق: اعداد کامل مانند ......13 ,11 ,9 ,7 ,5 ,3 ,1 را اعداد طاق می‌نامند.

اعداد مجرد: اعداد که در آنها جنس یا واحد اندازه‌گیری معین نباشد مانند15، 36، 184 وغیره.

اعداد مشخص: اعداد که در آنها جنس یا واحد اندازه‌گیری معین باشد مانند 12 جلد کتابچه، 5 دانه قلم، 35 رأس گوسفند و غیره ... .

اعداد همجنس: اعداد مشخصی که از جنس یک واحد باشند مانند 7 پایه میز، 2 پایه میز و یا 32 بال طیاره و 15 بال طیاره و غیره ... .

اعداد تدریجی: شماره یک کمیت یا مقدار، اعداد تدریجی نامیده می‌شود مانند، یک، دو، سه، چهار، پنج، شش، ...

اعداد ترتیبی: تشخیص کننده موقعیت یا مرتبه یک عدد، عدد ترتیبی نامیده می‌شود مانند، اول، دوم، سوم، چهارم، ....

عملیات اساسی حساب

Fundamental Operation of the Arithematics

اجرای عملیه‌های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بالای اعداد کامل را عملیات اساسی حساب می‌نامند که جهت اجرای این عملیات بعضاً استعمال قوس‌ها نیز لازم می‌باشد که این قوس‌ها به سه نوع می‌باشند:

۱- قوس خورد ( )

۲- قوس متوسط { }

۳- قوس کلان [ ]

به این ترتیب رفع قوسین طوریست که اولاً قوس خورد، بعداً قوس متوسط و در اخیر قوس کلان رفع خواهد گردید.

عملیه جمع اعداد کامل

(Addition of Whole Numbers)

یکجا سازی مقادیر، کمیات و یا اعداد همجنس عبارت از عملیه جمع نامیده می‌شود مثلاً:

20 دانه قلم = 8 دانه قلم + 12 دانه قلم

طوریکه 12 و 8 به نام اجزای جمع و 20 (به حیث بزرگترین عدد) حاصل جمع نامیده می‌شود به خاطر داشته باشید که:

20 دانه قلم $\neq$ 8 جلد کتابچه + 12 دانه قلم

20 جلد کتابچه $\neq$ 8 جلد کتابچه + 12 دانه قلم

زیرا اجزای جمع همجنس نیستند.

جهت اجرای عملیه جمع اعداد یک و یا چندین رقمی اولاً اعداد را بر اساس طبقه و مرتبهٔ آن در ستون‌ها و سطرهای معین ترتیب نموده بعداً عملیه جمع را از رقم یک‌ها طبقه واحدات الی اخیر به ترتیب اجرا نموده در صورت موجودیت حاصل (بلندتر از رقم 9) بالای مرتبه و یا طبقه بعدی افزود می‌گردد.

مثال: اعداد ذیل را جمع نمایید:

مثال (۱):

572461، 32514، 9930002

به شکل سطری: $572461 + 32514 + 9930002 = 10534977$

به شکل ستونی:

$$\begin{array}{r} 572461 \\ +\quad 32514 \\ 9930002 \\ \hline 10534977 \end{array}$$

مثال (۲):

325، 16749، 65000، 96102630

به شکل سطری: 96102630 + 75000 + 16749 + 352 = 96194731

به شکل ستونی:

$$\begin{array}{r} 96102630 \\ 75000 \\ +\quad 16749 \\ 352 \\ \hline 96194731 \end{array}$$

خواص عملیه جمع

۱- فقط می‌توان مقادیر همجنس را باهمدیگر جمع نمود، مثلاً:

13 دانه قلم = 8 دانه قلم + 5 دانه قلم

۲- حاصل جمع دو مقدار عبارت از عددیست از جنس همان مقدار اجزای جمع، مثلاً:

25 جلد کتابچه = 7 جلد کتابچه + 18 جلد کتابچه

۳- جمع دو عدد خاصیت تبدیلی را صدق می‌کنند، مثلاً:

$4 + 7 = 7 + 4$
$11 = 11$

۴- جمع چندین اعداد خاصیت اتحادی را داراً می‌باشند، مثلاً:

$(5 + 8) + 7 = 5 + (8 + 7)$
$13 + 7 = 5 + 15$
$20 = 20$

به خاطر داشته باشید که عنصر عینیت در عملیه جمع (عددی که با هر عدد جمع گردد حاصل جمع مساوی به خود همان عدد گردد) عبارت از صفر می‌باشد. مثلاً:

$13 + 0 = 13$
$0 + 6 = 6$

عملیه تفریق اعداد کامل
(Subtraction of Whole Numbers)

عملیه کم کردن یک مقدار کوچک از یک مقدار بزرگ همجنس آن را تفریق می‌نامند. مثلاً:

(21) افغانی = (14) افغانی − (35) افغانی

در مثال فوق عدد بزرگ یعنی (35) مفروق و عدد کوچک یعنی (14) مفروق منه و عددی که به حیث نتیجه تفریق می‌باشد یعنی عدد (21) به نام حاصل تفریق یاد می‌گردد.

در اجرای عملیه تفریق دو عدد مانند عملیه جمع اولاً اعداد را با در نظرداشت عدد بزرگ (مفروق) و کوچک (مفروق‌منه) به اساس طبقه و مرتبه آن در ستون‌ها و سطرهای معین ترتیب نموده، بعداً عملیه تفریق را از رقم یک‌ها طبقه واحدات الی اخیر به ترتیب اجراً نموده در صورتیکه رقم ستون مفروق کمتر از رقم مربوط مفروق‌منه باشد، یک واحد از ستون سمت چپ مفروق به آن طوری در نظر می‌گیریم تا عدد مذکور از ترتیب دو رقمی یعنی ده‌ها گردد و قابلیت تفریق مساعد گردد.

مثال‌ها: اعداد ذیل را تفریق نمایید:

مثال (۱)

از عدد 375694 عدد 211540 را تفریق نمایید:

$$\begin{array}{r} 375694 \\ -211540 \\ \hline 164154 \end{array}$$

مثال (۲)

از عدد 7812495 عدد 952500 را تفریق نمایید:

$$\begin{array}{r} 7812495 \\ -\ 952500 \\ \hline 6859995 \end{array}$$

مثال (۳)

از عدد 297000 اعداد 23542 و 91658 را تفریق نمایید.

$$\begin{array}{r} 297000 \\ -\ 23542 \\ \hline 273458 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 273458 \\ -\ 91658 \\ \hline 181800 \end{array}$$

و به طریقه دیگر:

$$\begin{array}{r} 23542 \\ +\ 91658 \\ \hline 115200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 297000 \\ -115200 \\ \hline 181800 \end{array}$$

خواص عملیه تفریق

۱- فقط می‌توان مقادیر همجنس را از همدیگر تفریق نمود. مثلاً:

8 جلد کتابچه = 12 جلد کتابچه – 20 جلد کتابچه

۲- حاصل تفریق دو مقدار عبارت از عددیست از جنس همان مقدار مفروق و مفروق منه، مثلاً:

7 قرص نان = 28 قرص نان – 35 قرص نان

۳- عملیه تفریق خاصیت تبدیلی را صدق نمی‌کند.

$15-11 \neq 11-15$

زیرا $\Rightarrow 15-11=4$

امکان ندارد $11-15$

عملیه ضرب اعداد کامل
(Multiplication of Whole Numbers)

ساده‌ترین طریقهٔ جمع اعداد هم‌جنس را عملیه ضرب می‌گویند مثلاً:

40 پنسل = 8 پنسل + 8 پنسل + 8 پنسل + 8 پنسل + 8 پنسل

که به شکل عملیه ضرب چنین ارائه می‌گردد 40 پنسل= پنسل×5

که عدد 5 و 8 عبارت از عوامل ضربی و عدد 40 حاصل ضرب نامیده می‌شود.

برای اجرای عملیه ضرب، ضرب اعداد یک رقمی را کاملاً در حافظه بسپارید که عبارت اند از:

1 × 2 = 2	1 × 3 = 3
2 × 2 = 4	2 × 3 = 6
3 × 2 = 6	3 × 3 = 9
4 × 2 = 8	4 × 3 = 12
5 × 2 = 10	5 × 3 = 15
6 × 2 = 12	6 × 3 = 18
7 × 2 = 14	7 × 3 = 21
8 × 2 = 16	8 × 3 = 24
9 × 2 = 18	9 × 3 = 27
10 × 2 = 20	10 × 3 = 30
1 × 4 = 4	1 × 5 = 5
2 × 4 = 8	2 × 5 = 10
3 × 4 = 12	3 × 5 = 15
4 × 4 = 16	4 × 5 = 20
5 × 4 = 20	5 × 5 = 25
6 × 4 = 24	6 × 5 = 30
7 × 4 = 28	7 × 5 = 35
8 × 4 = 32	8 × 5 = 40
9 × 4 = 36	9 × 5 = 45
10 × 4 = 40	10 × 5 = 50

1	×	6	=	6	1	×	7	=	7
2	×	6	=	12	2	×	7	=	14
3	×	6	=	18	3	×	7	=	21
4	×	6	=	24	4	×	7	=	28
5	×	6	=	30	5	×	7	=	35
6	×	6	=	36	6	×	7	=	42
7	×	6	=	42	7	×	7	=	49
8	×	6	=	48	8	×	7	=	56
9	×	6	=	54	9	×	7	=	63
10	×	6	=	60	10	×	7	=	70

1	×	8	=	8	1	×	9	=	9
2	×	8	=	16	2	×	9	=	18
3	×	8	=	24	3	×	9	=	27
4	×	8	=	32	4	×	9	=	36
5	×	8	=	40	5	×	9	=	45
6	×	8	=	48	6	×	9	=	54
7	×	8	=	56	7	×	9	=	63
8	×	8	=	64	8	×	9	=	72
9	×	8	=	72	9	×	9	=	81
10	×	8	=	80	10	×	9	=	90

1	×	10	=	10
2	×	10	=	20
3	×	10	=	30
4	×	10	=	40
5	×	10	=	50
6	×	10	=	60
7	×	10	=	70
8	×	10	=	80
9	×	10	=	90
10	×	10	=	100

همچنان با درنظرداشت ترتیب و موقعیت عوامل ضربی اعداد دو رقمی و بیشتر از آن باهم ضرب گردیده و مجموعه (حاصل جمع) آن به حیث حاصل ضرب عملیه ارائه خواهد گردید؟

مثال‌ها: اعداد ذیل را با همدیگر ضرب نماید.

1) $2745 \times 23 = ?$

```
 2745
× 23
 8235
5490
63135
```

2) $9305 \times 145 = ?$

```
   9305
 ×  235
  46525
 37220
 9305
1349225
```

3) $280000 \times 5200 = ?$

جهت اجرای این عملیه ضرب صفرهای عوامل ضربی را از نظر انداخته، اعداد را باهم ضرب نموده در حاصل ضرب مجموعه تعداد صفرهای آنرا در

سمت راست می‌نویسیم. یعنی:

$$\begin{array}{r} 280000 \\ \times \quad 5200 \\ \hline 56 \\ 140 \\ \hline 1456000000 \end{array}$$

خواص عملیه ضرب

۱- در عملیه ضرب یکی از عوامل ضربی معمولاً عدد مجرد است مثلاً:

(24) افغانی = (8) افغانی + (8) افغانی + (8) افغانی

(24) افغانی = (8) افغانی × 3 ⇐

۲- حاصل ضرب و یکی از عوامل ضربی، اعداد هم‌جنس می‌باشند، مثلاً:

(140) قلم = 4 × (35) قلم

۳- ضرب خاصیت تبدیلی را دارا می‌باشد مثلاً:

$$\begin{matrix} 9\times4=36 \\ 4\times9=36 \end{matrix} \Rightarrow 9\times4=4\times9$$

۴- ضرب خاصیت اتحادی را صدق می‌کند مثلاً:

$$\begin{matrix} 7\times(5\times2)=7\times10=70 \\ (7\times5)\times2=35\times2=70 \end{matrix} \Rightarrow 7\times(5\times2)=(7\times5)\times2$$

۵- ضرب در جمع و تفریق خاصیت توزیعی را دارا می‌باشد. مثلاً:

$8\times(9+5)=8\times9+8\times5=72+40=132$

$8\times(9-5)=8\times9-8\times5=72-40=32$

به خاطر بسپارید که عنصر عینیت در عملیه ضرب عبارت از عدد یک می‌باشد یعنی:

$12\times1=12$

$1\times12=12$

به همین ترتیب حاصل ضرب هر عدد با صفر مساوی به صفر می‌باشد. یعنی:

$6\times0=0$

یا $0\times6=0$ .... چرا؟

$0+0+0+0+0+0=0$

$\Rightarrow 6\times0=0=0$

طاقت اعداد کامل
Pawer of whole Numbers

هرگاه یک عدد چندین مراتبه (دفعه) به خودش ضرب گردیده باشد این حاصل ضرب بطور ساده چنین ارائه می‌گردد.

$5\times5\times5\times5\times5\times5\times5=(5)^7$

این طرز ارائه عدد $(5)^7$ را طاقت Power می‌نامند. در طاقت مذکور عدد (5) به نام قاعده (bass) و عدد (7) به نام (نما) یا طاقت‌نما و یا توان (Exponent) می‌نامند.

مثال: طاقت‌های ذیل را ساده سازید.

1- $(3)^8=3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3=6561$

2- $(7)^5=7\times7\times7\times7\times7=16807$

3- $(2)^{10}=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=1024$

4- $(8)^4=8\times8\times8\times8=4096$

5- $(1)^6=1\times1\times1\times1\times1\times1=1$

6- $(12)^1=12$

عملیه تقسیم اعداد کامل
(Division of Whole Numbers)

به همان ترتیب که ساده‌ترین طریقه جمع اعداد یکسان را ضرب می‌نامند به عین شکل ساده‌ترین عملیه تفریق اعداد یکسان را از یک عدد تقسیم یعنی

قسمت کردن یاد می‌کنند مثلاً اگر (52) افغانی داشته باشیم و بخواهیم کتابچه خریداری نماییم طوریکه قیمت هر کتابچه (8) افغانی باشد، به همین مبلغ چند کتابچه خریداری خواهد گردید؟ پس هر مراتبه از این پول قیمت یک کتابچه را طور مکرر کم نموده، خواهیم داشت.

$$\overbrace{52-8=44}^{1} \Rightarrow \overbrace{44-8=36}^{2} \Rightarrow \overbrace{36-8=28}^{3}$$

$$\overbrace{28-8=20}^{4} \Rightarrow \overbrace{20-8=12}^{5} \Rightarrow \overbrace{12-8=4}^{6}$$

پس در نتیجه با (52) افغانی از قرار فی جلد کتابچه می‌توان (6) جلد کتابچه خریداری نمود و مبلغ (4) افغانی پولی که نمی‌توان به آن یک جلد کتابچه خرید، باقی می‌ماند که این عملیه را می‌توان به شکل ساده چنین نوشت:

$$\begin{array}{r|l} 52 & 8 \\ -48 & 6 \\ \hline 4 & \end{array} \quad \text{یا} \quad 8\overline{\smash{)}\begin{array}{r} 6 \\ 52 \\ -48 \\ \hline 4 \end{array}} \quad \text{ویا} \quad \frac{52}{8}=6+\frac{4}{8}$$

در مثال فوق عدد (52) را به نام مقسوم، عدد (8) را به نام مقسوم‌علیه، عدد (6) را به نام حاصل تقسیم یا خارج قسمت و عدد (4) را به نام باقیمانده یاد می‌نمایند.

همچنان سمبول‌های عملیه تقسیم به اشکال نیز موارد استعمال دارد.

$(\div), (:), (\text{———})$

جهت اجرای عملیه تقسیم اعداد مقسوم و مقسوم‌علیه را در جایگاه تعیین شده آن نوشته بعداً از طرف چپ مقسوم عددی را در نظر می‌گیریم که بر مقسوم قابل تقسیم باشد، که حاصل تقسیم آن را در موقعیت تعیین شده آن نوشته و این حاصل تقسیم را به مقسوم‌علیه ضرب نموده حاصل‌ضرب را در پایین عدد مورد نظر مقسوم می‌نویسیم و عملیه تفریق را اجرا می‌نمایم و باید حاصل‌تفریق کمتر از مقسوم‌علیه باشد در قدم دوم یک رقم بعدی از عدد مقسوم را پایین نمود پهلوی عدد باقیمانده عملیه تفریق می‌گذاریم و عملیه تقسیم را مکرراً اجرا می‌نماییم. اگر همین عدد حاصله مقسوم کمتر از مقسوم‌علیه باشد خارج قسمت همان نوبت صفر می‌باشد و بعد از اجرای عملیه تفریق اجازه پایین نمودن یک رقم بعدی را دریافت نموده می‌توانیم که بدین شکل عملیه تقسیم ممکن می‌گردد و این عملیه را الی آخرین رقم مقسوم ادامه می‌دهیم. در ختم عملیه تقسیم عددی که بر مقسوم علیه قابل تقسیم نباشد باقیمانده یاد می‌گردد.

مثال: اعداد ذیل را باهم تقسیم نمایید.

مثال (۱)

عدد 224 را بالای (7) تقسیم نمایید.

$$\begin{array}{r|l} 224 & 7 \\ 21 & 32 \\ \hline 14 & \\ -14 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

مثال (۲)

عدد 12791 را بالای 6 تقسیم نمایید.

$$\begin{array}{r|l} 12791 & 6 \\ -12 & 2131 \\ \hline 7 & \\ -\ 6 & \\ \hline 19 & \\ -\ 18 & \\ \hline 11 & \\ -\ 6 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

مثال (۳)

عدد 12103 را بالای (4) تقسیم نمایید.

$$\begin{array}{r|l} 12103 & 4 \\ \hline -12 & 3025 \\ \hline 1 & \\ -0 & \\ \hline 10 & \\ -8 & \\ \hline 23 & \\ -20 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

مثال (۴)

عدد 19743 را بالای عدد (15) تقسیم نمایید.

$$\begin{array}{r|l} 19743 & 15 \\ \hline -15 & 1316 \\ \hline 47 & \\ -45 & \\ \hline 24 & \\ -15 & \\ \hline 93 & \\ -90 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

مثال (۵)

عدد 352745 را بالای 437 تقسیم نمائید.

$$\begin{array}{r|l} 352745 & 437 \\ \hline -3496 & 807 \\ \hline 314 & \\ -000 & \\ \hline 3145 & \\ -3059 & \\ \hline 84 & \end{array}$$

خواص عملیه تقسیم

۱) در عملیه تقسیم، مقسوم، مقسوم‌علیه و باقیمانده اعداد هم‌جنس اند.

مثلاً:

(52) افغانی | قیمت فی جلد کتابچه (8) افغانی

48 افغانی − | تعداد جلد کتابچه‌ها (6)

(4) افغانی

۲) هرگاه مقسوم صفر و مقسوم‌علیه یک عدد خلاف صفر باشد در این صورت حاصل تقسیم صفر است، مثلاً:

$0 \div 8 = 0$

۳) هرگاه مقسوم یک عدد خلاف صفر و مقسوم‌علیه صفر باشد در این صورت حاصل تقسیم ناممکن (بی‌معنی) یا (∞) می‌گردد.

مثلاً: هرگاه به تعداد (20) جلد کتابچه را بخواهیم به شاگردان یک صنف تقسیم نمایم اگر اتفاقاً در آن صنف شاگرد نباشد چه خواهید کرد؟

آیا این عملیه تقسیم ممکن است؟ اگر ممکن است به هر شاگرد چند جلد کتابچه خواهد رسید.

یقیناً خواهید گفت این عملیه تقسیم ناممکن است.

۴) هرگاه مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو صفر باشند یعنی $(\frac{0}{0})$ در این صورت این نوع افاده را نامعین می‌نامند.

۵) همیشه در عملیه تقسیم

باقیمانده + (خارج قسمت) × (مقسوم‌علیه) = مقسوم

مثلاً:

$$\begin{array}{r|l} 75 & 4 \\ \hline 4 & 18 \\ \hline 35 & \\ 32 & \\ \hline 3 & \end{array} \quad \Rightarrow 75 = 4\times18+3$$

اگر باقیمانده صفر گردد در این صورت می‌توان چنین نوشت.

خارج قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

مثلاً:

$$\begin{array}{r|l} 42 & 7 \\ -42 & 6 \\ \hline 0 & \end{array} \quad \Rightarrow 42 = 7\times 6$$

عملیات مشترک حسابی بالای اعداد کامل

اگر عملیه‌های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بطور مشترک و حتی با قوس‌ها همراه باشند جهت اجرای درست اینگونه عملیات نکات ذیل را در نظر داشته باشید.

۱- اولاً طاقت‌ها رفع گردد.

۲- عملیات ضرب و تقسیم اجرا گردد.

۳- عملیات جمع و تفریق اجرا گردد.

۴- در صورت عملیات مذکور حاوی قوس‌ها باشد، اولاً عملیهٔ داخل قوس‌ها اجرا گردد که ترتیب رفع قوس‌ها طوریست که اولاً قوس خورد، بعداً قوس متوسط و در اخیر قوس کلان رفع گردد.

مثال‌ها: عملیه‌های داده شده ذیل را اجرا نمایید؟

1) $8+3\times5=8+15=23$

2) $(8+3)\times5=11x5=55$

3) $40-10\div2=40-5=35$

4) $(40-10)\div2=30\div2=15$

5) $8\times3+15\div5=24+3=27$

6) $8\times(3+15)\div2=8\times18\div2=144\div2=72$

7) $12\times5+8-7\times3+4=60+8-21+4=51$

8) $12\times(5+8)-7\times(3+4)=12\times(13)-7\times(7)=156-49=107$

9) $24\div6\times2+15\times4\div10-2=4\times2+60\div10-2$
$=8+6-2=14-2=12$

10) $3\times(7+30\div5)-4=3\times(7+6)-4=3\times(13)-4$
$=39-4=35$

11) $4\times\{10+(13-4.2)\}=4\times\{10+(13-8)\}=4\times[10+5]$
$=4\times15=60$

12) $2^3\times3^2\div9\times3+(3+4)\times5\div7$
$=8\times9\div9\times3+7\times5\div7$
$=72\div9\times3+35\div7$
$=8\times3+5$
$=24+5$
$=29$

13) $(3^2\times5+7-3)+(2^3\div4+8+1^3)$
$=(9\times5+7-3)+(8\div4+8\times1)$
$=(45+7-3)+(2+8)$
$=(52-3)+10$
$=49+10$
$=59$

14) $7\times[115-\{4\times(12-9)+21\div(13-6)\}]$
$=7\times[115-\{4\times4+21\div7\}]$
$=7\times[115-\{16+3\}]$
$=7\times[115-19]$
$=7\times96$
$=672$

15) $7+[13\{(4\times2-5)+52(3+1)\}+12]=?$
$=7+[13\{(8-5)+52\times4\}+12]$
$=7+[13\{3+208\}+12]$
$=7+[13\times211+12]$
$=7+[2743+12]$
$=7+2755$
$=2762$

قابلیت تقسیم اعداد

هرگاه یک عدد طبیعی بر عدد دیگری طوری تقسیم گردد که باقیمانده صفر گردد، در این حالت گفته می‌شود که عدد مذکور بر عدد دومی پوره قابل تقسیم است که ذیلاً آنها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

قابلیت تقسیم بر ۲

عددی که رقم یک‌های آن جفت و یا صفر باشد عدد مذکور بر 2 پوره قابل تقسیم می‌باشد، مانند اعداد ذیل:

3012, 908, 1236, 120, 7000, ...

قابلیت تقسیم بر ۳:

عددی که مجموعه ارقام آن بر عدد (3) پوره تقسیم گردد، عدد پوره قابل تقسیم بر 3 می‌باشد، مثلاً:

$522=5+2+2=9$

$7311=7+3+1+1=12$

$57000=5+7+0+0+0=12$

$3591=3+5+9+1=18$

$84300=8+4+3+0+0=15$

قابلیت تقسیم بر ٤:

هرگاه دو رقم یک‌ها و ده‌ها یک عدد صفرها بوده و یا همین دو رقم به حیث یک عدد دو رقمی بر 4 پوره قابل تقسیم باشد، عدد مذکور بر 4 پوره قابل تقسیم می‌باشد، مثلاً:

1300,21000, 10000, 120, 748, 23412, 935104, 800340,...

قابلیت تقسیم بر ٥:

هرگاه رقم یک‌های یک عدد، صفر و یا عدد 5 باشد، عدد مذکور بر 5 پوره قابل تقسیم می‌باشد، مثلاً:

870, 3200, 519000, 8005, 9125, 64355, 18050,......

قابلیت تقسیم بر ٦:

هرگاه یک عدد بطور همزمان بر 2 و 3 پوره تقسیم گردد آن عدد بر 6 نیز پوره قابل تقسیم است، مثلاً:

1500, 6408, 20130, 818100, 6042,....

قابلیت تقسیم بر ٧:

اگر رقم یک‌های یک عدد را دو چند نموده و از متباقی ارقام آن تفریق نماییم و این عملیه را الی اخیر ادامه بدهیم. در صورتیکه حاصل‌تفریق صفر و یا عددی گردد که بر 7 پوره تقسیم گردد آن عدد قابلیت تقسیم بر 7 را دارا می‌باشد، طور مثال:

1) (14945)

$$14945 = 1494 - 10 = 1484$$
$$= 148 - 8 = 140$$
$$= 14 - 0 = 14$$

چون عدد 14 بر 7 پوره قابل تقسیم است پس در نتیجه 14945 بر 7 پوره قابل تقسیم می‌باشد.

2) (6755084)

$$6755084 = 675508 - 8 = 675500$$
$$= 67550 - 0 = 67550$$
$$= 6755 - 0 = 6755$$
$$= 675 - 10 = 665$$
$$= 66 - 10 = 56$$

چون عدد 56 بر 7 پوره قابل تقسیم است پس در نتیجه عـدد 6755084 بر 7 پوره قابل تقسیم می‌باشد.

3) (8465121)

$8465121 = 846512 - 2 = 846510$

$84651 - 0 = 84651$

$= 8465 - 2 = 8463$

$= 846 - 6 = 840$

$= 84 - 0 = 84$

$= 8 - 8 = 0$

چون نتیجه نهایی صفر گردید پس عدد 8465121 بر 7 پوره قابل تقسیم می‌باشد.

4) (3584)

$3584 = 358 - 8 = 350$

$= 35 - 0 = 35$

چون 35 بر 7 پوره قابل تقسیم است پـس عـدد 3584 بـر 7 پـوره قابـل تقسیم می‌باشد.

5) (23100)

$23100 = 2310 - 0 = 2310$

$= 231 - 0 = 231$

$= 23 - 2 = 21$

$= 2 - 2 = 0$

پس عدد مذکور بر 7 پوره قابل تقسیم می‌باشد.

قابلیت تقسیم بر ۸:

عددی که سه رقم یک‌ها، ده‌ها و صدهای آن صفر و یا همین سه رقم به حیث یک عدد سه رقمی بر 8 پوره قابل تقسیم باشد، آن عدد بر هـشت پـوره قابل تقسیم می‌باشد، مثلاً:

357000, 1000, 91200, 53400, 79328, 456008, 965072, 100656,……

قابلیت تقسیم بر ۹:

هرگاه مجموعه ارقام یک عدد بر 9 پوره قابل تقسیم باشد آن عدد قابلیت تقسیم بر 9 را دارا می‌باشد، مثلاً:

$5148 = 5 + 1 + 4 + 8 = 18$

$3240 = 3 + 2 + 4 + 0 = 9$

$600129 = 6 + 0 + 0 + 1 + 2 + 9 = 18$

$325827 = 3 + 2 + 5 + 8 + 2 + 7 = 27$

$1132200 = 1 + 1 + 3 + 2 + 2 + 0 + 0 = 9$

قابلیت تقسیم بر ۱۰:

عددی که فقط رقم یک‌های آن صفر باشـد آن عـدد بـر 10 پـوره قابـل تقسیم است، مثلاً:

7490, 65120, 9300, 514000, …….

قابلیت تقسیم بر ۱۱:

عددی که حاصل‌تفریق، مجموعه‌های موقعیت‌های جفت و طاق ارقام آن صفر و یا بر 11 پوره قابل تقسیم باشد، عدد مذکور بر 11 پـوره قابـل تقسـیم می‌باشد.

مثال (۱): 831732

ارقام موقعیت‌های طاق = $2 + 7 + 3 = 12$

ارقام موقعیت‌های جفت = $3 + 1 + 8 = 12$

حاصل تفریق مجموعه موقعیت‌های جفت و طاق = $12 - 12 = 0$

پس عدد مذکور بر 11 پوره قابل تقسیم می‌باشد.

مثال (۲): 7163585

$23 = 7 + 6 + 5 + 5$ = ارقام موقعیت‌های طاق

$12 = 1 + 3 + 8$ = ارقام موقعیت‌های جفت

$11 = 12 - 23$ = حاصل تفریق مجموعه موقعیت‌های جفت و طاق

در نتیجه عدد مذکور به 11 پوره قابل تقسیم می‌باشد.

مثال (۳): 556182

$8 = 5 + 1 + 2$ = ارقام موقعیت‌های طاق

$19 = 5 + 6 + 8$ = ارقام موقعیت‌های جفت

$11 = 8 - 19$ = حاصل تفریق مجموعه موقعیت‌های جفت و طاق

در نتیجه عدد مذکور بر 11 پوره قابل تقسیم می‌باشد.

مثال‌ها: اعداد ذیل به کدام اعداد پوره قابل تقسیم می‌باشد و چرا؟

مثال اول: عدد 72

۱) بر 2 پوره قابل تقسیم است، زیرا رقم اول آن جفت است.

۲) بر 3 پوره قابل تقسیم است، زیرا مجموعه ارقام آن $9 = 2 + 7$ بر سه پوره قابل تقسیم می‌باشد.

$$\begin{array}{r|l} 72 & 4 \\ 4 & 18 \\ \hline 32 & \\ 32 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

۳) بر 4 پوره قابل تقسیم است، زیرا به حیث عدد دو رقمی می‌گردد.

۴) بر 6 پوره قابل تقسیم است، زیرا همزمان بر (2) و (3) پوره قابل تقسیم می‌باشد.

$$\begin{array}{r|l} 72 & 4 \\ 72 & 9 \\ \hline 0 & \end{array}$$

۵) بر 8 پوره قابل تقسیم است زیرا به حیث عدد دو رقمی می‌گردد.

۶) بر 9 پوره قابل تقسیم است زیرا مجموعه ارقام آن $9 = 2 + 7$ بر ۹ پوره قابل تقسیم می‌باشد.

مثال (۲): عدد 135

۱) بر 3 پوره قابل تقسیم است، زیرا مجموعه ارقام آن $9 = 5 + 3 + 1$ بر سه پوره قابل تقسیم می‌باشد؟

۲) بر 5 پوره قابل تقسیم است زیرا رقم‌یک‌های آن عدد (5) است.

۳) بر 9 پوره قابل تقسیم است زیرا مجموعه ارقام آن $9 = 5 + 3 + 1$ بر ۹ پوره قابل تقسیم می‌باشد.

مثال (۳): عدد 2100

۱) بر 2 پوره قابل تقسیم است، زیرا رقم‌یک‌های آن صفر است.

۲) بر 3 پوره قابل تقسیم است، زیرا مجموعه ارقام آن $3 = 0 + 0 + 1 + 2$ بر سه پوره قابل تقسیم می‌باشد.

۳) بر 4 پوره قابل تقسیم است، زیرا دو رقم یک‌ها و ده‌ها آن صفرها می‌باشد.

۴) بر 5 پوره قابل تقسیم است، زیرا رقم یک‌های آن صفر می‌باشد.

۵) بر 6 پوره قابل تقسیم است، زیرا همزمان بر (2) و (3) پوره قابل تقسیم می‌باشد.

۶) بر 7 پوره قابل تقسیم است، زیرا:

$$\begin{aligned} 2100 &= 210 - 0 = 210 \\ &= 21 - 0 = 21 \\ &= 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

۷) بر 10 پوره قابل تقسیم است، زیرا رقم یک‌ها آن صفر می‌باشد.

اعداد اولیه (Prime numbers): اعدادی که فقط دارای دو عامل ضربی باشد و یا به عباره دیگر اعدادی که به جز از یک و خودش به کدام عددی دیگر پوره قابل تقسیم نباشند، اعداد اولیه نامیده می‌شوند، مثلاً:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ...

اعداد مرکب (Composete number): اعدادی که اقلاً دارای سه عامل ضربی باشند و یا به عباره دیگر برعلاوه یک و خودش اقلاً به یک عدد دیگـر نیز پوره قابل تقسیم باشد، عدد مرکب نامیده می‌شود، مثلاً:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, ….

به خاطر داشته باشید که عدد یک نه اولیه و نه مرکب گفته می‌شود، زیـرا هیچ یک از تعریفات اعداد اولیه و مرکب را صدق نمی‌کند.

تجزیه اعداد مرکب (Factoring)

عملیه دریافت عوامل ضربی یک عدد را تجزیه می‌نامند یعنـی ارائـه عـدد به حیث حاصل ضرب عوامل اولیه آن عبارت از شکل تجزیه شده همان عـدد می‌باشد، که در تجزیه اعداد مرکب از قابلیت‌های تقسیم بر اعداد اولیـه ماننـد قابلیت تقسیم بر (2)، بر (3)، بر (5)، بر (7)، بر (11) ..... طوری اسـتفاده بـه عمل می‌آید که در صورت امکان اولاً عدد داده شده بر (2) تقسیم گردیده که مقسوم‌علیه در یک ستون و حاصل تقسیم در ستون مقابل بطور پـی‌هـم درج گردیده هرگاه عدد بار دیگر قابلیت تقسیم بر (2) را نداشته باشـد بـر (3)، بـر (5)، .... عملیه تقسیم را در ستون‌های مربوط آن تکرار می‌نماییم، مثلاً:

اعداد ذیل را به عوامل اولیه آن تجزیه نمایید:

1) $12 = ?$

2	12
2	6
3	3
	1

$\Rightarrow 12 = 2.2.3$

$12 = 2^2.3$

2) $15 = ?$

3	15
5	5
	1

$\Rightarrow 15 = 3.5$

3) $48 = ?$

2	48
2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$\Rightarrow 48 = 2.2.2.2.3$

$48 = 2^4.3$

4) $720 = ?$

2	720
2	360
2	180
2	90
3	45
3	15
5	5
	1

$\Rightarrow 720 = 2.2.2.2.3.3.5$

$720 = 2^4.3.3^2.5$

5) $4050 = ?$

2	4050
3	2025
3	675
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

$\Rightarrow 4050 = 2.3.3.3.3.5.5$

$4050 = 2^1.3^4.5^2$

بزرگترین قاسم مشترک (Greatest Common Divisor)

عبارت از بزرگترین مقسوم‌علیه بوده که تمام اعداد داده شده بر آن پوره قابل تقسیم شده بتواند، مثلاً بزرگترین قاسم مشترک اعداد 12، 30 و 48 عبارت از عدد 6 می‌باشد، زیرا قاسم‌های اعداد مذکور عبارت از:

$12 = \{1,2,3,4,6,12\}$

$30 = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

$48 = \{1,2,3,4,6,8,12,24,48\}$

در نتیجه قاسم‌های مشترک آن عبارت از: $= \{1,2,3,6\}$

که در بین این قاسم‌های مشترک بزرگترین آن (6) می‌باشد.

برای دریافت بزرگترین قاسم مشترک اعداد را همزمان بر قاسم‌های مشترک تا زمانی تقسیم می‌نماییم که کدام قاسم مشترک دیگر بین آنها موجود نباشد. بعداً حاصل ضرب قاسم‌های مشترک، عبارت ا ز بزرگترین قاسم مشترک بین اعداد داده شده می‌باشد، مثلاً:

2	12,	30,	48
3	6,	15,	24
	2,	5,	12

$\Rightarrow G.C.D = 2\cdot 3 = 6$

مثال‌ها

بزرگترین قاسم مشترک اعداد ذیل را دریافت نمایید.

1) 12, 18, 36

2	12,	18,	36
3	6,	9,	12
	2	3,	4

$\Rightarrow G.C.D = 2\cdot 3 = 6$

2) 40, 60, 100

2	40,	60,	100
2	20,	30,	50
5	10,	15,	25
	2,	3,	5

$\Rightarrow G.C.D = 2\cdot 2\cdot 5 = 20$

3) 24, 36, 72

2	24,	36,	72
2	12,	18,	36
3	6,	9,	18
	2,	3,	6

$\Rightarrow G.C.D = 2\cdot 2\cdot 3 = 12$

4) 45, 60, 75, 30

3	45,	60,	75,	30
5	15,	20,	25,	10
	3,	4,	5,	2

$\Rightarrow G.C.D = 3\cdot 5 = 15$

کوچکترین مضرب مشترک (Least Common Maltiple)

عبارت از دریافت کوچکترین مقسوم بوده که بر تمام اعداد داده شده پوره قابل تقسیم باشد، مثلاً: کوچکترین مضرب مشترک اعداد، 6، 8، 12 عبارت از عدد 24 می‌باشد یعنی:

$24 \div 6 = 4,\ 24-24=0 \quad , \quad 24 \div 8 = 3,\ 24-24=0 \quad , \quad 24 \div 12 = 2,\ 24-24=0$

به خاطر داشته باشید که اعداد مانند 48، 72، 96، 120، 144، 168، 192، ... نیز مضرب‌های مشترک اعداد فوق می‌باشد، اما کوچکترین آن‌ها عدد 24 می‌باشد.

جهت دریافت کوچکترین مضرب مشترک اعداد مانند میتود قاسم‌های مشترک اعداد را بر قاسم‌های مشترک و غیر مشترک تا زمانی تقسیم می‌نماییم که نتیجه نهایی تمام اعداد یک گردد. حاصل‌ضرب تمام قاسم‌های مشترک و غیر مشترک اعداد داده شده عبارت از کوچکترین مضرب مشترک آنها می‌باشد، مثلاً: کوچکترین مضرب مشترک اعداد 6، 8 و 12 چنین دریافت می‌گردد.

2	6,	8,	12
2	3,	4,	6
2	3,	2,	3
3	3,	1,	3
	1,	1,	1

$\Rightarrow L.C.M = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

مثال‌ها: کوچکترین مضرب مشترک اعداد ذیل را دریابید:

1) 10, 15

2	10,	15
3	5,	15
5	5,	5
	1,	1

$\Rightarrow L.C.M = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

2) 12, 18, 20

2	12,	18,	20
2	6,	9,	10
3	3,	9,	5
3	1,	3,	5
5	1,	3,	5
	1,	1,	1

$\Rightarrow L.C.M = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$

3) 21, 14, 42

2	21,	14,	42
3	21,	7,	21
7	7,	7,	7
	1,	1,	1

$\Rightarrow L.C.M = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

4) 12, 30, 36, 42

2	12,	30,	36,	42
2	6,	15,	18,	21
3	3,	15,	9,	21
3	1,	5,	3,	7
5	1,	5,	1,	7
7	1,	1,	1,	7
	1,	1,	1,	1

$\Rightarrow L.C.M = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$

جذرها (Radicals)

بـه همـین ترتیـب کـه در طاقـت اعـداد کامـل توضـیح نمـودیم $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ که عدد 8 به نـام طاقـت Power، 2 بـه نـام اساس (قاعده) base و 3 به نام نما یا طاقت نما (exponent) یاد مـی‌گردیـد. پـس عدد (2) را به نام جذر سوم عدد (8) یاد می‌کنند و چنین نمایش داده می‌شود. $\sqrt[3]{8} = 2$ که عدد 3 درجه جذر ($\sqrt{\ }$) سمبول جذر و 8 مجذور (عدد تحت جذر) یاد می‌گردد.

به خاطر بسپارید که جذر بدون درجه جذر دوم (جذرالمربع) یاد مـی‌گـردد، جذور تمام اعداد کامل بطور مکمل نبوده بلکه بعضی از اعداد دارای جذرالمربع کامل می‌باشد، مثلاً:

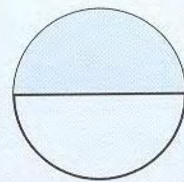
اعداد	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
جذرالمربع اعداد	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

که تعیین و استخراج جذرالمربع اعـداد را در فـصل دوم بـه طـور مفـصل توضیح خواهیم نمود.

اعداد کسری (Ratianal Numbers)

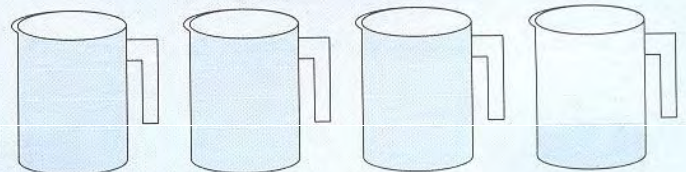
کسر در لغت به معنی شکسته بوده و در اصطلاح ریاضی به عـددی گفتـه می‌شود که شامل کمیتی کمتر از واحد نیز باشد.

مثلاً:



نیم نان

یا سه لیتر و ربع یک لیتر آب

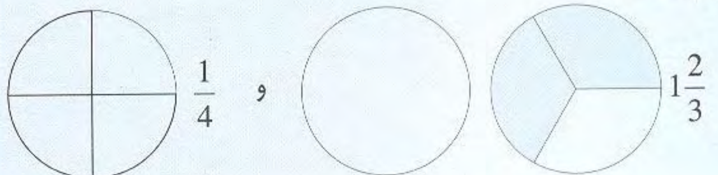


بطور عموم اعداد کسری به دو شکل نمایش داده مـی‌شـود، کسـر عـام و کسر اعشار که هر یک را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

اول- کسر عام (Gommon Fractions)

هرگاه یک واحد کامل را به چندین حصه مـساوی تقـسیم نمـوده و از آن چند حصه آن را در نظر بگیریم و یا برعلاوه آن چند واحد کامل دیگـر را نیـز با آن در نظر بگیریم.

چنین مقادیر به وسیله عـددی نـشان داده مـی‌شـود کـه کـسر عـام یـاد می‌گردد، مثلاً:



$1\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{4}$

عدد که در کسر $\frac{1}{4}$ عدد (4) به نام مخرج یا denominator (کمیتی که واحد تقسیم یافت شده، واحد انتخاب می‌گردد) و در کسر $1\frac{2}{3}$ عدد (1) به نام عـدد صحیح یـاد می‌گردد، که ایـن نـوع کـسرها را بـه نـام عـدد مخلـوط (Mixed Number) نیز یاد می‌نمایند. برعلاوه یک کـسر یـک مقـدار عـدد صحیح نیز با خود داشته باشد.

انواع کسر عام

بطور عموم کسر عام به دو نوع می‌باشد:

۱- کسر عام واقعـی (عـادی) (Proper Fraction): کـسر عـام کـه صورت آن به مقایسه مخرج آن کوچکتر باشد، کسر عام واقعی نامیده می‌شود، مثلاً:

$$....\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{10}$$

۲- کسر عام غیرواقعی (غیر عادی) یا (مجازی) (Inproper Fraction):

به کسر عام گفته می‌شود که صورت آن به مقایسه مخرج آن بزرگتـر باشد، مثلاً:

$$\frac{7}{3}, \frac{5}{4}, \frac{17}{5}, \frac{9}{2}, ...$$

که می‌توان این نوع کسر عـام را بـا اسـتفاده از عملیـه تـصحیح یعنـی از عملیه تقسیم صورت بر مخرج به کسر عام عدد صـحیح‌دار (عـدد مخلـوط یـا Mixed Number) تبدیل نمود، مثلاً:

1) $\frac{7}{3} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \underline{6} & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 2\frac{1}{3}$

2) $\frac{5}{4} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 5 & 4 \\ \underline{4} & 1 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 1\frac{1}{4}$

$$3)\quad \frac{17}{5} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \underline{15} & 3 \\ 2 & \end{array} \Rightarrow 3\frac{2}{5}$$

$$4)\quad \frac{9}{2} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ \underline{8} & 4 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 4\frac{1}{2}$$

به همین ترتیب می‌توان با استفاده از عملیه غیر واجب، کسر عدد صحیح‌دار را به کسر غیر واقعی طوری تبدیل نمود که عدد صحیح را ضرب مخرج نموده جمع صورت می‌نماییم و به حیث صورت کسر قرار می‌دهیم و مخرج، همان تقسیمات داده شدهٔ آن می‌باشد، مثلاً:

$$1)\quad 5\frac{2}{3} = \frac{5\times3+2}{3} = \frac{15+2}{3} = \frac{17}{3}$$

$$2)\quad 4\frac{1}{2} = \frac{4\times2+1}{2} = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$3)\quad 1\frac{1}{4} = \frac{1\times4+1}{4} = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$4)\quad 2\frac{1}{3} = \frac{2\times3+1}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$$

یادداشت:

۱) به خاطر بسپارید که عدد واحد به کسری گفته می‌شود که صورت و مخرج آن مساوی باشند، که نتیجه چنین کسرها برابر به یک است یعنی:

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{7}{7}, \frac{12}{12}, \ldots\ldots$$

۲) هر عدد کامل به شکل یک عدد کسری نمایش داده می‌شود یعنی:

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \ldots\ldots$$

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{20}{4} = \ldots\ldots$$

۳) حاصل جمع یک عدد کامل با یک عدد کسر عام به شکل عدد مخلوط یا کسر غیر واقعی نمایش داده می‌شود. یعنی:

$$2 + \frac{3}{5} = 2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$$

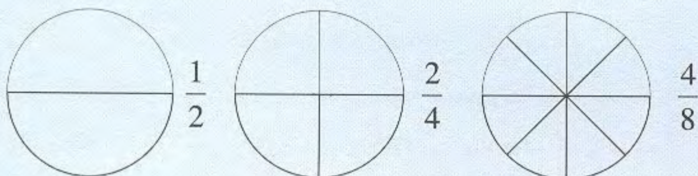
$$7 + \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

$$4 + \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

۴) کسرهای که از تقسیمات یکسان باشد یعنی دارای مخرج‌های مساوی باشند کسرهای متجانس (هم‌جنس) نامیده می‌شوند، مثلاً:

$$\frac{7}{13}, \frac{5}{13}, \frac{3}{13}, \frac{8}{13}, \ldots\ldots$$

معادل سازی کسرهای عام: کسرهای عام که صورت و مخرج آنها اعداد متفاوت و مقدار شان باهم مساوی باشند کسرهای عام معادل نامیده می‌شوند، مثلاً:



هرگاه صورت و مخرج یک کسرعام را همزمان به عین عدد ضرب و یا تقسیم نمایم مقدار کسر عام تغییر نمی‌نماید و کسر عام جدید معادل کسر عام اولی گفته می‌شود، مثلاً:

1)

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{2}{4}$$
$$\frac{1}{2}=\frac{1\times3}{2\times3}=\frac{3}{6}$$
$$\frac{1}{2}=\frac{1\times4}{2\times4}=\frac{4}{8}$$
$$\frac{1}{2}=\frac{1\times5}{2\times5}=\frac{5}{10}$$
$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\ldots\ldots$$

2)

$$\frac{12}{24}=\frac{12\div12}{24\div12}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{12}{24}=\frac{12\div6}{24\div6}=\frac{2}{4}$$
$$\frac{12}{24}=\frac{12\div4}{24\div4}=\frac{3}{6}$$
$$\frac{12}{24}=\frac{12\div3}{24\div3}=\frac{4}{8}$$
$$\frac{12}{24}=\frac{12\div2}{24\div2}=\frac{6}{12}$$
$$\frac{12}{24}=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{6}{12}$$

اختصار کسرهای عام (Raduction to Lower Terms): عملیه تقسیم کردن همزمان صورت و مخرج یک کسر عام را بر قاسم‌های مشترک آن اختصار می‌نامند، که می‌تواند این عملیه بر فکتورهای مشترک طور تدریجی صورت گیرد و یا بر بزرگترین قاسم مشترک آنها تقسیم گردد.

مثال‌ها: کسرهای ذیل را اختصار نمایید.

مثال (۱):

مرحله اول $\frac{12}{24}=\frac{12\div2}{24\div2}=\frac{6}{12}$

مرحله دوم $\frac{6}{12}=\frac{6\div2}{12\div2}=\frac{3}{6}$

مرحله سوم $\frac{3}{6}=\frac{3\div3}{6\div3}=\frac{1}{2}$

و یا $\frac{12}{24}=\frac{12\div12}{24\div12}=\frac{1}{2}$

مثال (۲):

مرحله اول $\frac{15}{45}=\frac{15\div3}{45\div3}=\frac{5}{15}$

مرحله دوم $\frac{5}{15}=\frac{5\div5}{15\div5}=\frac{1}{3}$

و یا $\frac{15}{45}=\frac{15\div15}{45\div15}=\frac{1}{3}$

مثال (۳):

مرحله اول $\frac{210}{120}=\frac{210\div2}{120\div2}=\frac{105}{60}$

مرحله دوم $\frac{105}{60}=\frac{105\div3}{60\div3}=\frac{35}{20}$

مرحله سوم $\frac{35}{20}=\frac{35\div5}{20\div5}=\frac{7}{4}$

و یا $\frac{210}{120}=\frac{210\div30}{120\div30}=\frac{7}{4}$

عملیه تجنیس (هم مخرج سازی) کسرهای عام: جهت هم‌مخرج سازی دو و یا چندین کسر می‌توان مخرج کسر عام اولی را به صورت و مخرج کسر عام دومی و از کسر عام دومی را به صورت و مخرج کسر عام اولی ضرب نموده که بدین‌وسیله دو کسر عام دارای مخرج‌های مساوی می‌گردند، مثلاً:

مثال (۱):

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{4}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2\times4}{5\times4} = \frac{8}{20}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3\times5}{4\times5} = \frac{15}{20}$$

مثال (۲):

$$\frac{1}{2}, \frac{7}{3}, \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times3\times5}{2\times3\times5} = \frac{15}{30}$$

$$\frac{7}{3} = \frac{7\times2\times5}{3\times2\times5} = \frac{70}{30}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2\times2\times3}{5\times2\times3} = \frac{12}{30}$$

که برای چندین کسر عام، ساده خواهد بود که کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها را دریافت به حیث مخرج مشترک در نظر گرفته بعداً مخرج مشترک را بر مخرج هر کسر تقسیم و حاصل تقسیم را با صورت همان کسر عام ضرب نمایم. مثلاً:

مثال (۱):

کسور عام $\frac{1}{2}$، $\frac{7}{3}$ و $\frac{2}{5}$ را هم‌مخرج سازید:

$$L.C.M\ (2,3,5) = 30$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}, \frac{7}{3}, \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{30\div5\times2}{30}, \frac{30\div3\times7}{30}, \frac{30\div2\times1}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{30}, \frac{70}{30}, \frac{15}{30}$$

مثال (۲):

کسور عام $\frac{7}{10}$، $\frac{5}{8}$، $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ را هم‌مخرج سازید:

$$L.C.M\ (4,2,8,10) = 40$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{7}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{40\div4\times3}{40}, \frac{40\div2\times1}{40}, \frac{40\div8\times5}{40}, \frac{40\div10\times7}{40}$$

$$\Rightarrow \frac{30}{40}, \frac{20}{40}, \frac{25}{40}, \frac{28}{40}$$

مثال (۳):

کسرهای عام $\frac{7}{12}$، $\frac{3}{8}$ و $\frac{5}{6}$ را هم‌مخرج سازید:

$$L.C.M\ (6,8,12) = 24$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{24\div6\times5}{24}, \frac{24\div8\times3}{24}, \frac{24\div12\times7}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{20}{24}, \frac{9}{24}, \frac{14}{24}$$

مقایسه کسرهای عام Comperision of Fractins: جهت مقایسه دو کسر عام سه حالت ذیل را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: هر گاه کسرها دارای مخرج‌های مساوی باشند، کسری بزرگ است که دارای صورت بزرگتر باشد. مثلاً:

1) $\frac{5}{7}, \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{5}{7} > \frac{2}{7}$

2) $\frac{11}{20}, \frac{17}{20} \Rightarrow \frac{11}{20} < \frac{17}{20}$

حالت دوم: هرگاه کسرها دارای صورت‌های مساوی باشند، کسری بزرگ است که دارای مخرج کوچک باشد، مثلاً:

1) $\frac{7}{3},\frac{7}{5}\Rightarrow\frac{7}{3}>\frac{7}{5}$

2) $\frac{10}{9},\frac{10}{7}\Rightarrow\frac{10}{9}<\frac{10}{7}$

حالت سوم: هرگاه صورت‌ها و مخرج‌های کسور مختلف باشند اولاً کسرهای مذکور را با استفاده از عملیه تجنیس هم‌مخرج ساخته بعداً مانند حالت اول مقایسه می‌نماییم. مثلاً:

1) $\frac{3}{5},\frac{4}{7}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{3}{5}=\frac{3\times7}{5\times7}=\frac{21}{35}\\ \frac{4}{7}=\frac{4\times5}{7\times5}=\frac{20}{35}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{21}{35}>\frac{20}{35}\Rightarrow\frac{3}{5}>\frac{4}{7}$$

2) $\frac{7}{8},\frac{3}{7}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{7}{8}=\frac{7\times7}{8\times7}=\frac{49}{56}\\ \frac{3}{7}=\frac{3\times8}{7\times8}=\frac{21}{56}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{49}{56}>\frac{21}{56}\Rightarrow\frac{7}{8}>\frac{3}{7}$$

3) $\frac{1}{4},\frac{2}{3}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{4}=\frac{1\times3}{4\times3}=\frac{3}{12}\\ \frac{2}{3}=\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{3}{12}<\frac{8}{12}\Rightarrow\frac{1}{4}<\frac{2}{3}$$

عملیات اساسی بالای کسر عام
(Operation on Common Fraction)

اول- عملیه جمع و تفریق کسر عام

چون عملیه جمع و تفریق فقط بالای تقسیمات یکسان اعداد امکان‌پذیر است پس این اصل در کسر عام نیز مراعات می‌گردد، یعنی فقط می‌توان کسور عامی را جمع و تفریق نمود که دارای مخرج‌های مساوی باشند. در صورتیکه مخرج‌ها متفاوت باشند اولاً آنها را هم‌مخرج ساخته (کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها را به دست آورده) بعداً از مخرج‌ها یکی را در نظر گرفته و صورت‌ها را باهم جمع و یا تفریق می‌نماییم و اگر کسور عام دارای عدد صحیح باشند، اولاً آنها را غیرواجب نموده و سپس عملیه جمع و تفریق را اجرا می‌نماییم و در صورت امکان نتیجه کسر نهایی را اختصار می‌نماییم.

مثال: کسور عام ذیل را جمع و تفریق نمایید:

1) $\frac{5}{8}+\frac{1}{8}=?$

$\Rightarrow\frac{5}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5+1}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

2) $\frac{12}{11}-\frac{7}{11}=?$

$\Rightarrow\frac{12}{11}-\frac{7}{11}=\frac{12-7}{11}=\frac{5}{11}$

3) $2\frac{3}{7}+1\frac{5}{7}=?$

$\Rightarrow2\frac{3}{7}+1\frac{5}{7}=\frac{17}{7}+\frac{12}{7}=\frac{17+12}{7}=\frac{29}{7}$

و یا

$\Rightarrow2\frac{3}{7}+1\frac{5}{7}=(2+1)+\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=3+\frac{3+5}{7}$

$=3+\frac{8}{7}=3\frac{8}{7}=\frac{29}{7}$

4) $8\frac{2}{9}-5\frac{1}{9}=?$

$$\Rightarrow 8\frac{2}{9}-5\frac{1}{9}=\frac{74}{9}-\frac{46}{9}$$

$$=\frac{74-46}{9}=\frac{28}{9}$$

و یا
$$\Rightarrow 8\frac{2}{9}-5\frac{1}{9}=(8-5)+\frac{2}{9}-\frac{1}{9}$$

$$=3+\frac{2-1}{9}=3+\frac{1}{9}=3\frac{1}{9}=\frac{28}{9}$$

5) $7\frac{5}{13}+\frac{9}{13}-4\frac{11}{13}=?$

$$\Rightarrow 7\frac{5}{13}+\frac{9}{13}-4\frac{11}{13}=\frac{96}{13}+\frac{9}{13}-\frac{63}{13}=\frac{96+9-63}{13}$$

$$=\frac{105-63}{13}=\frac{42}{13}$$

و یا
$$\Rightarrow 7\frac{5}{13}+\frac{9}{13}-4\frac{11}{13}=(7-4)+\frac{5}{13}+\frac{9}{13}-\frac{11}{13}$$

$$=3+\frac{5+9-11}{13}=3+\frac{14-11}{13}=3+\frac{3}{13}=3\frac{3}{13}=\frac{42}{13}$$

6) $\frac{3}{5}+1\frac{1}{4}=?$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}+1\frac{1}{4}=\frac{3}{5}+\frac{5}{4}=\frac{20\div5\times3}{20}+\frac{20\div4\times5}{20}$$

$$=\frac{12}{20}+\frac{25}{20}=\frac{12+25}{20}=\frac{37}{20}$$

7) $3\frac{2}{3}-1\frac{2}{7}=?$

$$\Rightarrow 3\frac{2}{3}-1\frac{2}{7}=\frac{11}{3}-\frac{9}{7}=\frac{21\div3\times11}{21}-\frac{21\div7\times9}{21}$$

$$=\frac{77}{21}-\frac{27}{21}=\frac{77-27}{21}=\frac{50}{21}$$

و یا
$$3\frac{2}{3}-1\frac{2}{7}=(3-1)+\frac{2}{3}-\frac{2}{7}$$

$$=2+\frac{21\div3\times2}{21}-\frac{21\div7\times2}{21}$$

$$=2+\frac{14}{21}-\frac{6}{21}=2+\frac{14-6}{21}$$

$$=2+\frac{8}{21}=2\frac{8}{21}=\frac{50}{21}$$

8) $6\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+3\frac{2}{3}=?$

$$\Rightarrow 6\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+3\frac{2}{3}=\frac{27}{4}-\frac{6}{5}+\frac{11}{3}$$

$$=\frac{60\div4\times27-60\div5\times6+60\div3\times11}{60}$$

$$=\frac{405-72+220}{60}=\frac{333+220}{60}=\frac{553}{60}$$

و یا
$$6\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+3\frac{2}{3}=(6-1+3)+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}$$

$$=8+\frac{60\div4\times3-60\div5\times1+60\div3\times2}{60}$$

$$=8+\frac{45-12+40}{60}=8+\frac{33+40}{60}$$

$$=8+\frac{73}{60}=8\frac{73}{60}=\frac{553}{60}$$

دوم- عملیه ضرب کسر عام

چون ساده‌ترین طریقه جمع اعداد یکسان ضرب می‌باشد، بناءً این اصل در کسرها نیز پیروی می‌گردد یعنی:

$$\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{2+2+2}{7}=\frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=3\times\frac{2}{7}=\frac{3\times 2}{7}=\frac{6}{7}$$

از مثال فوق نتیجه می‌شود که در عملیه ضرب کسر عام صورت‌ها را باهم و مخرج‌ها را باهم ضرب می‌نماییم یعنی:

$$\Rightarrow 3\times\frac{2}{7}=\frac{3}{1}\times\frac{2}{7}=\frac{3\times 2}{1\times 7}=\frac{6}{7}$$

به خاطر داشته باشید در صورتیکه کسور دارای عدد صحیح باشند، اولاً آنها را غیر واجب نموده، بعداً در صورت امکان آنها را اختصار کرده در اخیر صورت‌ها را باهم و مخرج‌ها را باهم ضرب می‌نماییم.

مثال‌ها: کسرهای عام ذیل را باهم ضرب نمایید:

1) $2\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{8}=?$

$$\Rightarrow 2\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{8}=\frac{13}{5}\cdot\frac{15}{8}=\frac{13}{1}\cdot\frac{3}{8}=\frac{39}{8}=4\frac{7}{8}$$

2) $7\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{29}\cdot 1\frac{3}{5}=?$

$$\Rightarrow 7\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{29}\cdot 1\frac{3}{5}=\frac{29}{4}\cdot\frac{8}{29}\cdot\frac{8}{5}=\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{8}{5}=\frac{16}{5}=3\frac{1}{5}$$

3) $9\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{10}{47}\cdot 2=?$

$$\Rightarrow 9\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{10}{47}\cdot 2=\frac{47}{5}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{10}{47}\cdot\frac{2}{1}$$

$$=\frac{1}{1}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}=\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{1}=\frac{7}{1}=7$$

سوم- عملیه تقسیم کسر عام

چون عملیه تقسیم بالای دو عدد (مقسوم و مقسوم‌علیه) عیناً عملیهٔ ضرب با معکوس علیه می‌باشد یعنی:

$$24\div 6=4$$

$$\Rightarrow 24\times\frac{1}{6}=\frac{24}{1}\times\frac{1}{6}=\frac{24\times 1}{1\times 6}=\frac{24}{6}=4$$

بناءً جهت تقسیم نمودن دو کسر عام عملیه تقسیم را به ضرب تبدیل نموده و کسر مقسوم‌علیه را معکوس نموده، عملیه ضرب کسر عام را اجرا می‌نماییم.

مثال‌ها: کسور عام ذیل را باهم تقسیم نمایید:

1) $\frac{5}{4}\div 2=?$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}\div 2=\frac{5}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{5\times 1}{4\times 2}=\frac{5}{8}$$

2) $8\div\frac{3}{4}=?$

$$\Rightarrow 8\div\frac{3}{4}=\frac{8}{1}\times\frac{4}{3}=\frac{8\times 4}{1\times 3}=\frac{32}{3}$$

3) $\frac{7}{6}\div\frac{2}{3}=?$

$$\Rightarrow \frac{7}{6}\div\frac{2}{3}=\frac{7}{6}\times\frac{3}{2}=\frac{7\times 3}{6\times 2}=\frac{21}{12}=\frac{7}{4}$$

4) $2\frac{3}{4}\div 1\frac{1}{3}=?$

$$\Rightarrow 2\frac{3}{4}\div 1\frac{1}{3}=\frac{2\times 4+3}{4}\div\frac{1\times 3+1}{3}=\frac{11}{4}\div\frac{4}{3}$$

$$=\frac{11}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{11\times 3}{4\times 4}=\frac{33}{16}$$

یادداشت: به خاطر بسپارید که کسر عام که صورت و مخرج آن کسر عام باشند به نام کسرالکسر یاد می‌شود. در واقعیت کسرالکسر حالت تقسیم دو کسر را نشان می‌دهد مثلاً:

$$1)\ \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}}=\frac{3}{5}\times\frac{7}{2}=\frac{3\times7}{5\times2}=\frac{21}{10}$$

$$2)\ \frac{3\frac{1}{4}}{2\frac{2}{5}}=\frac{\frac{13}{4}}{\frac{12}{5}}=\frac{13}{4}\times\frac{5}{12}=\frac{13\times5}{4\times12}=\frac{65}{48}$$

$$3)\ \frac{7\frac{2}{9}}{5}=\frac{\frac{65}{9}}{\frac{5}{1}}=\frac{65}{9}\times\frac{1}{5}=\frac{65\times1}{9\times5}=\frac{13}{9}$$

$$4)\ \frac{8}{4\frac{3}{5}}=\frac{8}{\frac{23}{5}}=\frac{8}{1}\times\frac{5}{23}=\frac{8\times5}{1\times23}=\frac{40}{23}$$

عملیات مشترک حسابی بالای کسر عام

با درنظرداشت نکات لازم جهت اجرای عملیات مشترک حسابی بالای اعداد کامل، در اعداد کسری نیز می‌توان کسرهای مذکور را ساده نمود.

مثال‌ها: کسرهای ذیل را ساده سازید:

$$1)\ \frac{1}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=?$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{3\times1}{4\times2}=\frac{1}{5}+\frac{3}{8}=\frac{8+3\times5}{40}=\frac{8+15}{40}=\frac{23}{40}$$

$$2)\ 1\frac{3}{5}\div\frac{4}{7}\times2\frac{1}{3}=?$$

$$=\frac{1\times5+3}{5}\div\frac{4}{7}\times\frac{2\times3+1}{3}=\frac{5+3}{5}\div\frac{4}{7}\times\frac{6+1}{3}$$

$$=\frac{8}{5}\div\frac{4}{7}\times\frac{7}{3}=\frac{8}{5}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{3}$$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{7}{1}\times\frac{7}{3}=\frac{98}{15}$$

$$3)\ \frac{\frac{2}{7}+\frac{1}{4}+1}{5\frac{1}{5}+2}=?$$

$$=\frac{\frac{2\times4+1\times7+28}{28}}{\frac{26}{5}+2}=\frac{\frac{8+7+28}{28}}{\frac{26+2\times5}{5}}=\frac{\frac{43}{28}}{\frac{26+10}{5}}$$

$$=\frac{\frac{43}{28}}{\frac{36}{5}}=\frac{43}{28}\times\frac{5}{36}=\frac{215}{1008}$$

$$4)\ \frac{1\frac{1}{2}-\frac{3}{8}}{4+\frac{1}{5+\frac{2}{3}}}=?$$

$$=\frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{8}}{4+\frac{1}{\frac{17}{3}}}=\frac{\frac{3\times4-3}{8}}{4+1\times\frac{3}{17}}=\frac{\frac{12-3}{8}}{4+\frac{3}{17}}=\frac{\frac{9}{8}}{\frac{4\times17+3}{17}}$$

$$=\frac{\frac{\frac{9}{8}}{68+3}}{17}=\frac{\frac{\frac{9}{8}}{71}}{17}=\frac{9}{8}\times\frac{17}{71}=\frac{9\times17}{8\times71}=\frac{153}{568}$$

5) $9\frac{1}{3}+\frac{5+\frac{2}{3}}{4-\frac{1}{1+\frac{2}{5}}}=?$

$$=\frac{28}{3}+\frac{\frac{5\times3+2}{3}}{4-\frac{1}{\frac{1\times5+2}{5}}}=\frac{28}{3}+\frac{\frac{15+2}{3}}{4-\frac{1}{\frac{5+2}{5}}}$$

$$=\frac{28}{3}+\frac{\frac{17}{3}}{4-\frac{1}{\frac{7}{5}}}=\frac{28}{3}+\frac{\frac{17}{3}}{4-\frac{5}{7}}=\frac{28}{3}+\frac{\frac{17}{3}}{\frac{4\times7-5}{7}}$$

$$=\frac{28}{3}+\frac{\frac{17}{3}}{\frac{28-5}{7}}=\frac{28}{3}+\frac{\frac{17}{3}}{\frac{23}{7}}=\frac{28}{3}+\frac{17}{3}\times\frac{7}{23}$$

$$=\frac{28}{3}+\frac{17\times7}{3\times23}=\frac{28}{3}+\frac{119}{69}=\frac{69\div3\times28+69\div69\times119}{69}$$

$$=\frac{23\times28+1\times119}{69}=\frac{644+119}{69}=\frac{763}{69}$$

کسر اعشار (Decimal Fraction)

چون اصطلاح اعشار از کلمه عشر به لسان عربی به معنی ۱۰ گرفته شده است، پس می‌توان گفت که کسرهای که مخرج آن‌ها از اعداد طاقت‌های ۱۰ یعنی 10، 100، 1000، 10000، ...... به دست آمده باشد، کسر اعشار نامیده می‌شود که امروز در محاسبات روزمره معمولترین و مناسب‌ترین نوع اعداد می‌باشد، مانند اعداد ذیل:

$\frac{23}{10}=2,3$

$\frac{17}{100}=0,17$

$\frac{2451}{1000}=2,451$

$\frac{726512}{10000}=72,6512......$

به خاطر داشته باشید که موجودیت تعداد صفرها به سمت راست اعداد اعشاری مقدار کسر را تغییر نداده بلکه صحت مسئله را بیشتر می‌سازد مثلاً:

1) $2,5=2,50=2,500=2,5000=......$

طوریکه:

$2,5=\frac{25}{10}$

$2,50=\frac{250}{100}$

$2,500=\frac{2500}{1000}$

$2,5000=\frac{25000}{10000}$

2) $4 = 4,0 = 4,00 = 4,000 = \ldots\ldots$

طوریکه:

$$4 = \frac{4}{1}$$

$$4,0 = \frac{40}{10}$$

$$4,00 = \frac{400}{100}$$

$$4,000 = \frac{4000}{1000}$$

انواع کسر اعشار

بطور عموم کسر اعشار به دو نوع ملاحظه گردیده است:

۱- کسر اعشار محدود (ختم شونده): عبارت از کسر اعشاری است که از حاصل تقسیم دو عدد بعد از اجرای عملیه تقسیم در یک مراتبه یا چندین مراتبه باقیمانده صفر گردد، به دست آید. مثلاً:

مثال (۱): $7 \div 5 = ?$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 5 \\ \underline{5} & 1,4 \\ 20 & \\ \underline{20} & \\ 0 & \end{array} \Rightarrow 7 \div 5 = 1,4$$

مثال (۲): $35 \div 4 = ?$

$$\begin{array}{r|l} 35 & 4 \\ \underline{32} & 8,75 \\ 30 & \\ \underline{28} & \\ 20 & \\ \underline{20} & \\ 0 & \end{array} \Rightarrow 35 \div 4 = 8,75$$

مثال (۳): $837 \div 8 = ?$

$$\begin{array}{r|l} 837 & 8 \\ \underline{8} & 104,625 \\ 37 & \\ \underline{32} & \\ 50 & \\ \underline{48} & \\ 20 & \\ \underline{16} & \\ 40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array} = 104,625$$

کسر اعشار نامحدود (ختم ناشونده)

این نوع کسر اعشار نیز به دو نوع تقسیم گردیده اند:

الف- کسر اعشار متوالی: به کسر اعشار گفته می‌شود که یک و یا چند رقم قسمت اعشاریه آن بطور نامحدود تکراری باشد که این نوع کسرهای اعشار را دوره‌ای یا متناوب نیز می‌نامند، که معمولاً بالای ارقام متوالی آن یک خط و یا بین قوس گرفته می‌شود، مثلاً:

1) $25 \div 3 = ?$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 3 \\ \underline{24} & 8,333\ldots \\ 10 & \\ \underline{9} & \\ 10 & \\ \underline{9} & \\ 10 & \\ \underline{9} & \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 25 \div 3 = 8.\bar{3} = 8.(3)$$

ب- کسر اعشار غیر متوالی: به کسر اعشار نامحدودی گفته می‌شود که ارقام قسمت اعشاریه آن ختم ناشونده غیر تکراری باشد که این نوع اعشار از اعدادی که جذر کامل ندارد به دست می‌آید (که استخراج جذرالمربع آنها را در فصل بعدی مطالعه می‌نماییم)، مثلاً:

$\sqrt{3} = 1,732050807....$

$\sqrt[3]{5} = 1,709975029....$

$\sqrt[5]{8} = 1,515716567....$

عملیات اساسی بالای کسر اعشار
(Operation on Decimal Fraction)

اول- عملیه جمع و تفریق کسر اعشار

این عملیه بالای اعداد اعشاری مانند اعداد کامل در تقسیمات یکسان قسمت اعداد صحیح و قسمت اعشاریه آن صورت می‌گیرد، یعنی اعداد طوری تحت همدیگر ترتیب گردند که علامه‌های اعشاریه آنها در یک ستون و ارقام قسمت صحیح و اعشاری آنها در ستون‌های مربوط خویش قرار گیرند و بعداً عملیه جمع و یا تفریق اجرا می‌گردد.

مثال‌ها: کسرهای اعشار ذیل را ساده سازید:

مثال (۱):

$7,423 + 1,25 + 18,9025 + 8 = ?$

$$\begin{array}{r} 7,423 \\ +\ 1,25 \\ 18,9025 \\ 8 \\ \hline 35,5755 \end{array}$$

2) $13 \div 6 = ?$

$$\begin{array}{r|l} 13 & 6 \\ \underline{12} & 2,166\ldots \\ 10 & \\ \underline{6} & \\ 40 & \\ \underline{36} & \\ 40 & \\ \underline{36} & \\ 4 & \end{array}$$

$\Rightarrow 13 \div 6 = 2.1666... = 2.1\overline{6} = 2.1(6)$

3) $43 \div 99 = ?$

$$\begin{array}{r|l} 430 & 99 \\ \underline{396} & 0,4343\ldots \\ 340 & \\ \underline{297} & \\ 430 & \\ \underline{396} & \\ 340 & \\ \underline{297} & \\ 43 & \end{array}$$

$\Rightarrow 43 \div 99 = 0.4343... = 0.\overline{43} = 0.(43)$

4) $25 \div 7 = ?$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 7 \\ \underline{21} & 3,571428571428\ldots\ldots \\ 40 & \\ \underline{35} & \\ 50 & \\ \underline{49} & \\ 10 & \\ \underline{7} & \\ 30 & \\ \underline{28} & \\ 20 & \\ \underline{14} & \\ 60 & \\ \underline{54} & \\ 40 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{54} \\ 4 \end{array}$$

$= 3,571428571428......$

$= 3,\overline{571428} = 3,(571428)$

برای این که در جریان اجرای عملیه جمع و یا تفریق تقسیمات ستون‌های مربوط قسمت اعشاریه باعث اشتباه نگردد کمبود ارقام اعشاری را به وسیله صفرها یکسان ساخته بعداً عمل می‌نماییم.

مثال ۱ را به تکرار حل می‌نماییم:

$7,423+1,25+18,9025+8=?$

$$\begin{array}{r} 7,4230 \\ 1,2500 \\ +18,9025 \\ 8,0000 \\ \hline 35,5755 \end{array}$$

مثال (۲): $0,42+581,5+9,70012+12,3=?$

$$\begin{array}{r} 0,42000 \\ 581,50000 \\ +9,70012 \\ 12,30000 \\ \hline 603,92012 \end{array}$$

مثال (۳): $9,54-3,5614=?$

$$\begin{array}{r} 9,5400 \\ -3,5614 \\ \hline 5,9786 \end{array}$$

مثال (۴): $123-74,952=?$

$$\begin{array}{r} 123,000 \\ -\ 74,952 \\ \hline 48,048 \end{array}$$

مثال (۵): $317,491-8,521+63,6-23,51-13=?$

$$\begin{array}{r} 317,491 \\ -\ 63,600 \\ \hline 381,091 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 381,091 \\ -\ 8,521 \\ \hline 372,570 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 372,57 \\ -\ 23,51 \\ \hline 349,06 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 349,06 \\ -\ 13,00 \\ \hline 336,06 \end{array}$$

دوم- عملیه ضرب کسر اعشار

اعداد اعشاری را بدون در نظرداشت علامه اعشاریه آن مانند اعداد کامل در نظر گرفته عملیه ضرب را اجرا نموده و از حاصل‌ضرب به قدر مجموعه ارقام اعشاری عوامل ضربی از سمت راست جدا کرده علامت اعشاریه را جابجا می‌نماییم.

مثال‌ها: کسرهای اعشار ذیل را ضرب نمایید:

1) $7,42\times0,31$

$$\begin{array}{r} 742 \\ \times\ 31 \\ \hline 742 \\ 2226\ \\ \hline 2,3002 \end{array}$$

2) $4\times0,725=?$

$$\begin{array}{r} 725 \\ \times\ 4 \\ \hline 2,900 \end{array} =2,9$$

3) $15,127 \times 4,91 = ?$

```
   15127
 ×   491
 -------
   15127
  136143
  60508
 -------
 74,27357
```

4) $0,00251 \times 0,3271 = ?$

```
      3271
   ×   251
   -------
      3271
    16355
    6542
   -------
 0,000821021
```

5) $0,004 \times 0,00061 = ?$

```
      61
   ×   4
   -------
 0,00000244
```

به خاطر بسپارید که هرگاه کسر اعشار به اعداد مانند 10، 100، 1000، 10000، ... ضرب گردد به تعداد صفرهای اعداد مذکور علامه اعشاریه به طرف راست کسر اعشار انتقال می‌یابد، مثلاً:

$7,492516 \times 10 = 74,92516$

$7,492516 \times 100 = 749,2516$

$7,492516 \times 1000 = 7492,516$

$7,492516 \times 10000 = 74925,16$

$7,492516 \times 100000 = 749251,6$

$7,492516 \times 1000000 = 7492516$

$7,492516 \times 10000000 = 7492516 \times 10 = 74925160$

$7,492516 \times 100000000 = 7492516 \times 100 = 749251600$

سوم- عملیه تقسیم کسر اعشار

هرگاه یک عدد کسر اعشار بالای یک عدد کامل تقسیم گردد این عملیه مانند تقسیم اعداد کامل صورت گرفته با تفاوت این که علامت اعشاریه در نوبت مربوط آن به خارج‌قسمت انتقال می‌یابد، مثلاً:

1) $7,458 \div 2 = ?$

```
7,458 | 2
6     |-----
----  | 3,729
1 4
1 4
----
   5
   4
----
  18
  18
----
   0
```

2) $143,823 \div 5$

```
143,823 | 5
10      |--------
------  | 28,7646
 43
 40
------
  3 8
  3 5
------
   32
   30
------
    23
    20
------
    30
    30
------
     0
```

هرگاه مقسوم‌علیه کسر اعشار باشد، مقسوم و مقسوم‌علیه را به حیث صورت و مخرج کسر عام در نظر گرفته به کمک ضرب اعداد مانند 10، 100، 1000، ... صورت و مخرج را به کسر معادلی تبدیل نموده که از مخرج اعشاریه حذف گردد، بعداً مانند مثال‌های فوق عمل خواهیم نمود.

مثال: کسرهای اعشار ذیل را تقسیم نمایید.

1) $7,35 \div 0,4 = ?$

$$\frac{7,35}{0,4} = \frac{7,35\times10}{0,4\times10} = \frac{73,5}{4}$$

```
73,5 | 4
4    |18,375
----
33
32
----
 1 5
 1 2
 ----
  30
  28
  ----
   20
   20
   ----
    0
```

$$\Rightarrow \frac{73,5}{4} = 18,375$$

2) $145,3472 \div 0,25$

$$\Rightarrow \frac{145,3472}{0,25} = \frac{145,3472\times100}{0,25\times100} = \frac{14534,72}{25}$$

```
14534,72 | 25
125      |581,3888
----
 203
 200
 ----
   34
   25
   ----
    97
    75
    ----
    222
    200
    ----
     220      220
              200
              ----
               200
               200
               ----
                 0
```

$$\Rightarrow \frac{14534,72}{25} = 581,3888$$

3) $421 \div 0,002 = ?$

$$\Rightarrow \frac{421}{0,002} = \frac{421\times1000}{0,002\times1000} = \frac{421000}{2} = 210500$$

4) $5,31 \div 1,023 = ?$

$$\Rightarrow \frac{5,31}{1,023} = \frac{5,31\times1000}{1,023\times1000} = \frac{5310}{1023} = 5,190615835$$

5) $0,425 \div 14,3 = ?$

$$\Rightarrow \frac{0,425}{14,3} = \frac{0,425\times10}{14,3\times10} = \frac{4,25}{143} = 0,029720279$$

عملیه تقریب یا خلص سازی اعداد
(Rounding of Numbers)

این عملیه که به نام رونداف یا گرد کردن اعداد نیز یاد می‌گردد جهت سهولت محاسبه یک کسر اعشار به قیمت تقریبی آن یعنی دقت لازمه $\frac{1}{10}$، $\frac{1}{100}$، $\frac{1}{1000}$، ... جهت ارائه تعداد کمتری از ارقام بعد از اعشاریه با درنظرداشت حالت ذیل اجرا می‌گردد.

حالت اول: اگر رقم اول اعداد که از آن در ارقام اعشاری صرف‌نظر می‌گردد، کمتر از عدد پنج باشد بدون تغییر ارقام قبلی، ارقام اعشاری حذف می‌گردد.

مثال (۱): اعداد ذیل را به دقت $\frac{1}{1000}$ یعنی سه رقم اعشاری خلص سازی نمایید.

$72,43645128 \approx 72,436$

$145,910315 \approx 145,910$

$91,3580042 \approx 91,358$

$0,0491528 \approx 0,049$

مثال (۲): اعداد ذیل را به دقت $\frac{1}{100}$ یعنی دو رقم اعشاری خلص‌سازی نمایید.

$7,4815149 \approx 7,48$
$19,5523514 \approx 19,55$
$0,4333333 \approx 0,43$
$145,29041 \approx 145,29$

حالت دوم: اگر رقم اول اعداد که از آن در ارقام اعشاری صرف‌نظر می‌گردد. عدد پنج (به شرطی که بعد از عدد پنج اعداد دیگر ارقام اعشاری موجود باشد) و یا بزرگتر از عدد پنج باشد بعد از حذف آنها به رقم قبلی که صرف‌نظر نمی‌گردد یک واحد علاوه می‌گردد.

مثال (۱): اعداد اعشاری ذیل را به دقت $\frac{1}{10000}$ یعنی چهار رقم اعشاری خلص‌سازی نمایید.

$12,51327514 \approx 12,5133$
$5,381695231 \approx 5,3817$
$114,002184025 \approx 114,0022$
$15,46999464 \approx 15,4700 = 15,47$
$0,0638610042 \approx 0,0639$
$0,843653241 \approx 0,8437$

حالت سوم: اگر رقم اول اعداد که از آن در ارقام اعشاری صرف نظر می‌گردد. فقط عدد پنج باشد (بعداز عدد پنج اعداد دیگر ارقام اعشاری موجود نباشد یا صفرها باشد) در صورتیکه رقم قبل از پنج طاق باشد یک واحد به آن علاوه می‌گردد و هرگاه همین رقم جفت باشد از رقم پنج صرف‌نظر می‌گردد، مثلاً: اعداد ذیل را به دقت $\frac{1}{1000}$ خلص سازی نماید:

$13,4275 \approx 13,428$
$1,2235000 \approx 1,224$
$4,1045 \approx 4,104$
$0,912500 \approx 0,912$

تبدیل کسرهای عام و اعشار به یکدیگر

۱. تبدیل کسر عام به کسر اعشار: جهت تبدیل نمودن کسر عام به کسر اعشار فقط صورت کسر عام را به مخرج آن تقسیم نموده حاصل تقسیم عبارت از کسر اعشار می‌باشد، در صورتیکه کسر عام دارای عدد صحیح باشد به حیث ارقام صحیح کسر اعشار قرار داده می‌شود.

مثال‌ها: کسور عام ذیل را به کسر اعشار تبدیل نماید.

مثال (۱):

$$\frac{5}{8} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 50 & 8 \\ \underline{48} & 0,625 \\ 20 & \\ \underline{16} & \\ 40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array} \Rightarrow \frac{5}{8} = 0,625$$

مثال (۲):

$$\frac{14}{5} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 14 & 5 \\ \underline{10} & 2,8 \\ 40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array} \Rightarrow \frac{14}{5} = 2,8$$

مثال (۳):

$$\frac{7}{100} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 700 & 100 \\ \underline{700} & 0,07 \\ 0 & \end{array} \Rightarrow \frac{7}{100} = 0,07$$

مثال (۴):

$$5\frac{3}{4} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \underline{28} & 0,75 \\ 20 & \\ \underline{20} & \\ 0 & \end{array} \Rightarrow 5\frac{3}{4} = 5,75$$

مثال (۵):

$$\frac{19}{3} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 19 & 3 \\ \underline{18} & 6,333 \\ 10 & \\ \underline{9} & \\ 10 & \\ \underline{9} & \\ 10 & \\ \underline{9} & \\ 1 & \end{array} \Rightarrow \frac{19}{3} = 6,333... = 6,\bar{3}$$

مثال (۶):

$$\frac{25}{11} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 25 & 11 \\ \underline{22} & 2,2727.... \\ 30 & \\ \underline{22} & \\ 80 & \\ \underline{77} & \\ 30 & \\ \underline{22} & \\ 80 & \\ \underline{77} & \\ 3 & \end{array} \Rightarrow \frac{25}{11} = 2,272727...... = 2,\overline{27}$$

مثال (۷):

$$\frac{14}{13} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 14 & 13 \\ \underline{13} & 1,0769230.... \\ 100 & \\ \underline{91} & \\ 90 & \\ \underline{78} & \\ 120 & \\ \underline{117} & \\ 30 & \\ \underline{26} & \\ 40 & \\ \underline{39} & \\ 100 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{14}{13} = 1,076923076923\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{14}{13} = 1,\overline{076923}$$

مثال (۸):

$$3\frac{1}{25} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 100 & 25 \\ \underline{100} & 1,04 \\ 0 & \end{array} \Rightarrow 3\frac{1}{25} = 3,04$$

۲. تبدیل کسر اعشار محدود به کسر عام: چون قرار تعریف و مفهوم کسر اعشار مثلاً کسر 0,27 بدین معنی است که یک واحد به 100 حصه مساوی تقسیم گردیده و از آن 27 حصه گرفته شده است پس جهت تبدیل نمودن کسرهای اعشار محدود به کسر عام در صورت کسر عام عدد کسر اعشار را بدون علامه اعشاریه به حیث یک عدد طبیعی نوشته و در مخرج کسر عام تقسیمات عدد اعشاریه را می‌نویسیم، اگر امکان اختصار موجود باشد اختصار خواهیم نمود.

مثال‌ها: کسرهای اعشار ذیل را به کسر عام تبدیل نماید.

1) $0,27 = \frac{27}{100}$

2) $0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

3) $0{,}125=\dfrac{125}{1000}=\dfrac{1}{8}$

4) $2{,}5=\dfrac{25}{10}=\dfrac{5}{2}=2\dfrac{1}{2}$

و یا $2{,}5=2\dfrac{5}{10}=2\dfrac{1}{2}$

5) $12{,}03=\dfrac{1203}{100}=12\dfrac{3}{100}$

$12{,}03=12\dfrac{3}{100}$

6) $8{,}324=\dfrac{8324}{1000}=\dfrac{2081}{250}=8\dfrac{81}{250}$

و یا $8{,}324=8\dfrac{324}{1000}=8\dfrac{81}{250}$

۳. تبدیل کسر اعشار متوالی به کسر عام: برای تبدیل نمودن یک کسر اعشار متوالی به کسر عام صورت آن تفاضل ارقام اعشاری و ارقام صحیح عدد اعشار بوده و در مخرج عوض هر رقم متوالی عدد (9) و در عوض هر رقم تام یک صفر به سمت راست نوشته می‌گردد.

مثال‌ها: کسور اعشار متوالی ذیل را به کسر تبدیل نمایید.

1) $0{,}3333......=0{,}\overline{3}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

2) $0{,}54545454....=0{,}\overline{54}=\dfrac{54}{99}=\dfrac{6}{11}$

3) $0{,}135135135......=0{,}\overline{135}=\dfrac{135}{999}=\dfrac{15}{111}=\dfrac{5}{37}$

4) $1{,}6666......=1{,}\overline{6}=\dfrac{16-1}{9}=\dfrac{15}{9}=\dfrac{5}{3}$

5) $5{,}272727......=5{,}\overline{27}=\dfrac{527-5}{99}=\dfrac{522}{99}=\dfrac{58}{11}$

6) $4{,}13333.......=4{,}1\overline{3}=\dfrac{413-41}{90}=\dfrac{372}{90}=\dfrac{62}{15}$

7) $17{,}25454......=17{,}2\overline{54}=\dfrac{17254-172}{990}=\dfrac{17082}{990}=\dfrac{2847}{165}$

8) $1{,}356666.......=1{,}35\overline{6}=\dfrac{1356-135}{900}=\dfrac{1221}{900}=\dfrac{407}{300}$

عملیات مشترک کسر اعشار و کسر عام

هرگاه در یک افاده کسری کسر عام و کسر اعشار به کار رفته باشد می‌توان همه اعداد را به یک نوع کسر تبدیل نموده و بعداً آنها را ساده می‌سازیم و یا هم ممکن است عملیات جمع و تفریق را به کسر اعشار و عملیات ضرب و تقسیم را به کسر اعشار اجرأ نمود.

مثال‌ها: افاده‌های کسری ذیل را ساده سازید.

1) $\dfrac{5{,}4-\dfrac{2}{5}}{2\dfrac{1}{2}+0{,}4}=?$

$\Rightarrow\dfrac{5{,}4-\dfrac{2}{5}}{2\dfrac{1}{2}+0{,}4}=\dfrac{5{,}4-0{,}4}{2{,}5+0{,}4}=\dfrac{5{,}0}{2{,}9}=\dfrac{50}{29}=1{,}724$

و یا

$\Rightarrow\dfrac{5{,}4-\dfrac{2}{5}}{2\dfrac{1}{2}+0{,}4}=\dfrac{\dfrac{54}{10}-\dfrac{2}{5}}{\dfrac{5}{2}+\dfrac{4}{10}}=\dfrac{\dfrac{54-4}{10}}{\dfrac{25+4}{10}}=\dfrac{50}{29}=1{,}724$

2) $$\frac{3,5\cdot 2\frac{1}{4}}{\frac{1}{25}\div(4,2-\frac{2}{5})}=?$$

$$\Rightarrow \frac{3,5\cdot 2\frac{1}{4}}{\frac{1}{25}\div(4,2-\frac{2}{5})}=\frac{3,5\cdot 2,25}{0,04\div(4,2-0,4)}=\frac{7,875}{0,04\div 3,8}$$

$$=\frac{7,875}{0,0105263}=\frac{78750000}{105263}=748,125$$

و یا $$\Rightarrow \frac{3,5\cdot 2\frac{1}{4}}{\frac{1}{25}\div(4,2-\frac{2}{5})}=\frac{\frac{35}{10}\cdot\frac{9}{4}}{\frac{1}{25}\div(\frac{42}{10}-\frac{2}{5})}=\frac{\frac{315}{40}}{\frac{1}{25}\div(\frac{42-4}{10})}$$

$$=\frac{\frac{63}{8}}{\frac{1}{25}\div\frac{38}{10}}=\frac{\frac{63}{8}}{\frac{1}{25}\cdot\frac{10}{38}}=\frac{\frac{63}{8}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{19}}=$$

$$=\frac{63}{8}\cdot\frac{95}{1}=\frac{5985}{8}=748,125$$

3) $$\frac{\frac{1}{5}+2,3}{5,4-\frac{2}{5}}=?$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{5}+2,3}{5,4-\frac{2}{5}}=\frac{\frac{1}{5}+\frac{23}{10}}{\frac{54}{10}-\frac{2}{5}}=\frac{\frac{2+23}{10}}{\frac{54-4}{10}}=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}=0,5$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{5}+2,3}{5,4-\frac{2}{5}}=\frac{0,2+2,3}{5,4-0,4}=\frac{2,5}{5,0}=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}=0,5$$

4) $$\frac{(0,4)(1\frac{2}{5})+(\frac{7}{4})(1,2)}{5,3+\frac{1}{2}}+2,25-0,4=?$$

$$\Rightarrow \frac{(0,4)(1\frac{2}{5})+(\frac{7}{4})(1,2)}{5,3+\frac{1}{2}}+2,25-0,4$$

$$=\frac{(\frac{2}{5})(\frac{7}{5})+(\frac{7}{4})(\frac{6}{5})}{\frac{53}{10}+\frac{1}{2}}+\frac{225}{100}-\frac{4}{10}=\frac{\frac{14}{25}+\frac{42}{20}}{\frac{53+5}{10}}+\frac{9}{4}-\frac{2}{5}$$

$$=\frac{\frac{14}{25}+\frac{21}{10}}{\frac{58}{10}}+\frac{45-8}{20}=\frac{\frac{28+105}{50}}{\frac{58}{10}}+\frac{37}{20}$$

$$=\frac{\frac{133}{5}}{\frac{58}{1}}+\frac{37}{20}=\frac{133}{5}\cdot\frac{1}{58}+\frac{37}{20}=\frac{133}{290}+\frac{37}{20}$$

$$=\frac{2\times 133+29\times 37}{580}=\frac{266+1073}{580}=\frac{1339}{580}\approx 2,308$$

و یا $$\Rightarrow \frac{(0,4)(1\frac{2}{5})+(\frac{7}{4})(1,2)}{5,3+\frac{1}{2}}+2,25-0,4$$

$$=\frac{(0,4)(1,4)+(1,75)(1,2)}{5,3+0,5}+2,25-0,4$$

$$=\frac{0,56+2,1}{5,8}+1,85=\frac{2,66}{5,8}+1,85$$

$$=\frac{2,66\times 10}{5,8\times 10}+1,85=\frac{26,6}{58}+1,85\approx 0,458+1,85\approx 2,308$$

نسبت (Ratio)

رابطه بین دو کمیت هم‌جنس را نسبت می‌گویند و بیان می‌دارد که کمیت اول به چه مقدار بیشتر (کمتر) از کمیت دوم بوده و یا کمیت اول چند مراتبه شامل کمیت دوم یا کمیت دوم چندم حصهٔ، کمیت اول است. نسبت به دو نوع می‌باشد:

۱- **نسبت حسابی:** حاصل تفریق دو کمیت هم‌جنس را نسبت حسابی می‌نامند، مثلاً رابطه بین 17 و 12 عبارت از: $17-12=5$ پس عدد 5 عبارت از نسبت حسابی بین اعداد 17 و 12 می‌باشد.

۲- **نسبت هندسی:** حاصل تقسیم دو کمیت هم‌جنس عبارت از نسبت هندسی می‌باشد که معمولاً اصطلاح نسبت مربوط به نسبت هندسی دو مقدار هم‌جنس می‌باشد.

مثال‌ها:

۱): نسبت بین اعداد 6 و 24 عبارت است از:

$$\frac{24}{6}=4 \quad \text{و یا} \quad \frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

۲): احمد 36 جلد کتابچه دارد $\frac{3}{4}$ حصه آن را برای برادر خویش می‌دهد، معلوم نمایید، برادرش چند جلد کتابچه دریافت می‌نماید.

$$36\cdot\frac{3}{4}=9\cdot3=27 \text{ جلد}$$

۳): $\frac{5}{8}$ حصه چند دانه قلم 10 دانه قلم می‌گردد.

x تعداد تمام قلم‌ها

$$\frac{5}{8}\cdot x=10 \Rightarrow x=\frac{10}{\frac{5}{8}} \Rightarrow x=10\cdot\frac{8}{5} \Rightarrow x=16$$

۴): در یک فارم زراعتی پدر 200 نهال را در یک روز غرس نموده و پسر وی 85 نهال را غرس کرده، نسبت بین پدر و پسر چند است.

$$\frac{200}{85}=\frac{40}{17}$$

نسبت مرکب: حاصل ضرب دو یا چند نسبت بسیط را نسبت مرکب یاد می‌نمایند، مانند:

$$\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{12}{35}$$

یا

$$\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{10}{30}$$

مشارکت و تقسیم به نسبت: هرگاه یک مقدار معین را به نسبت چند عدد دیگر تقسیم نماییم، این عملیه را تقسیم به نسبت (تقسیم به اجزای متناسبه) یا مشارکت یاد می‌نمایند.

طریقه اجرای این عملیه طوریست که اولاً اعداد یا نسبت‌های داده شده را باهم جمع نموده و بالای مقدار داده شده تقسیم می‌نماییم و بعداً حاصل تقسیم را ضرب هر یک از نسبت‌ها می‌نماییم.

مثال‌ها:

۱) مقدار 350 کیلوگرام گندم را به نسبت $\frac{3}{4}$ تقسیم نموده، مقدار هر یک را معلوم نمایید.

$$3+4=7 \Rightarrow \quad 350 \div 7 = 50 \quad (350-35\,0=0)$$

$\Rightarrow 3\cdot50=150kg$ مقدار کمیت اول

$\Rightarrow 4\cdot50=200kg$ مقدار کمیت دوم

۲) سه نفر باهم در یک دوکان به سرمایه‌های متفاوت (250000) افغانی، (520000) افغانی و (230000) افغانی شریک اند، که در مدت یک سال مبلغ (300000) افغانی مفاد خالص نموده اند. مفاد هر یک از شرکا را تعیین نمایید.

حل:

$$250000+520000+230000=1000000$$
$$\Rightarrow \frac{300000}{1000000}=\frac{3}{10}$$

$250000\cdot\frac{3}{10}=(75000)$ افغانی .... مفاد نفر اول

$520000\cdot\frac{3}{10}=(156000)$ افغانی .... مفاد نفر دوم

$230000\cdot\frac{3}{10}=(69000)$ افغانی .... مفاد نفر سوم

۳) در یک شرکت سهامی پنج نفر باهم سهم‌دار اند، طوریکه نفر اول 8 سهم، نفر دوم 4 سهم، نفر سوم 5 سهم، نفر چهارم 13 سهم و نفر پنجم 10 سهم دارند، در یک مدت مبلغ 50000 دالر مفاد نموده اند. سهم مفاد هریک را محاسبه نمایید.

حل:

$$8+4+5+13+10=40$$

مفاد فی سهم $\Rightarrow \frac{50000}{40}=1250$

$8\cdot1250=10000$ .... مفاد سهم نفر اول

$4\cdot1250=5000$ .... مفاد سهم نفر دوم

$5\cdot1250=6250$ .... مفاد سهم نفر سوم

$13\cdot1250=16250$ ...... مفاد سهم نفر چهارم

$10\cdot1250=12500$ .... مفاد سهم نفر پنجم

تناسب (Proportion)

مساوی بودن دو نسبت را تناسب یاد می‌نمایند یعنی: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

طوریکه صورت نسبت اول (a) و مخرج نسبت دوم (d) را طرفین و مخرج نسبت اول (b) و صورت نسبت دوم (c) را وسطین تناسب یاد می‌نمایند، مثلاً: $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ یک تناسب را ارائه می‌نماید، زیرا $\frac{3}{5}=0,6$ و $\frac{6}{10}=0,6$ می‌گردد.

خواص تناسب (Property of Proportion)

۱) در هر تناسب حاصل ضرب طرفین مساوی به حاصل ضرب وسطین آن می‌باشد، یعنی:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

مثلاً: $\frac{3}{8}=\frac{6}{16}\Rightarrow 3\cdot16=8\cdot6\Rightarrow 48=48$

۲) هرگاه جای طرفین و یا وسطین را در تناسب تبدیل نماییم، یک تناسب را ارائه می‌نماید، یعنی:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$
$$\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

مثلاً: $\frac{5}{7}=\frac{15}{21}\Rightarrow\frac{21}{7}=\frac{15}{5}\Rightarrow 3=3$

$$\frac{5}{7}=\frac{15}{21}\Rightarrow\frac{5}{15}=\frac{7}{21}\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

۳) هرگاه تناسب را معکوس بسازیم، یک تناسب را ارائه می‌نماید، یعنی:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

مثلاً:

$$\frac{5}{8}=\frac{10}{16}\Rightarrow\frac{8}{5}=\frac{16}{10}\Rightarrow 1{,}6=1{,}6$$

۴) هرگاه به صورت‌ها و یا مخرج‌های یک تناسب یک عدد خلاف صفر مانند $(n\neq 0)$ را ضرب نماییم، بازهم یک تناسب است، یعنی:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a\cdot n}{b}=\frac{c\cdot n}{d},n\neq 0$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b\cdot n}=\frac{c}{d\cdot n},n\neq 0$$

مثلاً:

$$\frac{11}{5}=\frac{33}{15}\Rightarrow\frac{11\cdot 2}{5}=\frac{33\cdot 2}{15}\Rightarrow\frac{22}{5}=\frac{66}{15}\Rightarrow 4{,}4=4{,}4$$

و یا

$$\frac{11}{5}=\frac{33}{15}\Rightarrow\frac{11}{5\cdot 2}=\frac{33}{15\cdot 2}\Rightarrow\frac{11}{10}=\frac{33}{30}\Rightarrow 1{,}1=1{,}1$$

۵) هرگاه در یک تناسب مخرج‌ها را با صورت‌ها جمع و یا تفریق نماییم، بازهم یک تناسب را نشان می‌دهد، یعنی:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$$

مثلاً:

$$\frac{12}{5}=\frac{36}{15}\Rightarrow\frac{12+5}{5}=\frac{36+15}{15}\Rightarrow\frac{17}{5}=\frac{51}{15}\Rightarrow 3{,}4=3{,}4$$

$$\frac{12}{5}=\frac{36}{15}\Rightarrow\frac{12-5}{5}=\frac{36-15}{15}\Rightarrow\frac{7}{5}=\frac{21}{15}\Rightarrow 1{,}4=1{,}4$$

۶) هرگاه در یک تناسب صورت‌ها را با مخرج‌ها جمع و یا تفریق نماییم، همچنان یک تناسب می‌باشد، یعنی:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b\pm c}=\frac{c}{d\pm c}$$

مثلاً:

$$\frac{3}{7}=\frac{6}{14}\Rightarrow\frac{3}{7+3}=\frac{6}{14+6}\Rightarrow\frac{3}{10}=\frac{6}{20}\Rightarrow 0{,}3=0{,}3$$

$$\frac{3}{7}=\frac{6}{14}\Rightarrow\frac{3}{7-3}=\frac{6}{14-6}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{6}{8}\Rightarrow 0{,}75=0{,}75$$

۷) هرگاه در یک تناسب مخرج‌ها را با صورت جمع و در صورت تناسب قرار دهیم و مخرج‌ها را از صورت تفریق نموده و در مخرج قرار دهیم نتیجه یک تناسب خواهد بود. یعنی:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

مثلاً:

$$\frac{7}{5}=\frac{14}{10}\Rightarrow\frac{7+5}{7-5}=\frac{14+10}{14-10}\Rightarrow\frac{12}{2}=\frac{24}{4}\Rightarrow 6=6$$

۸) هرگاه چندین نسبت باهم مساوی باشند، طوریکه حاصل تقسیم آنها مساوی به یک عدد مشخص مانند (n) گردد در این حالت نسبت حاصل جمع صورت‌ها و مخرج‌ها نیز مساوی به همان عدد می‌گردد. یعنی:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\frac{g}{h}=n\Rightarrow\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=n$$

مثلاً:

$$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{12}{15}=\frac{16}{20}=0{,}8\Rightarrow\frac{4+8+12+16}{5+10+15+20}=\frac{40}{50}=0{,}8$$

دریافت جز مجهول در تناسب: اگر در یک تناسب یک جز آن نامعلوم و سه جز دیگر آن معلوم باشد، می‌توان جز مجهول را به کمک خواص تناسب

که در فوق ذکر گردید، دریافت نمود و یا می‌توان به شکل ساده‌تر طوری نوشت که در مقابل جز مجهول در طرفین یا وسطین عدد معلوم را در مخرج و دو جز معلوم دیگر که در طرفین یا وسطین قرار دارد در صورت نوشته و جز مجهول را محاسبه نماییم.

مثال‌ها:

جز مجهول را در تناسب‌های ذیل دریافت نمایید.

$$1)\ \frac{x}{5}=\frac{4}{10}\Rightarrow x=\frac{5\cdot4}{10}\Rightarrow x=2$$

$$2)\ \frac{3}{x}=\frac{9}{12}\Rightarrow x=\frac{3\cdot12}{9}\Rightarrow x=4$$

$$3)\ \frac{5}{8}=\frac{x}{40}\Rightarrow x=\frac{5\cdot40}{8}\Rightarrow x=25$$

$$4)\ \frac{7}{12}=\frac{14}{x}\Rightarrow x=\frac{12\cdot14}{7}\Rightarrow x=24$$

وسط هندسی: هرگاه در تناسب طرفین یا وسطین باهم مساوی و مجهول باشد، جز مجهول را به نام وسط هندسی یاد می‌نمایند، که می‌توان از جذرالمربع حاصل ضرب اجزای معلوم آن را دریافت نماییم، یعنی:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}\Rightarrow\frac{x}{a}=\frac{b}{x}\Rightarrow x=\sqrt{a\cdot b}$$

مثال‌ها:

$$1)\ \frac{2}{x}=\frac{x}{8}\Rightarrow x=\sqrt{2\cdot8}\Rightarrow x=\sqrt{16}\Rightarrow x=4$$

$$2)\ \frac{x}{20}=\frac{5}{x}\Rightarrow x=\sqrt{20\cdot5}\Rightarrow x=\sqrt{100}\Rightarrow x=10$$

وسط حسابی: وسط یا اوسط حسابی چندین مقدار عبارت از حاصل جمع مقدارها تقسیم بر تعداد آن‌ها می‌باشد.

$$x=\frac{a_1+a_2+a_3+\dots\dots+a_n}{n}$$

مثال:

یک شاگرد در مضامین ساینسی خویش از روی نمره (100) نمرات ذیل را اخذ نموده است، اوسط نمرات مذکور را دریابید:

مضامین	الجبر	مثلثات	هندسه	فزیک	کیمیا	بیولوژی
نمرات	75	90	73	80	92	100

$$a_1=75, a_2=90, a_3=73, a_4=80, a_5=92, a_6=100$$

$$x=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6}=\frac{75+90+73+80+92+100}{6}$$

$$x=\frac{510}{6}=85$$

انواع تناسب (Kind of Proportion)

روابط بین ازدیاد و یا کاهش کمیت‌ها توسط انواع تناسب مشخص می‌گردد. به طور عموم تناسب دو نوع است: مستقیم و معکوس

۱. تناسب مستقیم (Direct Proportion): هرگاه رابطه بین دو کمیت طوری باشد که با ازدیاد کمیت اول، کمیت دوم نیز افزایش نماید و برعکس با کم شدن کمیت اول، کمیت دوم نیز کاهش یابد، چنین رابطه مستقیم بین کمیت‌ها را تناسب مستقیم می‌نامند، مثلاً رابطه بین تعداد اجناس و قیمت آن، رابطه بین حرارت و حجم، رابطه بین سرعت و فاصله طی شده و غیره نمونه‌های از تناسب مستقیم می‌باشند.

مثال‌ها:

۱) قیمت 12 قرص نان 60 افغانی است، قیمت 50 قرص آن چند می‌گردد؟

قیمت نان	تعداد قرص نان
زیاد 60 ↓ x	زیاد 12 ↓ 50

$$\Rightarrow \frac{12}{50}=\frac{60}{x}$$
$$x=\frac{50\cdot 60}{12}=50\cdot 5=250$$

۲) حق‌الزحمه 18 ساعت تدریس یک استاد مبلغ (4500) افغانی می‌گردد، مبلغ 8750 (افغانی) حق‌الزحمه چند ساعت درسی وی می‌گردد.

حق‌الزحمه	ساعت تدریس
زیاد 4500 ↓ 8750	زیاد 18 ↓ x

$$\Rightarrow \frac{18}{x}=\frac{4500}{8750}\Rightarrow x=\frac{18\cdot 8750}{4500}$$
$$x=\frac{157500}{4500}=35$$

۳) شخصی فاصله 2500 کیلومتر را به وسیله بایسکل در 20 روز طی نموده، شخص مذکور فاصله 1500 کیلومتر را به همان سرعت به وسیله بایسکل در چند روز طی خواهد کرد.

روز	فاصله
کم 20 ↓ x	کم $2500km$ ↓ $1500km$

$$\Rightarrow \frac{2500}{1500}=\frac{20}{x}$$
$$x=\frac{1500\cdot 20}{2500}=\frac{30000}{2500}=12$$

۲. تناسب معکوس یا غیر مستقیم (Indircet Proportion): هرگاه رابطه بین دو کمیت طوری باشد که با افزایش کمیت اول، کمیت دوم کاهش یابد و یا برعکس با کاهش کمیت اول، کمیت دوم ازدیاد یابد، چنین رابطه بین دو کمیت را تناسب معکوس (غیر مستقیم) یاد می‌نمایند، مثلاً رابطه عرضه و تقاضا در علم اقتصاد یعنی با افزایش عرضه جنس، بازار مشبوع گردیده و تقاضا (خریدار) کم می‌گردد و برعکس با کمبود جنس تقاضا بیشتر خواهد گردید. از همین سبب است که محتکرین جنس را به قیمت پایین از بازار جمع‌آوری نموده و گدام می‌نمایند و بعد از مدت زمانی تقاضای بازار زیاد گردیده دوباره جنس را به قیمت بلند به تدریج در بازار عرضه می‌نمایند.

مثال‌ها:

۱) 10 نفر رنگمال یک تعمیر را در (21) روز رنگمالی می‌نمایند، آیا 7 نفر رنگمال، همان کار را در چند نفر تمام خواهند نمود؟

روز	تعداد رنگمال
زیاد 21 ↑ x	کم 10 ↓ 7

$$\Rightarrow \frac{10}{7}=\frac{x}{21}\Rightarrow x=\frac{10\cdot 21}{7}$$
$$x=10\cdot 3=30\Rightarrow x=30$$

۲) یک موتر به سرعت $50\frac{km}{h}$ فاصله کابل الی جلال آباد را در 3 ساعت طی می‌نماید. اگر سرعت موتر به $90\frac{km}{sec}$ افزایش یابد همین فاصله را در چند ساعت طی خواهد کرد؟

زمان	سرعت
کم $3h$ ↓ x	زیاد $50\frac{km}{h}$ ↑ $90\frac{km}{h}$

$$\Rightarrow \frac{50}{90}=\frac{x}{3}\Rightarrow x=\frac{50\cdot 3}{90}$$
$$x=\frac{5}{3}=(1,\bar{6})h$$

تناسب مرکب (Compound Proportion)

تناسب مرکب عبارت از مساوی بودن دو نسبت که اقلاً یکی از نسبت‌های مذکور مرکب باشد است، مثلاً:

$$\frac{6}{11}\cdot\frac{7}{9}=\frac{2}{11}\cdot\frac{7}{3}$$

یا

$$\frac{5}{12}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{9}$$

جهت تحلیل و دریافت جز مجهول در تناسب مرکب جوره‌های از کمیت‌های همجنس را در ستون‌های جداگانه ترتیب نموده، هریک از جوره‌ها را با جورهٔ که دارای جز مجهول است مقایسه نموده، نوعیت تناسب آن را تشخیص می‌نماییم و با تشکیل تناسب عمومی برای تمام اجزای معلوم می‌توان جز مجهول را به ساده‌گی دریافت نمود.

مثال‌ها:

۱) سه تراکتور 120 هکتار زمین را در 32 ساعت قلبه می‌نمایند. پنج عراده تراکتور 210 هکتار زمین را در چند ساعت قلبه خواهند نمود.

حل:

ساعت کار	مساحت زمین	تراکتور
32	120	3
X	210	5

ساعت کار	تراکتور
32 ↑ کم	3 ↓ زیاد
x	5

$$\Rightarrow \frac{3}{5}=\frac{x}{32}$$ .... (تناسب معکوس)

ساعت کار	مساحت زمین
32 ↓ زیاد	120 ↓ زیاد
x	210

$$\Rightarrow \frac{120}{210}=\frac{32}{x}$$ .... (تناسب مستقیم)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3}{5}=\frac{x}{32}\\ \frac{120}{210}=\frac{32}{x}\end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{3\cdot32\cdot210}{5\cdot120}\Rightarrow x=33,6$$

$$x=33,6$$

۲) 10 نفر کارگر روزانه 9 ساعت کار نموده و یک کار را در 25 روز تمام می‌نمایند، آیا 15 نفر کارگر روزانه 6 ساعت کار نمایند، همان کار را در چند روز به اتمام خواهند رسانید.

حل:

روز کار	ساعت کار	تعداد کارگر
25	9	10
X	6	15

روز کار	تعداد کارگر
25 ↓ کم	10 ↑ زیاد
x	15

$$\Rightarrow \frac{10}{15}=\frac{x}{25}$$ .... (تناسب معکوس)

روز کار	ساعت کار
25 ↓ زیاد	9 ↑ کم
x	6

$$\Rightarrow \frac{8}{6}=\frac{x}{25}$$ .... (تناسب معکوس)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{10}{15}=\frac{x}{25}\\ \frac{9}{6}=\frac{x}{25}\end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{10\cdot25\cdot9}{15\cdot6}=25$$

$$\Rightarrow x=25$$

۳) 12 نفر دهقان گندم 200 جریب زمین را با کار روزانه 5 ساعت در 8 روز درو می‌نمایند، آیا 10 نفر دهقان گندم 300 جریب زمین را با کار روزانه 6 ساعت در چند روز درو خواهند نمود؟

حل:

روز کار	ساعت کار	مساحت زمین	تعداد دهاقین
8	5	200	12
x	6	300	10

روز کار	تعداد دهاقین
8	12
x	10
زیاد ↓	کم ↑

$\Rightarrow \frac{12}{10}=\frac{x}{8}$....... (تناسب معکوس)

روز کار	مساحت زمین
8	200
x	300
زیاد ↓	زیاد ↑

$\Rightarrow \frac{200}{300}=\frac{8}{x}$....... (تناسب مستقیم)

روز کار	ساعت کار
8	5
x	6
کم ↓	زیاد ↑

$\Rightarrow \frac{5}{6}=\frac{x}{8}$....... (تناسب معکوس)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{12}{10}=\frac{x}{8}\\ \frac{200}{300}=\frac{8}{x}\\ \frac{5}{6}=\frac{x}{8}\end{array}\right\} \quad x=\frac{12\cdot 8\cdot 300\cdot 5}{10\cdot 200\cdot 6}=12 \quad x=12$$

احدیت (Unitory)

در اکثر محاسبات و معاملات تجارتی و حیات روزمره لازم است تا یک واحد اجناس یعنی فی جز یا حد آن مشخص گردد که به وسیله آن می‌توان آنچه در یک تناسب مجهول باشد، دریافت نمود.

مثال‌ها:

۱) مزد 12 نفر کارگر مبلغ 4200 افغانی می‌گردد، مزد فی نفر چند افغانی خواهد بود:

$$\begin{array}{r|l} 4200 & 12 \\ \underline{36} & 350 \\ 60 & \\ \underline{60} & \\ 0 & \end{array}$$

پس مزد فی نفر مبلغ (350) افغانی می‌گردد.

۲) به مبلغ (500) افغانی (20) جلد کتابچه خریداری گردیده است، تعداد 35 جلد آن چند افغانی می‌گردد:

$$\begin{array}{r|l} 500 & 12 \\ \underline{40} & 25 \\ 100 & \\ \underline{100} & \\ 0 & \end{array}$$

پس فی جلد کتابچه مبلغ (25) افغانی می‌گردد.

پس $35\times 25=875$

۳) 20 نفر یک کار را در 5 روز تمام می‌نمایند، 25 نفر همان کار را در چند روز انجام خواهند داد؟

حل: اگر کار مذکور را یک نفر انجام بدهد (روز $20\times 5=100$) ضرورت است پس:

$$\begin{array}{r|l} 100 & 25 \\ \underline{100} & 4 \\ 0 & \end{array}$$

در نتیجه 4 روز لازم است تا بتوانند (25) نفر همان کار را انجام دهند.

فیصد (Percent)

یکی از جمله مسایل عمده در علم حساب و محاسبه فیصد (درصد) بوده که در حیات روزمره، عرضه‌های بانکی، تجارتی، گمرکی و علوم اجتماعی و طبیعی موارد استعمال زیاد دارد. فیصد عبارت از محاسبه کردن و سنجش کردن از روی عدد (100) می‌باشد یعنی در واقعیت فیصد یک حالت خاصی از کسر است که مخرج آن عدد (100) می‌باشد که به علامه (%) ارائه می‌گردد.

در مسایل محاسبه فیصد به سه کمیت عمده مواجه می‌گردیم، که عبارت اند از:

۱- اساس (Buse): عبارت از کمیت اصلی یا سرمایه بوده که فیصدی آن بوجود می‌آید، که می‌توان آن را مقدار کل نیز نامید.

۲-فیصدی (Percentage): عبارت از یک کمیت فرعی بوده که به وسیله آن نفع یا نقص یک معامله تعیین می‌گردد.

۳-نرخ (Rate): عبارت از رابطه بین کمیت اصلی (سرمایه) و کمیت فرعی (نفع یا نقص) بوده که براساس فیصد تنظیم می‌گردد.

مثال‌ها:

مثال ۱): مفاد سرمایه (52000) افغانی از قرار نرخ 15% چند می‌گردد.

$$15\% \Rightarrow \begin{matrix} 100 & 15 \\ 52000 & x \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{52000 \cdot 15}{100}$$

$$x = 520 \cdot 15 = 7800 \Rightarrow x = 7800$$

مثال ۲): از کدام سرمایه به نرخ 17% مبلغ (59500) افغانی مفاد به دست می‌آید.

$$17\% \Rightarrow \begin{matrix} 100 & 17 \\ x & 59500 \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 59500}{17} = 350000$$

مثال ۳): به کدام نرخ از سرمایه (80000) افغانی مبلغ (9600) نفع به دست می‌آید:

$$\Rightarrow \begin{matrix} 80000 & 9600 \\ 100 & x \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 9600}{80000} = 12$$

ذکات

طوریکه از علوم اسلامی می‌دانیم ذکات دارایی‌های نقدی تحت شرایط معین از هر چهل درهم یک درهم (واحد پول مروج همان زمان) محاسبه گردیده است که برای فعلاً نیز عین نسبت بر اساس چهل افغانی یک افغانی و یا به اساس محاسبه فیصدی قرار ذیل می‌باشد:

$$\frac{\text{نرخ}}{100} = \frac{1}{40} \Rightarrow \frac{r}{100} = \frac{1}{4} \Rightarrow r = \frac{100}{4} = 2{,}5\%$$

پس مقدار ذکات یک سرمایه 2,5% قابل محاسبه و پرداخت برای مستحقین می‌باشد.

مثال:

شخصی مبلغ (2500000) افغانی سرمایه نقد دارد، ذکات شخص مذکور را محاسبه نمایید.

$$2{,}5\% \Rightarrow \begin{matrix} 100 & 2{,}5 \\ 2500000 & x \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{2500000 \cdot 2{,}5}{100} = 62500$$

تخفیف (Discount)

یکی از مسایل مربوط تجارت جهت جلب مشتری و تسریع فروشات در بازار، جنسی را از قیمت اصلی و یا از نفع آن پایین‌تر به فروش می‌رسانند که این عملیه را تخفیف یاد می‌نمایند، که محاسبه تخفیف، مقدار تخفیف و قیمت خرید بعد از تخفیف همه به وسیله فیصد صورت می‌گیرد.

مثال‌ها:

۱) جنسی با ارزش 5000 افغانی با درنظرداشت (18%) تخفیف به چند افغانی خریداری می‌گردد؟

$$18\% \Rightarrow \begin{matrix} 100 & 18 \\ 5000 & x \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{5000 \cdot 18}{100}$$

مقدار تخفیف $x = 900$

قیمت خرید جنس $5000 - 900 = 4100$

۲) جنسی با ارزش (25000) افغانی با در نظرداشت چند فیصد تخفیف به مبلغ 21000 به پول نقد خریداری می‌گردد.

$$25000 - 21000 = 4000$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 25000 & 4000 \\ 100 & x \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 4000}{250000} = 16\%$$

۳) جنسی بادرنظرداشت 12% تخفیف در برابر پول نقد به مبلغ (17600) افغانی به فروش رسیده است، قیمت اصل جنس را دریافت نمایید.

$$\Rightarrow 100\% - 12\% = 88\%$$

$$88\% \Rightarrow 100 \qquad 88$$

$$x \qquad 17600$$

$$\Rightarrow x = \frac{100 \cdot 17600}{88}$$

$$x = 20000$$

ربح (Interest)

سود یا فایده و یا مفادی که از یک سرمایه به دست می‌آید که یکی از مسایل دیگر علم حساب یا محاسبه است ربح می‌باشد، که از نگاه نوعیت خویش به دو نوع است: ربح ساده و ربح مرکب.

ربح ساده (Simple Interest): سود (فایده) که از یک سرمایه در یک مدت همین به یک نرخ به قرار فیصدی حاصل می‌گردد، ربح ساده یاد می‌گردد:

هرگاه سرمایه به b، نرخ به r و زمان به t نشان داده شود و از جانبی نفع یک دور معین زمانی P بوده طوریکه ربح آن $I = t.p$ باشد، پس داریم که:

$$\frac{p}{b} = \frac{r}{100} \Rightarrow \frac{p \times t}{b} = \frac{r \times t}{100} \Rightarrow \frac{I}{b} = \frac{r \times t}{100} \Rightarrow I = \frac{b \times r \times t}{100}$$

با درنظرداشت رابطهٔ اخیر می‌توان جهت دریافت سرمایه یا نرخ و یا مدت چنین نوشت:

$$b = \frac{I \times 100}{r \times t} \text{ .... (سرمایه)}$$

$$r = \frac{I \times 100}{b \times t} \text{ .... (نرخ)}$$

$$t = \frac{I \times 100}{b \times r} \text{ .... (مدت)}$$

به خاطر داشته باشید در ربح نرخ از جنس فیصد و مدت از جنس سال محاسبه می‌گردد، در صورتیکه مدت از جنس ماه یا روز باشد در محاسبات تجارت چنین درنظر گرفته می‌شود:

$$\text{ماه } 1 = \frac{\text{سال}}{12} \qquad \text{سال } 1 = 12 \text{ ماه}$$

$$\text{روز } 1 = \frac{\text{سال}}{360} \qquad \text{ماه } 1 = 30 \text{ روز}, \quad \text{سال } 1 = 360 \text{ روز}$$

مثال‌ها:

۱) از سرمایه (50000) افغانی به نرخ 12% در مدت 4 سال به ربح بسیط (ساده) چند نفع به دست می‌آید:

$$b = 50000, \quad r = 12\%, \quad t = 4 \text{ سال}, \quad I = ?$$

$$\Rightarrow I = \frac{b \times r \times t}{100}$$

$$I = \frac{50000 \times 12 \times 4}{100} = 24000$$

۲) از سرمایه (720000) افغانی در مدت 2 سال و 3 ماه و 10 روز به نرخ 8% به ربح ساده چند نفع به دست می‌آید.

$$b = 720000$$

$$r = 8\%$$

$$t = 2 \text{ سال} + 3 \text{ ماه} + 10 \text{ روز}$$

$$t = (2 \cdot 360 + 3 \cdot 30 + 10)$$

$$t = (720 + 90 + 10)$$

$$t = (820) \Rightarrow t = \frac{820}{360} \text{ سال}$$

$$I = ?$$

$$\Rightarrow I = \frac{b \times r \times t}{100}$$

$$I = \frac{720000 \times 8 \times \frac{820}{360}}{100}$$

$$I = 7200 \times 8 \times \frac{82}{36}$$

$$I = 200 \times 8 \times 82$$

$$I = 131200$$

۳) از کدام سرمایه در مدت 3 سال و 2 ماه به نرخ 10% مبلغ (95000) افغانی مفاد به ربح بسیط حاصل می‌گردد.

$r = 10\%$
$I = 95000$
$t = 3$ سال $+2$ ماه
$t = (3\cdot 12 + 2)$ ماه
$t = 38$ ماه
$t = \frac{38}{12}$ سال
$b = ?$

$$b = \frac{I\times 100}{r\times t} = \frac{95000\times 100}{10\times\frac{38}{12}}$$

$$b = \frac{950000}{\frac{19}{6}} = \frac{950000\times 6}{19}$$

$b = 50000\times 6 = (300000)$ افغانی

۴) به کدام نرخ در ربح بسیط (ساده) به مدت 5 سال سرمایه (20000) دالر مبلغ (25000) دالر می‌گردد.

$b = 20000$
$t = 5$ سال
$I = 25000 - 20000$
$I = 5000$
$r = ?$

$$r = \frac{I\times 100}{b\times t} = \frac{5000\times 100}{20000\times 5} = 5$$

$r = 5\%$

۵) در چه مدت از سرمایه (120000) افغانی به نرخ 25% به ربح بسیط مبلغ (120000) افغانی مفاد به دست می‌آید.

$b = 120000$
$r = 25\%$
$I = 120000$
$t = ?$

$$t = \frac{I\times 100}{r\times b} = \frac{120000\times 100}{120000\times 25} = 4$$

$t = 4$ سال

۶) در چه مدت یک سرمایه به نرخ 20% پنج چند خودش می‌گردد.

$r = 20\%$
سرمایه بعدی $= 5$ (سرمایه اولی) $\Rightarrow b' = 5b$
$I = 5b - b$
$I = 4b$
$t = ?$

$$\Rightarrow t = \frac{I\times 100}{b\times r}$$

$$t = \frac{4b\times 100}{b\times 20}$$

$t = 4\times 5$

$t = 20$ سال

تنزیل (Depreciation)

تنزیل عبارت از کاهش قیمت اجناس در اثر استعمال می‌باشد که معمولاً ماشین آلات یک مدت معین استهلاک را دارا می‌باشند که قیمت آن بعد از دوره‌های معین از جنس فیصد پایین می‌گردد.

تنزیل مشابهت خاص با ربح بسیط داشته با فرق این که در ربح سرمایه رشد می‌نماید و در تنزیل سرمایه مربوط آن کاهش می‌یابد. بناءً اگر در فورمول‌های ربح بسیط به عوض مفاد (I)، کمیت تنزیل (d) وضع گردد، پس داریم که:

$$d = \frac{b\times r\times t}{100}$$

با درنظرداشت رابطه اخیر می‌توان جهت دریافت سرمایه، نرخ و یا مدت چنین نوشت:

$b = \frac{d\times 100}{r\times t}$ .... (سرمایه)

$r = \frac{d\times 100}{b\times t}$ .... (نرخ)

$t = \frac{d\times 100}{b\times r}$ .... (مدت)

مثال‌ها:

مثال ۱): جنسی با ارزش (120000) افغانی خریداری گردیده اگر دوره

استهلاک آن 5 سال و فیصدی تنزیل آن 10% باشد، مقدار تنزیل مذکور را دریابید:

$$\left.\begin{array}{l} b=120000 \\ t=5 \text{ سال} \\ r=10\% \\ d=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} d=\dfrac{b\times r\times t}{100}=\dfrac{120000\times 10\times 5}{100} \\ d=60000 \text{ افغانی} \end{array}$$

مثال ۲): موتری به ارزش (16000) دالر دارای دوره استهلاکی 10 ساله می‌باشد، اگر بعداز ختم مدت مذکور قیمت موتر مذکور (10000) دالر تقلیل یابد تنزیل موتر مذکور سالانه چند فیصد خواهد بود؟

$$\left.\begin{array}{l} b=16000 \\ t=10 \\ d=16000-10000=6000 \\ r=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} r=\dfrac{d\times 100}{b\times t}=\dfrac{6000\times 100}{16000\times 10} \\ r=\dfrac{60}{16}=3,75\% \end{array}$$

مثال ۳): ماشین رخت شویی دارای ارزش (25000) افغانی بوده، در صورتیکه فیصدی تنزیل آن سالانه 12% و مقدار تنزیل مذکور بعد از ختم همان مدت (15000) گردیده باشد، دوره استهلاک آن را دریافت نمایید.

$$\left.\begin{array}{l} b=25000 \\ d=15000 \\ r=12\% \\ t=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} t=\dfrac{d\times 100}{b\times r}=\dfrac{15000\times 100}{25000\times 12}=5 \\ t=5 \text{ سال} \end{array}$$

ربح مرکب (Compound Intrest)

هرگاه مفاد یک سرمایه در مدت معین به شکل دوره‌یی به اصل سرمایه علاوه گردد و به حیث سرمایه جدید برای دور بعدی و این پروسه برای دوره‌های بعدی ادامه پیدا نماید، ربح مرکب نامیده می‌شود.

در صورتیکه P سرمایه اولی، r نرخ از جنس فیصد، n مدت از جنس سال، S سرمایه بعدی و I مفاد (ربح) را نشان دهد، پس ربح مرکب از فورمول ذیل به دست می‌آید:

$$S=p(1+r)^n$$
$$\Rightarrow I=S-p$$

مثال‌ها:

مثال ۱): مبلغ (50000) دالر به نرخ 10% در مدت 3 سال به ربح مرکب چند نفع خواهد کرد؟

$$\left.\begin{array}{l} P=50000 \\ r=10\% \\ n=3 \\ S=? \\ I=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S=p(1+r)^n=50000\,(1+\dfrac{10}{100})^3 \\ S=50000\,(\dfrac{11}{10})^3 \\ S=50000\cdot\dfrac{1331}{1000}=50\cdot 1331 \\ S=66550 \end{array}$$

$$\Rightarrow I=S-p=66550-50000$$
$$\Rightarrow I=16550$$

مثال ۲): مبلغ (253840) افغانی به نرخ 6% در مدت 2 سال به ربح مرکب چند می‌گردد؟

$$\left.\begin{array}{l} p=253840 \\ r=6\% \\ n=2 \\ S=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S=p(1+r)^n \\ S=253840(1+\dfrac{6}{100})^2 \\ S=253840\,(\dfrac{106}{100})^2 \\ S=253840\cdot\dfrac{11236}{10000} \\ S=285214,624\approx 285214,6 \end{array}$$

تیوری ست (Theory of Set)

یکی از موضوعات اساسی ریاضی معاصر عبارت از تیوری ست بوده که بسا موضوعات اساسی ریاضیات به وسیله آن قابل تحلیل و بررسی می‌باشد. که به طور خلاصه تذکر آن را در این فصل مهم می‌دانیم.

ست (Set): نظریه ست در سال‌های (1918- 1845 میلادی) توسط عالمی به نام جارج کانتور (G.Cantor) در علم ریاضیات معرفی گردید. گرچه کلمه ست (Set) کدام تعریف دقیق نداشته، لیکن به معنی "مجموعه اشیا" تعبیر و تفسیر گردیده است، که می‌تواند این مجموعه، مشابه و یا غیر مشابه باشد، مانند ست شاگردان صنف دوازدهم الف، ست تمام حروف الفبای پشتو، ست چوکی‌ها، ست چای، ست نان‌خوری، ست قاشق و پنجه، ...

ست عموماً به وسیله علامه { } نشان داده شده و به حروف بزرگ انگلیسی مانند A، B، C، ... ارائه می‌گردد، مثلاً ست ارقام در ریاضی عبارت از:

$$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

می‌توان یک ست را به وسیله اشکال هندسی و یا غیر هندسی بسته نیز ارائه نمود که این طرز ارائه توسط دیاگرام که به نام (ون دیاگرام) نیز یاد می‌گردد (که توسط ریاضی‌دان انگلیسی John Venn ارائه گردیده است)، نمایش‌داده می‌شود.

عناصر یک ست (Elements of a Set): هر آن اشیای که در داخل یک ست باشد، به نام عناصر همان ست نامیده می‌شود و به علامه (∈) نمایش داده می‌شود، مثلاً ست B دارای عناصر ذیل است: $B=\{1,3,5,7,9\}$

پس می‌توان نوشت:

$1\in B, 3\in B, 5\in B, 7\in B, 9\in B$

اما $2\notin B, 4\notin B, 6\notin B, 8\notin B$

ست خالی: بعضی اوقات ما به مفکوره ستی که دارای هیچ عنصر نمی‌باشد، مواجه می‌گردیم، این نوع ست را ست خالی می‌نامند که چنین ارائه می‌گردد.

$$A=\{\quad\}\Rightarrow A=\phi$$

تشخیص یک ست: یک ست به اساس عناصر مربوط آن به دو طریقه تشخیص می‌گردد:

۱- به طریقه لست کردن تمام عناصر مشترک آن

۲- به طریقه توضیح خواص مشترک آنها

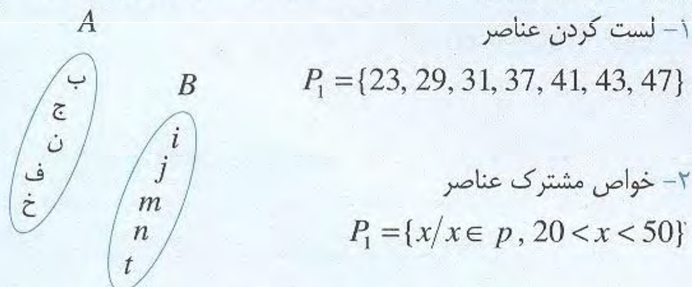
مثال: اگر ست اعداد اولیهٔ که بزرگتر از 20 و کوچکتر از 50 باشد به P_1 نمایش بدهیم پس می‌توان ست مذکور را به دو طریقه فوق چنین نمایش داد:

۱- لست کردن عناصر

$$P_1=\{23,29,31,37,41,43,47\}$$

۲- خواص مشترک عناصر

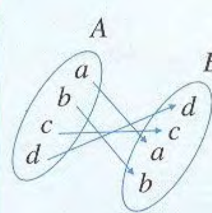
$$P_1=\{x/x\in p, 20<x<50\}$$



ست‌های معادل: به ست‌های گفته می‌شود که فقط تعداد عناصر شان باهم مساوی باشد، مثلاً دو ست A و B قرار دیاگرام ذیل داده شده است: طوریکه ملاحظه می‌گردد هردو ست A و B دارای پنج عنصر می‌باشد، در حالیکه عناصر ست‌های مذکور عین چیز نیست، بناً گفته می‌شود که ست A و B باهم معادل اند. یعنی: $A\cong B$

ست‌های مساوی: دو ست A و B باهم مساوی گفته می‌شوند در صورتیکه هردو ست دارای عین عناصر باشند، مثلاً اگر دو ست $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{a,d,c,b\}$ باشد طوریکه ملاحظه می‌گردد،

هر ست دارای عین عناصر می‌باشند پس می‌توان گفت که ست A و B باهم مساوی اند. $A = B$



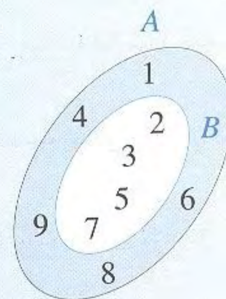
گفتنی است اینکه هر دو ست مساوی باهم معادل اند، زیرا تعداد عناصر شان نیز باهم مساوی اند، اما هردو ست معادل باهم مساوی نیستند، زیرا دارای عین عناصر نمی‌باشند.

ست فرعی (Subset): دو ست A و B را در نظر گرفته هرگاه تمام عناصر ست B شامل ست A باشد، ست B را به نام ست فرعی ست A می‌نامند و چنین نمایش داده می‌شود $B \subseteq A$

مثال‌ها:

مثال ۱): شاگردان صنف دوازدهم الف یک ست فرعی از لیسه عالی غازی امان الله خان می‌باشد.

مثال ۲): هرگاه A ست اعداد یک رقمی $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ و B ست اعداد یک رقمی اولیه $B = \{2,3,5,7\}$ باشد، چون تمام عناصر ست B در ست A شامل می‌باشد. پس $B \subseteq A$ است، که به شکل دیاگرام ون چنین نمایش داده می‌شود:



به خاطر داشته باشید که یک ست فرعی مانند ست B زمانی ست فرعی مناسب یا خاص (Propr Subset) ست مانند A نامیده می‌شود که $B \subseteq A$ و $A \neq B$ باشد.

مثال: دو ست $A = \{5,15,25,35,45\}$ و $B = \{5,25,45\}$ را در نظر گرفته، چون $B \subseteq A$ و $B \neq A$ است پس ست B یک ست فرعی مناسب ست A نامیده می‌شود، در حالیکه $D = \{45,5,35,15,25\}$ را در نظر گرفته چون $D \subseteq A$ و $D = A$ پس ست D ست فرعی مناسب ست A نیست.

یادداشت:

۱- هر ست، ست فرعی خودش می‌باشد، یعنی: $A \subseteq A$

۲- ست خالی، ست فرعی هر ست می‌باشد، یعنی: $\phi \subseteq A$

۳- هرگاه A و B ست‌های فرعی یکدیگر باشند، پس:

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$$

۴- تعداد ست‌های فرعی یک ست که دارای n عناصر باشد عبارت از 2^n است، مثال:

مثال: ست A را در نظر گرفته، ست‌های فرعی آن را تعیین نمایید:

$A = \{\theta, 5, m\}$	$A_5 = \{\theta, m\}$
$A_1 = \{\theta\}$	$A_6 = \{5, m\}$
$A_2 = \{5\}$	$A_7 = \{\theta, 5, m\}$
$A_3 = \{m\}$	$A_8 = \{\ \}$
$A_4 = \{\theta, 5\}$	

پس طوریکه ملاحظه می‌گردد:

$n = 3 \Rightarrow$ تعداد ست‌های فرعی $= 2^n = 2^3 = 8$

مکمله یک ست (The Complement of a Set): اگر B یک ست فرعی ست A باشد، مکمله ست B در ست A عبارت از آن عناصر ست A است که شامل ست B نمی‌باشند و به شکل B' یا C_A^B نشان داده می‌شود.

مثال: هرگاه:

$$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$
$$B=\{2,3,5,7,11\}$$

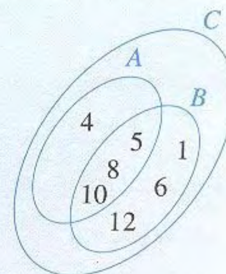
چون $B \subseteq A$ است، پس مکمله B نظر به A عبارت از:

$$B'=C_A^B=\{1,4,6,8,9,10,12\}$$

اتحاد ست‌ها (Union of Sets)

اتحاد دو یا چندین ست عبارت از ستی است که تمام عناصر ست‌های مذکور را در بر داشته باشد و به علامه $(\bigcup)$ نمایش داده می‌شود.

مثال: اگر $A=\{5,10,8,4\}$ و $B=\{1,5,6,8,10,12\}$ باشد پس اتحاد ست‌های مذکور عبارت از: $C=A\bigcup B=\{1,4,5,6,8,10,12\}$



یادداشت:

۱- اتحاد هر ست با ست خالی عبارت از خود همان ست است، یعنی:

$$A\bigcup\phi=A$$

۲- اتحاد هر ست با خودش عبارت از خود همان ست است، یعنی:

$$A\bigcup A=A$$

۳- اتحاد ست‌ها خاصیت تبدیلی را صدق می‌نمایند، یعنی:

$$A\bigcup B=B\bigcup A$$

۴- اتحاد ست‌ها خاصیت اتحادی را صدق می‌نمایند، یعنی:

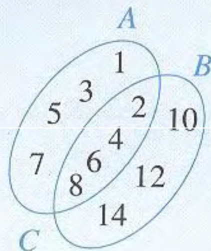
$$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$$

تقاطع ست‌ها (Intersection of Sets)

تقاطع دو و یا چندین ست عبارت از ستی است که عناصر آن عبارت از عناصر مشترک ست‌های مذکور باشد و به علامه $(\bigcap)$ نمایش داده می‌شود.

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ و $B=\{2,4,6,8,10,12,14\}$ باشد. پس تقاطع ست‌های مذکور عبارت است از:

$$C=A\bigcap B=\{2,4,6,8\}$$



یادداشت:

۱- تقاطع هر ست با ست خالی عبارت از ست خالی است. یعنی:

$$A\bigcap\phi=\phi$$

۲- تقاطع هر ست با خودش عبارت از خود همان ست است. یعنی:

$$A\bigcap A=A$$

۳- تقاطع ست‌ها خاصیت تبدیلی را صدق می‌نمایند. یعنی:

$$A\bigcap B=B\bigcap A$$

۴- تقاطع ست‌ها خاصیت اتحادی را صدق می‌نمایند. یعنی:

$$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$$

به همین ترتیب ست‌ها خاصیت توزیعی اتحـاد بـالای تقـاطع و همچنـان تقاطع بالای اتحاد را صدق می‌نمایند. یعنی:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

مثال: ست‌های $A=\{1,3,5,4\}$ ، $B=\{1,2,4,3\}$ و $C=\{2,4,6\}$ را در نظر گرفته تمام خواص اتحاد و تقاطع را بالای آنها تطبیق نمایند.

حل: اولاً خواص اتحاد ست‌ها را قرار ذیل تطبیق می‌نماییم:

1) $A\cup\phi=\{1,3,5,4\}\cup\{\quad\}=\{1,3,5,4\}=A$

2) $A\cup A=\{1,3,5,4\}\cup\{1,3,5,4\}=\{1,3,5,4\}=A$

3) $A\cup B=\{1,3,5,4\}\cup\{1,2,4,3\}=\{1,2,3,4,5\}$
$B\cup A=\{1,2,4,3\}\cup\{1,3,5,4\}=\{1,2,3,4,5\}$
$\Rightarrow A\cup B=B\cup A=\{1,2,3,4,5\}$ خاصیت تبدیلی ....

4) $(A\cup B)\cup C=(\{1,3,5,4\}\cup\{1,2,4,3\})\cup\{2,4,6\}$
$=\{1,2,3,4,5\}\cup\{2,4,6\}=\{1,2,3,4,5,6\}$
$A\cup(B\cup C)=\{1,3,5,4\}\cup(\{1,2,4,3\}\cup\{2,4,6\})$
$=\{1,3,5,4\}\cup\{1,2,3,4,6\}=\{1,2,3,4,5,6\}$
$\Rightarrow(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=\{1,2,3,4,5,6\}$ خاصیت اتحادی ....

ثانیاً خواص تقاطع ست‌ها را قرار ذیل تطبیق می‌نمایم:

1) $A\cap\phi=\{1,3,5,4\}\cap\{\quad\}=\{\quad\}=\phi$

2) $A\cap A=\{1,3,5,4\}\cap\{1,3,5,4\}=\{1,3,5,4\}=A$

3) $A\cap B=\{1,3,5,4\}\cap\{1,2,4,3\}=\{1,3,4\}$
$B\cap A=\{1,2,4,3\}\cap\{1,3,5,4\}=\{1,3,4\}$
$\Rightarrow A\cap B=B\cap A=\{1,3,4\}$ خاصیت تبدیلی ....

4) $(A\cap B)\cap C=(\{1,3,5,4\}\cap\{1,2,4,3\})\cap\{2,4,6\}$
$=\{1,3,4\}\cap\{2,4,6\}=\{4\}$
$A\cap(B\cap C)=\{1,3,5,4\}\cap(\{1,2,4,3\}\cap\{2,4,6\})$
$=\{1,3,5,4\}\cap\{2,4,\}=\{4\}$
$\Rightarrow(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ خاصیت اتحادی ....

حالا خواص توزیع را بالای اتحاد و تقاطع مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

1) $A\cup(B\cap C)=\{1,3,5,4\}\cup(\{1,2,4,3\}\cap\{2,4,6\})$
$=\{1,3,5,4\}\cup\{2,4\}=\{1,2,3,4,5\}$
$(A\cup B)\cap(A\cup C)=(\{1,3,5,4\}\cup\{1,2,4,3\})$
$\cap(\{1,3,5,4\}\cup\{2,4,6\})$
$=\{1,2,3,4,5\}\cap\{1,2,3,4,5,6\}=\{1,2,3,4,5\}$
$\Rightarrow A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1,2,3,4,5\}$ خاصیت توزیعی ...

2) $A\cap(B\cup C)=\{1,3,5,4\}\cap(\{1,2,4,3\}\cup\{2,4,6\})$
$=\{1,3,5,4\}\cap\{1,2,3,4,6\}=\{1,3,4\}$
$(A\cap B)\cup(A\cap C)=(\{1,3,5,4\}\cap\{1,2,4,3\})$
$\cup(\{1,3,5,4\}\cap\{2,4,6\})$
$=\{1,3,4\}\cup\{4\}=\{1,3,4\}$
$\Rightarrow A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{1,3,4\}$ خاصیت توزیعی......

تفاضل دو ست

دو ست A و B را در نظر گرفته تفاضل ست‌هـای مـذکور طـوری ذیـل تعریف گردیده است:

۱) A/B عبارت از ستی است طوریکه عناصر آن در ست A باشـد و در ست B نباشد.

۲) B/A عبارت از ستی است طوریکه عناصر آن در ست B باشـد و در ست A نباشد.

مثال: دو ست $A=\{7,3,10,9,4\}$ و $B=\{8,10,9,15\}$ را در نظـر گرفته تفاضل آن‌ها را چنین دریافت می‌نماییم:

1) $A/B=\{7,3,4\}$

2) $B/A=\{8,15\}$

تبصره: قابل یادآوری می‌دانم که راجع به ست اعداد در آغاز فصل دوم به طور مفصل معلومات ارائه می‌گردد.

تمرینات فصل اول

۱. اعداد ذیل را باهم جمع نمایید.

1) $237+394+580=?$
2) $5140+265+32125+18=?$
3) $95740+2100+3541+781+9=?$
4) $5964327+702900514=?$
5) $3810942+5000352+813200=?$
6) $25130+20005+72004200=?$

۲. اعداد ذیل را تفریق نمایید.

7) $39254-12969=?$
8) $583412-495213=?$
9) $82000-58912=?$
10) $65943275-8456194=?$

۳. اعداد ذیل را باهم ضرب نمایید.

11) $495\times23=?$
12) $5618\times32=?$
13) $514\times821=?$
14) $96542\times31200=?$
15) $5380000\times46000=?$

۴. اعداد طاقت‌دار ذیل را ساده سازید؟

16) $(4)^9=?$
17) $(2)^{15}=?$
18) $(7)^6=?$
19) $(1)^{10}=?$
20) $(15)^1=?$

۵. اعداد ذیل را باهم تقسیم نموده خارج قسمت و باقیمانده را به دست آورید.

21) $942\div5=?$
22) $698\div7=?$
23) $3285\div9=?$
24) $3512\div13=?$
25) $84925\div15=?$
26) $45720\div18=?$
27) $9432\div2105=?$
28) $64928\div743=?$
29) $58102\div364=?$
30) $8942500\div8310=?$

۶. افاده‌های ذیل را ساده سازید.

31) $12+5\times3=?$
32) $21\times3+4=?$
33) $(8+9)\times4=?$
34) $8+9\times4=?$
35) $25+(3\times5)=?$
36) $(25+3)\times5=?$
37) $35+9-12=?$
38) $95-18+45=?$
39) $50-20\div2=?$
40) $(50-20)\div2=?$
41) $35\times8\times9=?$
42) $52\div4\times8=?$
43) $85\times3\div5=?$
44) $112\div2+15\times12=?$
45) $5\times(32\div8+7)-10=?$
46) $5^3\times4+125\div5^2=?$
47) $4^3+8^2+(12^1)-3^4=?$

48) $8\times[295-\{2\times(15-4)+42\div(15-9)\}]=?$

49) $35+[18\times\{75+8(7-4)-15\div(8-3)\}+32]=?$

50) $\{25\times8\div(8-6)+12\div(8-2)\}\times\{35\div7+8\times9+3(12-5)\}=?$

۷. اعداد داده شده ذیل به کدام اعداد پوره قابل تقسیم می‌باشد و چرا؟

51) 276
52) 285
53) 105
54) 924
55) 4620

۸. اعداد داده شده ذیل را به عوامل اولیه آن تجزیه نمایید.

56) 444
57) 1200
58) 2352
59) 528
60) 148225

۹. بزرگترین قاسم مشترک اعداد ذیل را دریافت نمایید.

61) 15, 25, 35
62) 70, 50, 40
63) 147, 105, 63
64) 60, 84, 108, 132
65) 168, 264, 312, 408

۱۰. کوچکترین مضرب مشترک اعداد ذیل را دریافت نمایید.

66) 25, 30
67) 8, 12, 15
68) 24, 48, 42
69) 150, 72, 210
70) 12, 16, 18, 24

۱۱. کدام یک از کسرهای عام ذیل واقعی و کدام یک غیر واقعی گفته می‌شود؟

71) $\frac{35}{17}$

72) $\frac{13}{42}$

73) $1\frac{1}{5}$

74) $5\frac{2}{3}$

75) $\frac{25}{125}$

۱۲. کسرهای عام ذیل را تصحیح نمایید (به عدد مخلوط تبدیل نمایید).

76) $\frac{9}{4}$

77) $\frac{35}{13}$

78) $\frac{91}{41}$

79) $\frac{43}{8}$

80) $\frac{75}{12}$

۱۳. کسرهای عام ذیل را غیر واجب نمائید؟

81) $7\frac{3}{5}$

82) $9\frac{13}{15}$

83) $8\frac{2}{17}$

84) $15\frac{7}{13}$

85) $23\frac{4}{29}$

۱۴. کسرهای عام ذیل را به سه کسر معادل آن تبدیل نمایید.

86) $\frac{5}{8}$

87) $\frac{9}{4}$

88) $\frac{3}{5}$

89) $\frac{8}{11}$

90) $\frac{13}{9}$

۱۵. کسرهای عام ذیل را اختصار نمایید

91) $\frac{8}{120}$

92) $\frac{25}{125}$

93) $\frac{49}{21}$

94) $\frac{84}{105}$

95) $\frac{525}{300}$

۱۶. کسرهای عام ذیل را با استفاده از عملیه تجنیس (هم‌مخرج سازی) هم مخرج سازید؟

96) $\frac{4}{5},\frac{3}{4}$

97) $\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{5}$

98) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{7}{6}$

99) $\frac{2}{5},\frac{3}{4},\frac{1}{3}$

100) $1\frac{2}{3},\frac{9}{5},2\frac{1}{2}$

101) $\frac{2}{9},\frac{5}{3},\frac{7}{12}$

۱۷. کسرهای عام ذیل را باهم مقایسه نمایید.

102) $\frac{7}{5},\frac{3}{5}$

103) $\frac{5}{8},\frac{13}{8}$

104) $\frac{5}{3},\frac{5}{11}$

105) $\frac{17}{8},\frac{17}{5}$

106) $\frac{2}{3},\frac{7}{4}$

107) $\frac{11}{12},\frac{15}{13}$

108) $\frac{8}{5},\frac{14}{9}$

109) $\frac{9}{11},\frac{35}{23}$

۱۸. کسور عام ذیل را جمع و تفریق نمایید.

110) $4+\frac{5}{7}$

111) $9-\frac{4}{7}$

112) $8+\frac{1}{3}$

113) $7-\frac{2}{5}$

114) $9-2\frac{1}{5}$

115) $18-12\frac{2}{3}$

116) $8+3\frac{1}{3}$

117) $8-3\frac{1}{4}$

118) $5+8\frac{3}{8}$

119) $\frac{19}{5}+\frac{6}{5}$

120) $\frac{17}{5}+\frac{4}{5}+\frac{9}{5}$

121) $\frac{9}{11}+\frac{1}{11}-\frac{7}{11}$

122) $\frac{9}{5}-1\frac{1}{4}$

123) $3\frac{2}{5}+1\frac{3}{4}$

124) $\frac{7}{3}+1\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$

125) $\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+\frac{5}{6}$

126) $\frac{4}{3}-\frac{1}{15}+\frac{3}{5}$

127) $4+2\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$

128) $5\frac{1}{4}-2\frac{3}{5}+1\frac{7}{10}$

129) $2\frac{1}{4}+3\frac{2}{5}-\frac{7}{11}-\frac{11}{20}$

۱۹. کسور عام ذیل ضرب نمایید؟

130) $\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{7}=?$

131) $\frac{1}{5}\cdot 2\frac{1}{3}=?$

132) $\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}=?$

133) $5\frac{3}{4}\cdot 3\frac{2}{5}=?$

134) $\frac{8}{5}\cdot 12\cdot\frac{15}{24}=?$

135) $3\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{13}\cdot 2\frac{1}{3}=?$

136) $\frac{9}{5}\cdot 8\cdot 1\frac{1}{4}\cdot\frac{13}{9}=?$

۲۰. کسور عام ذیل را تقسیم نمایید؟

137) $5\div\frac{1}{2}=?$

138) $8\div\frac{4}{3}=?$

139) $4\frac{5}{7}\div\frac{1}{5}=?$

140) $3\frac{2}{5}\div4\frac{1}{4}=?$

141) $\dfrac{\frac{2}{4}}{\frac{5}{8}}=?$

142) $\dfrac{\frac{5}{3}}{9}=?$

143) $\dfrac{\frac{5}{3}}{4}=?$

144) $\dfrac{2\frac{3}{5}}{1\frac{1}{2}}=?$

145) $\dfrac{7\frac{1}{5}}{\frac{12}{10}}=?$

۲۱. کسرهای ذیل را ساده سازید.

146) $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=?$

147) $\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\cdot1\frac{1}{4}=?$

148) $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\cdot2\frac{1}{4}=?$

149) $3\frac{1}{4}+2\frac{1}{5}\cdot7=?$

150) $5\frac{2}{3}-\frac{1}{5}+\frac{2}{7}\cdot1\frac{1}{2}=?$

151) $4\frac{3}{5}\div1\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=?$

152) $\dfrac{\frac{9}{5}-\frac{1}{3}+8}{3\frac{3}{5}+2}=?$

153) $\dfrac{2\frac{5}{8}-1\frac{1}{7}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\div\frac{5}{12}+\frac{3}{4}}=?$

154) $\dfrac{5+\frac{5}{3}}{7-\frac{1}{\frac{4}{5}}}=?$

155) $3\frac{1}{4}+\dfrac{5\div1\frac{1}{3}+2}{18-2\frac{3}{5}\div\frac{5}{13}}=?$

۲۲. کسرهای اعشار ذیل را جمع و تفریق نمایید.

156) $2,83+0,81=?$

157) $7+0,43=?$

158) $18,431-12=?$

159) $5+3,142=?$

160) $8,3+5,21+12,0431=?$

161) $9,1-5,34-0,3142=?$

162) $0,0052+132,5-97,004=?$

163) $152-0,42-75,4123=?$

۲۳. کسرهای اعشار ذیل را ضرب نمایید.

164) $3\times0,42=?$

165) $12,5 \times 8 = ?$
166) $7,513 \times 9,4 = ?$
167) $42,31 \times 7,105 = ?$
168) $0,0025 \times 0,00031 = ?$
169) $5,4 \times 0,021 \times 0,000352 = ?$
170) $2,3 \times 0,4 \times 0,4000 = ?$

۲۴. کسرهای اعشار ذیل را باهم تقسیم نمایید.

171) $58,4 \div 5 = ?$
172) $12,51 \div 2 = ?$
173) $235 \div 0,4 = ?$
174) $3,4 \div 0,2 = ?$
175) $2,58 \div 1,2 = ?$
176) $35,4 \div 0,25 = ?$
177) $795 \div 0,008 = ?$
178) $12,432 \div 0,3036 = ?$

۲۵. اعداد ذیل را به دقت $\frac{1}{100}$ خلص سازی (Round off) نمایید.

179) 5,82514
180) 8,316562
181) 19,009412
182) 181,400521
183) 38,797651
184) 7,33335
185) 19,666667
186) 7,048312
187) 5,999651
188) 33,435000
189) 1324,74500
190) 0,955502

۲۶. اعداد ذیل را به دقت $\frac{1}{1000}$ خلص سازی (Roun off) نمایید.

191) 13,451
192) 5,883142
193) 172,225225
194) 71,439691
195) 12,58500
196) 0,436991
197) 2,2155000
198) 18,0008412

۲۷. کسرهای عام ذیل را به کسر اعشار تبدیل نمایید.

199) $\frac{12}{5} = ?$
200) $\frac{17}{4} = ?$
201) $\frac{195}{2} = ?$
202) $\frac{35}{8} = ?$
203) $\frac{32}{3} = ?$
204) $\frac{52}{7} = ?$
205) $\frac{513}{6} = ?$
206) $\frac{45}{11} = ?$
207) $\frac{17}{15} = ?$
208) $\frac{217}{24} = ?$
209) $\frac{7152}{51} = ?$

۲۸. کسرهای اعشار محدود ذیل را به کسر عام تبدیل نمایید.

210) 0,3

211) 0,42
212) 1,4
213) 18,50
214) 3,400
215) 7,002
216) 19,125
217) 3,75

۲۹. کسرهای اعشار متوالی ذیل را به کسر عام تبدیل نمایید.

218) 0,6666.......
219) 0,242424........
220) 0,343434.......
221) 0,414414414.......
222) 1,3333......
223) 4,121212.......
224) $2,\overline{3}$
225) $3,\overline{6}$
226) $0,4\overline{7}$
227) $5,9\overline{24}$
228) $1,42\overline{13}$

۳۰. کسور ذیل را ساده سازید.

229) $\dfrac{5+3\frac{1}{5}}{0,4\div\frac{2}{5}}=?$

230) $\dfrac{8,42+1\frac{1}{4}}{5,5-2\frac{3}{5}+4}=?$

231) $\dfrac{\frac{8}{5}+0,25}{14,75-2\frac{1}{4}}=?$

232) $\dfrac{5\frac{1}{4}\div8\frac{1}{2}+2,5}{\frac{5}{2}+(8,4-1\frac{1}{4})}=?$

233) $\dfrac{1\frac{1}{25}+2,4(1\frac{1}{5}-0,4)}{8,125(5\frac{1}{4}+0,8)}=?$

234) $\dfrac{3,4(5,1-\frac{1}{125})}{2\frac{3}{16}(2,4\div\frac{3}{5})}=?$

۲۳۵) نسبت حسابی اعداد 135 و 74 را دریابید.

۲۳۶) نسبت هندسی اعداد 125 و 225 را دریابید.

۲۳۷) $\frac{2}{5}$ حصه کدام محلول 50cc می‌گردد؟

۲۳۸) $\frac{12}{17}$ حصه مبلغ 3400 افغانی چند می‌شود؟

۲۳۹) احمد 24 جلد کتابچه دارد $\frac{2}{3}$ آنرا برای برادر خویش داد، چند جلد کتابچه نزد خودش باقی مانده است؟

۲۴۰) مقدار 240 کیلوگرام برنج را به نسبت $\frac{5}{7}$ تقسیم نمایید.

۲۴۱) مقدار 2100 لیتر تیل را به دو نفر A و B طوری تقسیم نمایید که برای A چهار حصه و برای B سه حصه برسد، اندازه نفر A را دریابید.

۲۴۲) دو نفر در یک دوکان به سرمایه‌های (200000) افغانی و (380000) افغانی با همدیگر شریک اند، اگر بعد از یک مدت مبلغ (29000) افغانی نفع نموده باشند نفع نفر دوم چند افغانی خواهد بود؟

۲۴۳) سه نفر با اسهام 23 سهم، 12 سهم و 25 سهم باهم در یک شرکت سهامی صنایع چوبی شریک اند. اگر در مدت یکسال شرکت مذکور (120000) افغانی ضرر نموده باشد، ضرر نفر اول چند افغانی می‌گردد؟

۲۴۴) اجزای مجهول را در تناسب‌های ذیل دریافت نمایید.

a) $\frac{x}{5}=\frac{3}{8}$ b) $\frac{2}{x}=\frac{15}{30}$ c) $\frac{8}{5}=\frac{x}{15}$ d) $\frac{9}{4}=\frac{3}{x}$

۲۴۵) وسط هندسی تناسب $\frac{\frac{2}{3}}{x}=\frac{x}{\frac{4}{5}}$ را دریابید.

۲۴۶) وسط هندسی تناسب $\frac{x}{5}=\frac{1{,}2}{x}$ را دریابید.

۲۴۷) یک دوکاندار در یک هفته قرار ذیل فروشات داشته است:

روز شنبه 25300، روز یکشنبه 21700، روز دو شنبه 7500، روز سه‌شنبه 18600، روز چهارشنبه صفر، روز پنج شنبه 16900 افغانی و روز جمعه رخصتی بوده است اوسط فروشات وی را دریابید؟

۲۴۸) قیمت 20 دانه قلم (100) افغانی می‌گردد به (80) افغانی چند عدد قلم می‌گردد؟

۲۴۹) پول 8 نفر کارگر 2400 افغانی می‌گردد، مبلغ 3600 افغانی مزد چند نفر کارگر خواهد بود؟

۲۵۰) 5 نفر یک کار را در 15 روز تمام می‌نمایند، 3 نفر همان کار را در چند روز تمام خواهند نمود؟

۲۵۱) یک موترسایکل فاصله‌یی را در 9 ساعت به سرعت $10\frac{m}{sec}$ می‌پیماید، اگر سرعت مذکور به $15\frac{m}{sec}$ برسد همان فاصله را در چند ساعت طی خواهد کرد؟

۲۵۲) 5 نفر کارگر روزانه 8 ساعت کار نموده و یک کار را در 10 روز ختم می‌نمایند، اگر 4 نفر روزانه 8 ساعت کار نمایند، همان کار را در چند روز ختم خواهند نمود؟

۲۵۳) 12 نفر انجنیر یک پروژه را با کار روز 6 ساعت در 20 روز دیزاین و سروی می‌نمایند. آیا 10 نفر انجنیر با کار روزانه 4 ساعت همان کار را در چه مدت طرح و دیزاین خواهند نمود؟

۲۵۴) کرایه انتقال 12kg پارسال به وسیله طیاره به فاصله 12000km مبلغ 50 دالر امریکایی می‌گردد، کرایه انتقال 50kg پارسال به وسیله طیاره به فاصله (20700km) چند خواهد گردید؟

۲۵۵) به کمک احدیت از تناسب ذیل قیمت را دریابید:

شخصی به (2400) افغانی سه کارتن صابون که هر کارتن 50 دانه صابون دارد، خریداری می‌نماید. به (4000) افغانی چند دانه صابون را خریداری خواهد نمود؟

۲۵۶) قیمت (20) جلد کتابچه 600 افغانی می‌گردد، قیمت (52) جلد آن افغانی می‌گردد؟

۲۵۷) مفاد سرمایه (22400) افغانی از قرار نرخ 6% چند خواهد شد؟

۲۵۸) 5% یک محلول 250cc است. کل محلول چند سی‌سی خواهد گردید؟

۲۵۹) مبلغ 8000 چند فیصد 32000 می‌گردد؟

۲۶۰) شخصی از مبلغ 5 ملیون سرمایه خویش به اساس ذکات اسلامی چند افغانی بپردازد؟

۲۶۱) جنسی با ارزش 12000 افغانی با درنظرداشت (10%) تخفیف به مبلغ چند افغانی خریداری خواهد گردید؟

۲۶۲) جنسی با ارزش (5800) افغانی در بدل پول نقد با در نظرداشت چند فیصد تخفیف به مبلغ 5200 افغانی به فروش می‌رسد؟

۲۶۳) جنسی با درنظرداشت 20% تخفیف به مبلغ (20000) افغانی به فروش رسیده است، قیمت اصل جنس را دریافت نمایید.

۲۶۴) از سرمایه (120000) افغانی به نرخ 10% در مدت 5 سال به ربح بسیط چند نفع به دست خواهد آمد؟

۲۶۵) از سرمایه (100000) افغانی در مدت 2 سال و 6 ماه به نرخ 9% چند نفع حاصل خواهد شد؟

۲۶۶) از کدام سرمایه در مدت پنج سال به نرخ 8% مبلغ (28000) افغانی بادرنظر ربح ساده مفاد به دست خواهد آمد؟

۲۶۷) با درنظرداشت ربح ساده به کدام نرخ در مدت 8 سال سرمایه

(400000) افغانی مبلغ (120000) افغانی نفع خواهد کرد؟

۲۶۸) در چه مدت از سرمایه (50000) دالر به نرخ 10% بـه ربـح سـاده مبلغ (5000) دالر مفاد خواهد کرد؟

۲۶۹) در چه مدت یک سرمایه به نرخ 10% سه چند خودش می‌گردد؟

۲۷۰) جنـسی بـا ارزش (200000) افغـانی خریـداری گردیـده اگـر دوره استهلاک آن (8) سال و فیصدی تنزیل آن (7%) باشد، مقدار تنزیل مـذکور را دریابید؟

۲۷۱) یک موتر دارای ارزش (20000) دالر بـوده در صـورتیکه فیـصدی تنزیل آن سالانه 6% و مقدار تنزیل مـوتر مـذکور بعـد از خـتم همـان مـدت (2400) دالر گردد، دوره استهلاک موتر مذکور را دریافت نمایید.

۲۷۲) مبلغ (150000) افغانی به نرخ 8% در مـدت چهـار سـال بـه ربـح مرکب چند نفع خواهد کرد؟

۲۷۳) مبلغ (25000) دالر به نرخ 10% در مدت (3) سال به ربح مرکـب چند می‌گردد؟

۲۷۴) در حالیکه P سـت اعـداد اولیـه را نـشان دهـد، عناصـر سـت A را مشخص نمایید؟

$$A=\{x/x\in p, 1<x<20\}$$

۲۷۵) ست $B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ را در شکل خواص مـشترک آن بنویسید.

۲۷۶) دو ست معادل پنج عنصره را بنویسید.

۲۷۷) دو ست مساوی چهار عنصره اشکال هندسی را بنویسید.

۲۷۸) هرگاه H یک‌ست باشد($H=\{x/x\in N, 9<x\le 20\}$)، پس: ست‌های فرعی ذیل را دریابید؟

الف: ست فرعی اعداد اولیه H را

ب: ست فرعی اعداد جفت H را

ج: ست فرعی اعداد طاق H را

۲۷۹) تعداد ست‌های فرعی ست $A=\{a,b,c\}$ را به وسیله لست کردن نمایش بدهید.

۲۸۰) تعداد ست‌های فرعی ستی که دارای پـنج عنـصر باشـد چنـد سـت خواهد بود؟

۲۸۱) اگر $A=\{1,a,2,b,3,c,4,d\}$ و $B=\{1,a,b,c\}$ باشد مکمله ست B نظر به A را دریافت نمایید.

۲۸۲) اتحاد ست‌های $A=\{5,7,2,9\}$ و $B=\{3,5,7,9\}$ را دریابید.

۲۸۳) اگر $M=\{1,2,3,5\}$ و $B=\{\quad\}$ باشد اتحاد ست‌های مـذکور را دریابید.

۲۸۴) اگر $B=\{5,8,9\}$ باشد $B\cup B=?$ و $B\cup\phi=?$

۲۸۵) اگر $A\cup B=\{1,3,5,7\}$ باشد، پس $B\cup A=?$

۲۸۶) اگر $(A\cup B)\cup C=\{2,5,8,10\}$ باشد، $A\cup(B\cup C)=?$

۲۸۷) اگر $A=\{2,4,6,11\}$ و $B=\{9,11,13\}$ باشد، $A\cap B=?$

۲۸۸) اگر $A=\{a,b,m,k\}$ باشد در این صورت: $A\cap\phi=?$ ، $A\cap A=?$

۲۸۹) اگر $A=\{1,2,5,8,9\}$ ، $B=\{3,4,5,8\}$ و $C=\{1,2,3,4,5\}$ باشد در این صورت:

1) $A\cup(B\cup C)=?$
2) $(A\cup B)\cup C=?$
3) $A\cup(B\cap C)=?$
4) $(A\cup B)\cap C=?$
5) $A\cap(B\cap C)=?$
6) $(A\cap B)\cup C=?$
7) $(A\cap B)\cap C=?$

۲۹۰) دو ست $A=\{a,b,c,m,n\}$ و $B=\{a,c,n,5,8\}$ داده شـده است در این صورت:

$B\setminus A=?$ و $A\setminus B=?$

فصل دوم

مفاهیم اساسی الجبر

در فصل اول عملیات مانند جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بالای اعداد بدون علامه انجام گردید که آن اعداد حسابی یا اعداد طبیعی یاد می‌گردید و در این فصل اجرای عملیات بالای اعداد علامه‌دار، حدود و افاده‌ها صورت خواهد گرفت.

گرچه امروز کلمه الجبر را بدون کدام وضاحت در کتاب درسی مکاتب تحت عنوان ریاضی به کار برده اند، اما بهتر است یادآور شوم که کلمه الجبر به معنی جبر یعنی جبران کردن و مرتب کردن تعبیر گردیده که این کلمه در سال 203 هـ‌ش در کتاب معرفی محمد بن موسی خوارزمی تحت عنوان (الجبر و المقابله) به کار رفته است. پس می‌توان الجبر را به حیث یک بخش از علم ریاضی (ریاضیات) دانست، طوریکه این علم ارتباطی را که در طبیعت بین کمیات در علوم ساینس وجود دارد در شکل افاده‌ها (جمله‌ها) و فورمول‌ها طرح‌ریزی نموده است، که به کمک این فورمول‌ها با سهولت‌های خوب می‌توان جهت تحقیقات مسایل خصوصاً محاسبات اشکال قضایا در هندسه، مثلثات، تحلیل حوادث و پدیده‌ها در علم فزیک، کیمیا، ساختار و استفاده از وسایل و ابزار تخنیکی و کمپیوتری، اجرای عملیات محاربوی، تحقیقات کیهانی و غیره، استفاده اعظمی نمود.

فرق بین الجبر و حساب

طوریکه در فصل اول شما به علم حساب، اعداد حسابی و عملیات حسابی آشنایی کامل حاصل نموده بودید و در این بخش راجع به الجبر و عملیات آن معلومات حاصل خواهید نمود.

بین الجبر و حساب فرق‌های ذیل وجود دارد:

- در حساب از اعداد بدون علامه استفاده گردیده بود، در حالیکه در الجبر اعداد با علامه مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- در الجبر برعلاوه اعداد علامه‌دار از حروف نیز استفاده به عمل می‌آید.
- در حساب مسایل ساده مورد ارزیابی قرار می‌گرفت، درحالیکه در الجبر مسایل مغلق و پیچیده که در حساب حل آن ممکن نیست با استعمال حروف می‌توان آنها را تحلیل نموده به حل آن اقدام نمود.

پس مطالعه الجبر جهت تحقیقات در ساینس و تکنالوژی امر حتمی بوده، زیرا نسبت به حساب، الجبر یک قدم به جلو بوده و یک حالت تکامل یافته از محاسبه می‌باشد.

ست اعداد (Set of Numbers)

علمای ریاضیات اعداد را جهت مطالعات منظم، انواع آنها و استفاده از آنها در مسایل الجبری، توسط ست‌های جداگانه ذیلاً تعریف نموده اند:

۱- ست اعداد طبیعی (Natural Numbers)

اعدادی که برای شمردن اشیا کامل استفاده می‌گردد، اعداد طبیعی (حسابی) نامیده می‌شود که آن را به (N) نمایش می‌دهند، مانند:

$N = \{1,2,3,4,5,......................\infty\}$

۲- ست اعداد کامل:

ستی که برعلاوه اعداد طبیعی صفر را نیز دارا می‌باشد، اعداد کامل نامیده می‌شود که آن را به شکل (N^*) نمایش می‌دهند، مانند:

$N^* = \{0,1,2,3,4,......\}$

۳- ست اعداد تام (Integers Numbers)

ست تمام اعداد کامل مثبت و منفی به شمول صفر را به نام ست اعداد تام یاد می‌نمایند که آن را به (I) یا (Z) نمایش می‌دهند. مانند:

$$Z=\{-\infty,........,-4,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,+4,.........,+\infty\}$$

به خاطر داشته باشید که ست اعداد طبیعی یک ست فرعی ست اعداد تام می‌باشد، زیرا اعدادی که علامه ندارد در الجبر مثبت قبول گردیده است، یعنی: $N\subseteq Z$

صفر چیست؟

صفر سرحد جدایی بین اعداد مثبت و منفی بوده که بدون علامه و جفت می‌باشد. تا امروز راجع به عدد بودن صفر نظریات ضد و نقیض در بین علمای ساینس وجود دارد که به طور خلاصه می‌توان صفر را بحیث یک ست خالی که هیچ عنصر ندارد تعریف نمود.

قابل یادآوریست که صفر عنصر عینیت جمع و تفریق می‌باشد یعنی:

$7+0=7$

$0+4=4$

$15-0=15$

در اجرای عملیه ضرب، حاصل‌ضرب هر عدد با صفر مساوی به صفر است. در مثال ذیل موضوع وضاحت بیشتر می‌یابد:

چون ساده‌ترین طریقه جمع اعداد یکسان را ضرب تعریف نموده اند، لذا:

$2+2+2+2+2+2+2=14$

$\Rightarrow 2\cdot 7=14$

پس می‌توان نوشت:

$0+0+0+0+0+0+0=0$

$\Rightarrow 0\cdot 7=0$

به همین ترتیب در اجرای عملیه تقسیم با صفر دو حالت ذیل وجود دارد.

الف: صفر تقسیم هر عدد مساوی به صفر است.

از علم حساب در اجرای عملیه تقسیم می‌دانیم که نتیجه حاصل تقسیم بالای مقسوم‌علیه عیناً نتیجه حاصل‌ضرب بالای معکوس مقسوم‌علیه می‌باشد، یعنی:

$12\div 3=4$

$12\cdot\frac{1}{3}=4$

پس می‌توان (نظر به حالت ضرب) نوشت:

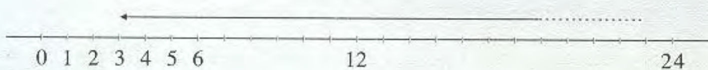
$0\div 7=0\cdot\frac{1}{7}=0$

ب: تقسیم نمودن اعداد بر صفر ناممکن است، یعنی:

$12\div 0=$ (امکان ندارد)

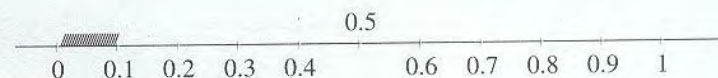
زیرا: در صورتیکه 12 جلد کتابچه داشته باشیم و کسی موجود نباشد که این کتابچه‌ها را به آنها تقسیم نماییم آیا عمل تقسیم ممکن می‌گردد؟ واضح است که نخیر. پس در نتیجه، تقسیم کردن بر صفر ناممکن است.

از جانب دیگر به هر اندازهٔ که در اجرای عملیه تقسیم به طرف صفر نزدیک‌تر گردیم، به همان اندازه حاصل‌تقسیم بزرگ و بزرگتر می‌گردد، یعنی به طرف بی‌نهایت تقرب می‌کند، مثلاً: می‌خواهیم عدد 12 را بالاخره به صفر تقسیم نماییم.



$$12 \div 24 = 0,5$$
$$12 \div 12 = 1$$
$$12 \div 6 = 2$$
$$12 \div 4 = 3$$
$$12 \div 3 = 4$$
$$12 \div 2 = 6$$
$$12 \div 1 = 12$$

همچنان می‌توان نوشت:



$$12 \div 0,5 = 24$$
$$12 \div 0,1 = 120$$
$$12 \div 0,01 = 1200$$
$$12 \div 0,00001 = 1200000$$
$$12 \div 0 \to \infty$$

٤- ست اعداد نسبتی (Rational Numbers)

ستی که تمام عناصر آن به شکل $\frac{a}{b}$ (طوریکه $b \neq 0$ و $a,b \in Z$ است) درآورده شده بتواند، اعداد نسبتی نامیده می‌شود. یعنی اعداد کسری چه در شکل کسر عام و چه در شکل کسر اعشاری محدود یا متوالی شامل این ست می‌گردد و به Q نمایش داده می‌شود.

مانند: $Q = \left\{\frac{a}{b} / a,b \in Z, b \neq 0\right\}$

مثلاً: $Q = \left\{......,-\frac{3}{5},-2\cdot 42,-5\frac{1}{4},+\frac{7}{11},+0,95,+3\frac{2}{7},.......\right\}$

به خاطر داشته باشید که می‌توان هر عدد تام را در شکل نسبتی نیز ارائه نمود، مثلاً:

$$+4 = +\frac{4}{1} = +\frac{8}{2} = +\frac{12}{3} = +\frac{16}{4} = ...$$
$$-5 = -\frac{5}{1} = -\frac{10}{2} = -\frac{20}{4} = -\frac{100}{20} = ...$$

پس می‌توان نوشت که تمام اعداد تام یک ست فرعی از اعداد نسبتی بوده می‌توانند، یعنی:

$$Z \subseteq Q$$

پس می‌توان نوشت:

$$N \subseteq Z \subseteq Q$$

٥- ست اعداد غیر نسبتی (Irrational Numbers)

ست تمام اعدادی که در شکل کسر اعشاری نامحدود غیر متوالی (ختم ناشونده غیر تکراری) ارائه گردیده باشند، شامل ست اعداد غیر نسبتی می‌گردند. یعنی چنین اعداد به نسبت (کسر عام) تبدیل نمی‌گردند، که این نوع اعداد را اعداد جذری که جذر کامل ندارند می‌نامند.

نوت: در همین فصل به دریافت آنها در استخراج جذر اعداد آشنا خواهیم گردید. این اعداد را به Q' نمایش می‌دهیم، مثلاً:

$$Q' = \left\{\begin{matrix} ....,-\sqrt{5},-\sqrt{2},-\sqrt[3]{7},+\sqrt{10},+\sqrt[4]{4},e \\ =,718281...,\pi = 3,142..,... \end{matrix}\right\}$$

٦- ست اعداد حقیقی (Real Numbers)

ستی که از اتحاد تمام اعداد نسبتی (اعداد طبیعی، تام و کسری) و غیرنسبتی تشکیل گردیده باشد به نام ست اعداد حقیقی یاد می‌گردد و به IR نمایش داده می‌شود، طوریکه:

$$IR = Q \cup Q'$$

یا به عباره دیگر:

$IR = IN \subseteq Z \subseteq Q \cup Q'$

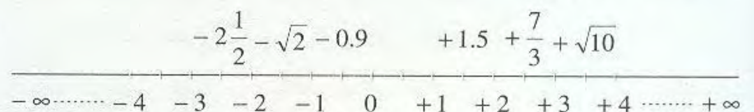
پس به خاطر داشته باشید $Q \cup Q' \subseteq IR$ یعنی تمام عناصر ست‌های طبیعی، تام، نسبتی و غیر نسبتی یک ست فرعی از ست حقیقی اند، یعنی شامل ست اعداد حقیقی می‌باشند.

یادداشت: دو ست اعداد دیگر به نام ست اعداد موهومی (Imaginary Numbers) و ست اعداد مختلط (Complex Numbers) نیز وجود دارند که در اخیر همین فصل راجع به آنها معلومات ارائه می‌گردد.

پس در نتیجه می‌توان گفت که هشت نوع ست اعداد در ریاضی مورد مطالعه می‌باشد.

اعداد الجبری (Algebraic Numbers)

تمام اعداد علامه‌دار مثبت و منفی شامل ست اعداد حقیقی را اعداد الجبری می‌نامند که روی خط اعداد چنین تعیین گردیده اند:



به خاطر داشته باشید که اعداد مثبت به طرف راست و اعداد منفی به طرف چپ از صفر به فاصله‌های مساوی تعیین گردیده اند. پس در نتیجه هر عدد که به طرف راست قرار می‌گیرد، بزرگتر از عدد طرف چپ می‌باشد.

یعنی:

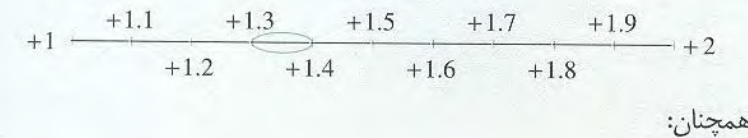
$+10 > +4$ $\quad$ $-1 > -3$

$+2 > 0$ $\quad$ $-2 > -5$

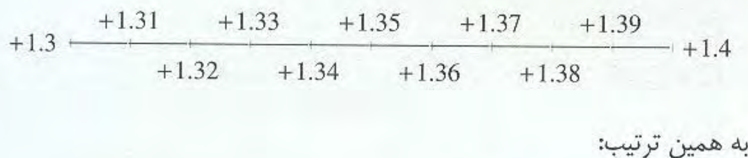
$+1 > -2$ $\quad$ و $\quad$ $-4 > -10$

$0 > -5$ $\quad$ $-3 > -18$

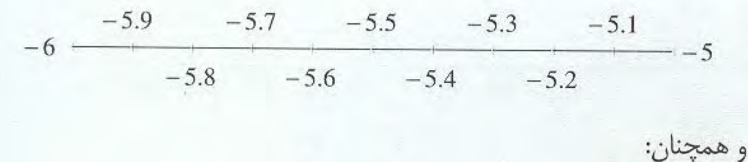
از جانب دیگر بین هردو عدد تام بی‌نهایت اعداد نسبتی و غیر نسبتی وجود دارد که نسبت تراکم خط اعداد نمی‌توان آنها را نمایش داد، مثلاً:



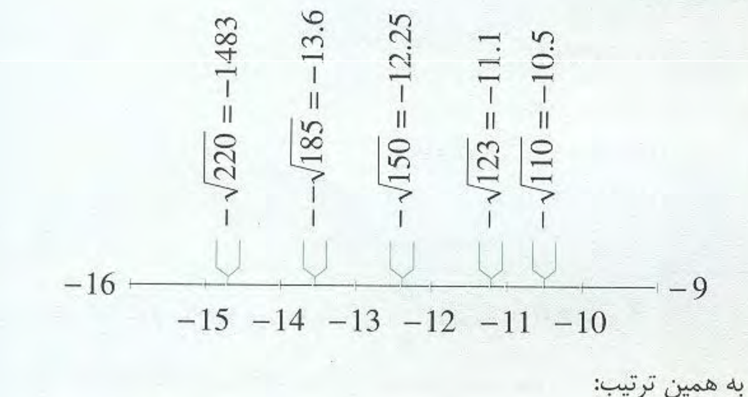
همچنان:



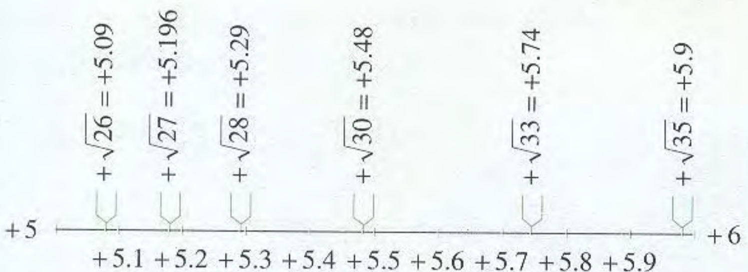
به همین ترتیب:



و همچنان:



به همین ترتیب:



خواص الجبری اعداد حقیقی

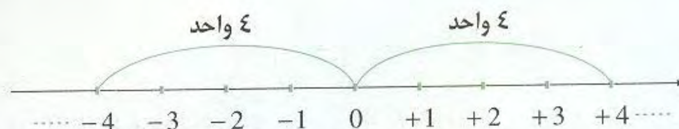
در صورتیکه a، b، c شامل اعداد حقیقی باشند، خواص اعداد حقیقی نظر به اجرای عملیات جمع و ضرب دارای خواص ذیل اند:

بسته‌گی عملیه جمع	1) $a+b\in IR$
بسته‌گی عملیه ضرب	2) $a\cdot b\in IR$
تبدیلی عملیه جمع	3) $a+b=b+a$
تبدیلی ضرب	4) $a\cdot b=b\cdot a$
اتحاد عملیه جمع	5) $a+(b+c)=(a+b)+c$
اتحاد عملیه ضرب	6) $a(b\cdot c)=(a\cdot b)c$
عنصر عینیت جمع	7) $a+0=a$
عنصر عینیت ضرب	8) $a\cdot 1=a$
عنصر معکوس عملیه جمع	9) $a+(-a)=0$
عنصر معکوس عملیه جمع	10) $a\cdot a^{-1}=1$
توزیع جمع در ضرب	11) $a(b+c)=ab+ac$

قیمت مطلقه اعداد الجبری

Absolute Value of Algebric Numbers

قیمت مطلقه یک عدد الجبری عبارت از مقدار عدد مذکور بدون در نظر داشت علامهٔ آن می‌باشد، یعنی:



$$|+4|=4 \qquad |+\sqrt{5}|=\sqrt{5}$$

$$|-4|=4 \qquad |-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$$

$$|-1,5|=1,5 \qquad |0|=0$$

$$\left|+\frac{15}{4}\right|=\frac{15}{4}$$

که به طور عموم برای $X\in IR$ می‌توان قیمت مطلقه را چنین تعریف نمود:

$$|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ -x, & x<0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

مثلاً: اگر $x=+5$ (پس $x>0$ است)، بناءً می‌توان نوشت:

$$|x|=x\Rightarrow|+5|=5$$

همچنان $x=-8$ (پس $x<0$ است)، بناءً می‌توان نوشت:

$$|x|=-x\Rightarrow|-8|=-(-8)=8$$

به همین ترتیب $x=0$، بناءً می‌توان نوشت:

$$|x|=0\Rightarrow|0|=0$$

خواص قیمت مطلقه

هرگاه x و y دو عدد حقیقی باشند در این صورت، خواص ذیل برای قیمت مطلقه وجود دارد:

1) $|x-y|=|y-x|$

2) اگر $(a>0)$ یک عدد مثبت باشد $|x|<a\Rightarrow -a<x<a$

3) $|x|>a\Rightarrow x>a$ و یا $x<-a$

4) $|x+y|\le|x|+|y|$

5) $|x-y|\ge|x|-|y|$

6) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

7) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}\,,\ y \neq 0$

عملیات اساسی بالای اعداد الجبری (اعداد علامه‌دار)

Foundamental Operations on the Algebric Numbers

قبل بر اینکه راجع به عملیات اساسی بالای اعداد الجبری بحث نماییم قابل تذکار می‌دانیم این که دو مفهوم الجبر اشتباه نگردد و در جریان اجرای عملیات مراعات گردد:

اول: جمع و تفریق عملیه (فعل) بوده که به وسیله سمبول‌های (+) و (−) ارائه می‌گردد که در اجرای عملیات حسابی با آنها آشنایی داریم.

دوم: مثبت و منفی علامه (اسم) بوده که به وسیله سمبول‌های (+) و (-) ارائه می‌گردد که فعلاً در الجبر با آنها سروکار داریم.

مثال‌ها:

در اینجا (+) عملیه جمع (یکجا کردن) را نشان می‌دهد $7+2=9$

در اینجا (-) عملیه تفریق (کم کردن) را نشان می‌دهد $7-2=5$

در حالیکه (+5) یعنی (مثبت پنج) یک عدد بزرگتر از صفر به اندازه پنج واحد به طرف راست و (-3) یعنی (منفی سه) یک عدد کوچکتر از صفر به اندازه سه واحد به طرف چپ را نشان می‌دهد.



اول: عملیه جمع اعداد الجبری (Addition)

در اجرای عملیه جمع اعداد الجبری از هردو عمل یعنی جمع و تفریق استفاده می‌گردد یعنی دو حالت ذیل را در نظر بگیرید:

الف: در صورتیکه اعداد هم‌علامه باشند از علامه‌های مشابه یکی را در نظر گرفته اعداد را باهم جمع (یکجا) می‌نماییم، مثلاً:

1) $(+5)+(+8)=+13$

2) $(-4)+(-15)+(-7)=-26$

3) $(+4.3)+(+5.8)+(+3)+(+0.21)=+13.31$

4) $\left(-2\dfrac{1}{5}\right)+\left(-3\dfrac{2}{3}\right)+\left(-\dfrac{7}{10}\right)=?$

$=\left(-\dfrac{11}{5}\right)+\left(-\dfrac{11}{3}\right)+\left(-\dfrac{7}{10}\right)=\dfrac{-66-110-21}{30}=-\dfrac{197}{30}$

ب: در صورتیکه اعداد مختلف‌العلامه باشند علامه حاصل جمع را مربوط عدد بزرگ (از نگاه قیمت مطلقه) در نظر گرفته از عدد بزرگ عدد کوچک را تفریق (کم) می‌نماییم، مثلاً:

1) $(+8)+(-5)=+3$

2) $(+10)+(-17)=-7$

3) $(+4\frac{1}{5})+(-2\frac{3}{5})=(+\frac{21}{5})+(-\frac{13}{5})$

$=\dfrac{+21-13}{5}=+\dfrac{8}{5}=+1\dfrac{3}{5}$

4) $(+2{,}73)+(-7{,}315)=-4{,}585$

5) $(+8)+(-9)+(-15)+(+4)+(+17)$

$=(+8+4+17)+(-9-15)$

$=(+29)+(-24)=+5$

6) $(-3{,}4)+\left(+5\dfrac{1}{2}\right)+(-7)+\left(+\dfrac{1}{4}\right)=?$

$=\left(-\dfrac{17}{5}\right)+\left(+\dfrac{11}{2}\right)+\left(-\dfrac{7}{1}\right)+\left(+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{-68+110-140+5}{20}$

$=\dfrac{-208+115}{20}=-\dfrac{93}{20}$

دوم: عملیه تفریق اعداد الجبری یا علامه‌دار (Subtraction)

در عملیه تفریق اعداد الجبری، فقط علامه مفروق را تغییر داده عیناً عملیه جمع الجبری را انجام می‌دهیم، مثلاً:

1) $(+13)-(-15)=?$

$=+13+15=+28$

2) $(-32)-(+8)=?$

$=-32-8=-40$

3) $(-5.8+2.45)-(-2{,}7-5.612)=?$

$=(-3.35)-(-8.312)=-3.35+8.312=+4.962$

4) $(-2\frac{1}{5}+1.2)-(+5\frac{1}{2}-\frac{3}{2})=?$

$=(-\frac{11}{5}+\frac{6}{5})-(+\frac{11}{2}-\frac{3}{5})=(\frac{-11+6}{5})-(\frac{+55-6}{10})$

$=(\frac{-5}{5})-(\frac{+49}{10})=-1-\frac{49}{10}=\frac{-10-49}{10}=-\frac{59}{10}$

سوم: عملیه ضرب اعداد الجبری یا علامه‌دار (Multiplication)

با در نظر داشت این که حاصل‌ضرب دو عدد هم‌علامه عددیست مثبت و حاصل‌ضرب دو عدد مختلف‌العلامه عددیست منفی، عملیه ضرب در اعداد الجبری عیناً مانند اعداد حسابی می‌باشد. یعنی:

هم علامه‌ها $\begin{cases}(+)(+)=+\\(-)(-)=+\end{cases}$ و مختلف‌العلامه‌ها $\begin{cases}(+)(-)=-\\(-)(+)=-\end{cases}$

مثال‌ها:

1) $(+35)(+3)=+105$

2) $(-14)(-7)=+98$

3) $(+3.4)(-0.3)=-1.02$

4) $(+7)(-2\frac{1}{5})(+\frac{4}{3})=(+7)(-\frac{11}{5})(+\frac{4}{3})=-\frac{7\cdot 11\cdot 4}{1\cdot 5\cdot 3}=-\frac{308}{15}$

5) $(-2.4+\frac{3}{5})(-\frac{15}{4}-1\frac{1}{3})=(-\frac{12}{5}+\frac{3}{5})(-\frac{15}{4}-\frac{4}{3})$

$=(\frac{-12+3}{5})(\frac{-45-16}{12})=(-\frac{9}{5})(-\frac{9}{5})=+\frac{183}{20}$

چهارم: عملیه تقسیم اعداد الجبری یا علامه‌دار (Division)

چون عملیه تقسیم یک حالت خاص عملیه ضرب می‌باشد، بناءً همان قوانین ضرب را دارا است، یعنی حاصل تقسیم دو عدد هم‌علامه همیشه مثبت و حاصل تقسیم دو عدد مختلف‌العلامه همیشه منفی می‌باشد، بناءً عملیه تقسیم در اعداد الجبری مانند عملیه تقسیم در اعداد حسابی می‌باشد، یعنی:

هم‌علامه‌ها $\begin{cases}(+)\div(+)=+\\(-)\div(-)=+\end{cases}$ مختلف‌العلامه‌ها $\begin{cases}(+)\div(-)=-\\(-)\div(+)=-\end{cases}$

مثال‌ها:

1) $(+15)\div(+3)=+5$

2) $(-21)\div(-7)=+3$

3) $(+3.12)\div(-0.3)=\frac{+3.12}{-0.3}=\frac{+3.12}{-0.30}=\frac{-312}{30}=-\frac{52}{5}=-10{,}4$

4) $(-35)\div(+5)+(+42)\div(-6)=?=(-7)+(-7)=-14$

5) $\dfrac{-3.4+7-\frac{1}{2}}{+4.1-2+\frac{3}{2}}=?$

$=\dfrac{-\frac{17}{5}+\frac{7}{1}-\frac{1}{2}}{+\frac{41}{10}-\frac{2}{1}+\frac{3}{2}}=\dfrac{\frac{-34+70-5}{10}}{\frac{+41-20+15}{10}}=\frac{-39+70}{+56-20}=\frac{+31}{+36}=+\frac{31}{36}$

طـاقـت در اعـداد الجبـری
Exponent of the Algebric Numbers

طاقت یک شکل خاص عملیه ضرب است که همه عوامل ضربی باهم مساوی باشند، مثلاً:

$$\underbrace{(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)}_{\text{5 مرتبه}} = (-2)^5$$

عدد (-2) به نام قاعده و (5) به نام نما یا طاقت‌نما یاد می‌گردد.

به خاطر داشته باشید که قواعد علامه‌ها در ضرب در مورد طاقت نیز قابل تطبیق می‌باشد، بناءً جهت رفع طاقت نکات ذیل را در نظر داشته باشید:

هرگاه قاعده یک عدد مثبت باشد به تمام نماها (جفت یا طاق) نتیجه یک عدد مثبت است، مثلاً:

1) $(+5)^2 = +25$

2) $(+3.1)^3 = +29,791$

3) $(+2)^8 = +256$

4) $(+\frac{4}{3})^5 = +\frac{1024}{243}$

هرگاه قاعده یک عدد منفی باشد دو حالت ذیل وجود دارد:

الف: هرگاه نما جفت باشد، نتیجه یک عدد مثبت است.

ب: هرگاه نما طاق باشد، نتیجه یک عدد منفی است.

مثال‌ها:

1) $(-3)^7 = -2187$

2) $(-6)^5 = -7776$

3) $(-4.5)^3 = -91.125$

4) $(-\frac{7}{3})^1 = -\frac{7}{3}$

و

1) $(-2)^6 = +64$

2) $(-5)^4 = +625$

3) $(-7.2)^2 = +51.84$

4) $(-1\frac{1}{2})^8 = (-\frac{3}{2})^8 = +\frac{6561}{256}$

یادداشت: در جهت رفع طاقت در نظر داشته باشید که هر عدد به نمای صفر مساوی به یک می‌باشد.

مثال‌ها:

$$(+12)^0 = 1 \ , \ (-5)^0 = 1 \ , \ (-1)^0 = 1 \ , \ (+\frac{7}{5})^0 = 1$$

هر عدد به نمای منفی مساوی است به معکوس همان عدد به نمای مثبت.

مثال‌ها:

1) $(+5)^{-3} = \frac{1}{(+5)^{+3}} = \frac{1}{+125} = +\frac{1}{125}$

2) $(-4)^{-5} = \frac{1}{(-4)^5} = \frac{1}{-1024} = -\frac{1}{1024}$

3) $(-7.2)^{-2} = \frac{1}{(-7.2)^2} = \frac{1}{+51.84} = +\frac{100}{5184} = +\frac{25}{1296}$

4) $(+1\frac{2}{3})^{-4} = (+\frac{5}{3})^{-4} = (+\frac{3}{5})^4 = +\frac{81}{625}$

ارائه علمی اعداد (Scientific Notation of Numbers)

چون می‌دانیم برای نوشتن و خواندن اعداد، چهار طبقه را قبول نموده اند که دوازده رقم را در بر می‌گیرد. گرچه این طبقه‌بندی در قدیم الی بیست‌ویک رقم یعنی الی طبقه صد کوترلیون نیز موجود بود. مثلاً عدد 725, 614, 200, 960, 051, 702, 143 چنین خوانده می‌شد: هفتصدوبیست‌وپنج کواترلیون، ششصدوچهارده ترلیون، دوصدتلیون، نوصدوشصت بلیون، پنجاه‌ویک ملیون هفتصد و دو هزار و یکصد و چهل‌وسه.

در اثر انکشاف ساینس این طبقه بندی نیز برای اعداد بسیار بزرگ کافی نبود، بناءً با استفاده از طاقت می‌توان اعداد بسیار بزرگ و یا اعداد بسیار کوچک را با در نظرداشت روندآف (Roundoff) یا خلص‌سازی ارقام اعشاری

به شکل علمی $(a\cdot 10^n)$ نوشت، طوریکه $1 \le a < 10$ و $n \in Z$ می‌باشد.

یعنی ضریب یک عدد علمی بین 1 الی 10 بوده و همیشه از ده کوچکتر در نظر گرفته شده و طاقت نما (نما) می‌تواند فقط اعداد کامل مثبت و منفی باشد.

مثال‌ها:

اعداد بزرگ ذیل را به شکل علمی بنویسید.

1) $1000000 = 10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10 = 10^6$

2) $200000000 = 2\cdot 100000000$
$= 2\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10$
$= 2\cdot 10^8$

3) $53000000000 = 53\cdot 1000000000$
$= 53\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10 = 53\cdot10^9$
$= 5.3\cdot10\cdot10^9 = 5.3\cdot10^{10}$

4) $721000000 = 721\cdot1000000$
$= 721\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10$
$= 721\cdot10^6 = 7.21\cdot100\cdot10^6 = 7.21\cdot10^2\cdot10^6 = 7.21\cdot10^8$

که می‌توان به طور ساده در جریان اجرای عملیات اعداد فوق را به شکل علمی چنین نوشت:

1) $1000000 = 10^6$

2) $200000000 = 2\cdot10^8$

3) $53000000000 = 5.3\cdot10^{10}$

4) $721000000 = 7.21\cdot10^8$

5) $9423000000000 = 9.423\cdot10^{12}$

6) $7946523000000 = 7.946523\cdot10^{12} \approx 9.95\cdot10^{12}$

7) $651327143795600 = 6.513271437956\cdot10^{14} \approx 6.51\cdot10^{14}$

8) $3428100042090041256321143 5$
$= 3.4281000420900412563211435\cdot10^{25} \approx 3.43\cdot10^{25}$

اعداد کوچک ذیل را به شکل علمی بنویسید.

1) $0.000003 = \frac{3}{1000000} = \frac{3}{10^6} = 3\cdot10^{-6}$

2) $0.000000045 = \frac{45}{1000000000} = \frac{45}{10^9} = 45\cdot10^{-9}$
$= 4.5\cdot10\cdot10^{-9} = 4.5\cdot10^{-8}$

3) $0.00000000000032514 = \frac{32514}{100000000000000000}$
$= \frac{32514}{10^{17}} = 32514\cdot10^{-17} = 3.2514\cdot10^4\cdot10^{-17}$
$= 3.2514\cdot10^{-13} \approx 3.25\cdot10^{-13}$

4) 0.000000007357295416
$= \frac{7357295416}{1000000000000000000} = \frac{7357295416}{10^{18}}$
$= 7357295416\cdot10^{-18} = 7.357295416\cdot10^9\cdot10^{-18}$
$\approx 7.36\cdot10^{-9}$

که می‌توان اعداد فوق را در جریان اجرای عملیات الجبری به شکل علمی طور ذیل نوشت:

1) $0.000003 = 3\cdot10^{-6}$

2) $0.000000045 = 4.5\cdot10^{-8}$

3) 0.00000000000032514
$= 3.2514\cdot10^{-13} \approx 3.25\cdot10^{-13}$

4) 0.000000007357295416
$= 7.357295416\cdot10^{-9} \approx 7.36\cdot10^{-9}$

5) 0.0000000006162650042
$= 6.162650042\cdot10^{-10} \approx 6.16\cdot10^{-10}$

قابل یادآوری می‌دانم این که امروز تمام کمپیوترها و ماشین‌های حساب علمی بر همین روش استوار بوده و تمام محاسبات علمی و جهانی به همین منوال قبول گردیده است.

جذر اعداد الجبری (Root of Signed Numbers)

جذر یک عدد الجبری عبارت از دریافت آن یکی از عوامل ضربی یکسان می‌باشد، طوریکه اگر همان عامل ضربی در خودش به قدر درجه جذر مربوطه ضرب گردد، عدد مجذور (عدد تحت جذر) را حاصل نماید. (جذری که درجه ندارد، درجه آن 2 قبول گردیده است)، مثلاً:

$$1)\ \sqrt{25}=\begin{cases}(+5)(+5)=25\\(-5)(-5)=25\end{cases}\Rightarrow\sqrt{25}=\pm5$$

به خاطر داشته باشید (5+) به نام جذر عمده و (5-) به نام جذر غیر عمده عدد (25) قبول گردیده است.

$$2)\ \sqrt{64}=\begin{cases}(+8)(+8)=64\\(-8)(-8)=64\end{cases}\Rightarrow\sqrt{64}=\pm8$$

$$3)\ \sqrt{\frac{16}{9}}=\begin{cases}(+\frac{4}{3})(+\frac{4}{3})=\frac{16}{9}\\(-\frac{4}{3})(-\frac{4}{3})=\frac{16}{9}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\frac{16}{9}}=\pm\frac{4}{3}$$

$$4)\ \sqrt{0.04}=\begin{cases}(+0.2)(+0.2)=0.04\\(-0.2)(-0.2)=0.04\end{cases}\Rightarrow\sqrt{0.04}=\pm0.02$$

$$5)\ \sqrt[3]{125}=\{(+5)(+5)(+5)=+125\Rightarrow\sqrt[3]{125}=+5$$

$$6)\ \sqrt[3]{-27}=\{(-3)(-3)(-3)=-27\Rightarrow\sqrt[3]{-27}=-3$$

$$7)\ \sqrt[4]{81}=\begin{cases}(+3)(+3)(+3)(+3)=81\\(-3)(-3)(-3)(-3)=81\end{cases}\Rightarrow\sqrt[4]{81}=\pm3$$

$$8)\ \sqrt[5]{32}=(+2)(+2)(+2)(+2)(+2)=32\Rightarrow\sqrt[5]{32}=+2$$

$$\sqrt[5]{-1024}=(-4)(-4)(-4)(-4)(-4)$$

$$=-1024\Rightarrow\sqrt[5]{-1024}=-4$$

به خاطر داشته باشید که اعداد منفی به تمام جذر نماهای جفت در ساحه اعداد حقیقی دارای جذر نمی‌باشد. که این نوع اعداد را اعداد موهومی میگویند که بعداً مورد مطالعه قرار خواهیم داد مثلاً:

$1)\ \sqrt{-49}=?\qquad(\ \ )(\ \ )=-49$

$2)\ \sqrt[4]{-16}=?\qquad(\ \ )(\ \ )(\ \ )(\ \ )=-16$

$3)\ \sqrt[6]{-1}=?\qquad(\ \ )(\ \ )(\ \ )(\ \ )(\ \ )(\ \ )=-1$

استخراج جذرالمربع اعداد
Computing the Square Root of Numbers

برای دریافت جذر دوم یک عدد، اولاً آنرا از راست به چپ ، دو،دو رقم جدا نموده آخرین عدد یا جوره اعداد جدا شده را در نظر گرفته، عددی را جستجو می‌نمائیم که مربع آن مساوی یا کوچکتر از عدد مورد نظر گردد، بعداً آن عدد دریافت شده را دو مراتبه با هم ضرب نموده حاصلضرب را تحت اولین جوره اعداد مینویسیم و عملیه تفریق را انجام می‌دهیم.

در مرحله دوم دو رقم بعدی جدا شده را پائین نموده و رقم یک‌های عدد طرف چپ را دوچند می‌نماییم و به حیث رقم خانه ده ها (یا صدها) قرار داده و برای دریافت رقم یک‌های آن مانند قبل عمل نموده، عملیه ضرب و تفریق را اجرا می‌نماییم و این عملیه را الی اخیر ادامه می‌دهیم. به همین ترتیب جهت دریافت جذور تقریبی اعداد اعشاریه گذاشته در هر مرتبهٔ اجرای عملیه دو صفر پایین می‌نماییم.

مثال‌ها:

جذرالمربع اعداد ذیل را دریابید.

مثال اول: $\sqrt{66049}=?$

	257
	66049
2	- 4
	260
4 (5)	- 225
	3549
50(7)	- 3549
	0

$$\Rightarrow\sqrt{66049}=257$$

مثال دوم: $\sqrt{10764961} = ?$

	3281
	10764961
3	- 9
	176
6 (2)	124
	5249
64(8)	- 5184
	6561
656(1)	- 6561
	0

$$\Rightarrow \sqrt{10764961} = 3281$$

مثال سوم: $\sqrt{25210441} = ?$

	5021
	25210441
5	- 25
	21
10(0)	00
	2104
100(2)	- 2004
	10041
1004(1)	- 10041
	0

$$\Rightarrow \sqrt{25210441} = 5021$$

مثال چهارم: $\sqrt{16016004} = ?$

	4002
	16016004
4	-16
	01
8(0)	- 00
	160
80(0)	- 000
	16004
800(2)	- 16004
	0

$$\Rightarrow \sqrt{16016004} = 4002$$

مثال پنجم: $\sqrt{3600} = ?$

	60
	3600
6	- 36
	0

$$\Rightarrow \sqrt{3600} = 60$$

مثال ششم: $\sqrt{1440000} = ?$

	1200
	1440000
1	- 1
	44
2(2)	44
	0

$$\Rightarrow \sqrt{1440000} = 1200$$

مثال هفتم: $\sqrt{256000000} = ?$

	16000
	256000000
1	1
2(6)	156
	- 156
	0

$\Rightarrow \sqrt{256000000} = 16000$

مثال هشتم: $\sqrt{45} = ?$

	6.708
	45
6	- 36
	900
12(7)	889
	1100
134(0)	0000
	110000
1340(8)	107264
	2736

$\Rightarrow \sqrt{45} \approx 6.708$

مثال نهم: $\sqrt{52103} = ?$

	228.26
	52103
2	- 4
	121
4(2)	- 84
	3703
44(8)	- 3584
	11900
456(2)	- 9124
	277600
4564(6)	- 273876
	3724

$\Rightarrow \sqrt{52103} \approx 228.26$

مثال دهم: $\sqrt{1000} = ?$

	31.62
	1000
3	- 9
	100
6(1)	- 61
	3900
62(6)	- 3756
	14400
632(2)	- 12644
	1756

$\Rightarrow \sqrt{1000} \approx 31.62$

هرگاه مجذور (عدد تحت جذر) یک عدد اعشاری باشد جهت دریافت جذر دوم آن ارقام صحیح عدد اعشاری از طرف راست به چپ و ارقام اعشاریه عدد اعشاری را از طرف چپ به راست دو، دو رقم جدا نموده، عیناً عملیه را مانند اعداد طبیعی انجام خواهیم داد و فقط علامه اعشاریه را در موقع آن بالا انتقال می‌دهیم، مثلاً:

1) $\sqrt{6.5536} = ?$

	2.56
	6.5536
2	- 4
	255
4(5)	-225
	3036
50(6)	- 3036
	0

$\Rightarrow \sqrt{6.5536} = 2.26$

2) $\sqrt{5.312} = ?$

	2.304
	5.3120
2	- 4
	1 31
4(3)	1 29
	220
46(0)	- 000
	22000
460(4)	- 18416
	3584

$\Rightarrow \sqrt{5.312} \approx 2.304$

3) $\sqrt{0.0025} = ?$

	0.05
	0.0025
5	- 25
	0

$\Rightarrow \sqrt{0.0025} = 0.05$

4) $\sqrt{0.00000144} = ?$

	0.0012
	0.00000144
1	- 1
	44
2(2)	- 44
	0

$\Rightarrow \sqrt{0.00000144} = 0.0012$

5) $\sqrt{34 \cdot 51 \cdot 24} = ?$

$$\sqrt{34 \cdot 51 \cdot 24} = \sqrt{2 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$
$$= 2 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 2$$
$$= 204$$

6) $\sqrt{7^3 \cdot 2^5 \cdot 14 \cdot 3^2} = ?$

$$\sqrt{7^3 \cdot 2^5 \cdot 14 \cdot 3^2} = \sqrt{7^2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3^2}$$
$$= 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$= 1176$$

مفهوم حروف (متحول) الجبری

در ریاضی برای بیان کلی آن مقدار یا کمیت که هدف، دریافت آن باشد سمبول‌های مانند a، b، c، x، y، z، α، β، θ و غیره استعمال می‌گردد، به نام حروف الجبری یاد می‌گردد که می‌تواند قیمت‌های مختلف به جای این حروف قرار گیرد در این حالت حروف را متحول می‌نامند.

حدود الجبری (Algebric Terms)

حد الجبری یک حاصل‌ضرب است که برعلاوه اعداد الجبری یک یا چند حرف متحول در آن موجود باشد، مانند:

$5a,$	$-7xy,$	$3a^2b^5c,$	$-\frac{3}{7}x^3z^2, \ldots$
حد الجبری	حد الجبری	حد الجبری	حد الجبری

که از نگاه ادبیات دری جمع حد الجبری را حدود الجبری می‌نامند.

ضریب حد الجبری: اعداد ثابت هر یک از حدود الجبری را ضریب همان حد الجبری می‌نامند، مثلاً:

در حد الجبری $5a$ ضریب آن +5

در حد الجبری $-7xy$ ضریب آن 7-

در حد الجبری $3a^2b^5c$ ضریب آن 3

در حد الجبری $-\frac{3}{7}x^3z^2$ ضریب آن $-\frac{3}{7}$ می‌باشد.

حدود مشابه و غیر مشابه الجبری

حدود الجبری زمانی مشابه گفته می‌شوند که عامل‌های حرفی آنها کاملاً با یک دیگر مساوی باشد. مانند:

حد الجبری $-7x^2$ با حد الجبری $-\frac{8}{5}x^2$

حد الجبری $+8ab^3$ با حد الجبری $+9ab^3$

حد الجبری $-4xy^2z$ با حد الجبری $\sqrt{2}xzy^2$ حدود مشابه گفته می‌شود.

و هرگاه حدود الجبری که قسمت حروف آن باهم مساوی نباشد، حدود غیر مشابه نامیده می‌شود، مانند:

حد الجبری $-5x$ با حدالجبری $-5y$

حد الجبری $+8ab$ با حدالجبری $+8ac$

حد الجبری $-\frac{7}{3}mn^2z$ با حد الجبری $-\frac{7}{3}mn^2$ حدود غیر مشابه نامیده می‌شوند.

افاده‌های الجبری (Algebric Expressions)

هرگاه یک حد الجبری با اعداد الجبری و یا حدود غیر مشابه الجبری به وسیله عملیه‌های اساسی مانند جمع، تفریق ضرب، تقسیم، توان و جذر با هم ارتباط داشته باشند، افاده‌ها یا جمله‌های الجبری نامیده می‌شوند، مانند:

$5x+7$	$\frac{2x+5}{x}$	$\sqrt{3x+4}$
$3a^2+2ab^2+1$	$\frac{3a^2+b}{2a+3b}$	$\sqrt[3]{5a^2-2a+7}$
$y^3+8y^2+\frac{3}{2}y-2$	$\frac{x^3-1}{2x^2+8}$	$\sqrt[4]{y^3+8y^5-1}$
$mx^3-2mx+5n^2+xy$		

طوریکه در مثال های فوق ملاحظه می‌گردد می‌توان افاده های الجبری را در اشکال تام، کسری و جذری ملاحظه نمود.

افاده‌های تام الجبری

به افاده‌های الجبری گفته می‌شود که در شکل کامل ارائه گردیده باشند که می‌توان افاده‌های تام الجبری را در شکل یک حده‌ها یا مونومیل‌ها (Monomials) و چندین حدها یا پولینومیل‌ها (Polynomials) مشاهده نمود، مانند:

افاده‌های تام الجبری:

مونومیل‌ها:
$-y$
$3mx$
$+\frac{3}{5}ab^2c$
$2x+4$

پولینومیل‌ها:
x^2-y^2
ax^2+bx+c
$2y^3-8y+\frac{5}{2}y^2+9xy$
$+5am^5-2a^2m^3+9a^3m^2-\frac{3}{11}a^4m+ma^5$
$2x^3+8x^5+3y^2-5y+1$

قابل یادآوریست این که:

پولینوم‌های دو حده الجبری را بینومیل‌ها (Binomials) نیز یـاد مـی‌نماینـد، مانند:

$2x+4,\ x^2-y^2,\ 5am^3-2ab^3c,\ x^3-1,...$

پولینوم‌های سه حده الجبری را ترینومیل‌ها (Trinomials) نیز یاد می‌نمایند، مانند:

$ax^2+bx+c,\ y^2-5y+1,\ m^3n-5mn^2+mn,...$

هرگاه در یک پولینوم الجبری توان حروف اعداد کسری باشند آنها را بـه نـام ملتی نوم (Multinome) نیز یاد می‌نمایند، مانند:

$ax^2+bx+c,\ 7y^{3/4}-2y^2+8y-3y^{1/3}+5,...$

درجهٔ یـــک پـــولینـــوم الجبـــری

The Degree of a Algebric Polynomial

درجهٔ یک پولینوم الجبری عبارت از عدد زیادترین طاقـت‌نمـا حـروف آن می‌باشد، مانند:

$5a^2+a+1 \rightarrow$ درجه دوم

$x^2-5x^3+8x+2 \rightarrow$ درجه سوم

$y^5-2y+7y^2-3 \rightarrow$ درجه پنجم

$9a^5-8ab^6+\frac{2}{3}a^3b^2-2a^3b^5+b^9$

از جنس a درجه 5، از جنس b درجه 9 و از جنس a و b درجه 8

و در یک مونوم الجبری حاصل جمع نماهای تمـام حـروف آن عبـارت از درجه مونوم می‌باشد، مثلاً:

$3a^5b^3 \Rightarrow 5+3=8 \rightarrow$ درجه هشت

$-12x^3y^2z^6 \Rightarrow 3+2+6=11 \rightarrow$ درجه یازده

پولینوم کامل: به افاده تام الجبری گفته می‌شود که تمام طاقت نماهـای حروف آن از بالا تا پایین موجود باشد، مانند:

$5x^3+8x^2-x+4$

$9a^4-5a^3b+\frac{2}{3}a^2b^2+8ab^3-b^4$

$y^5+3y^2-y^3+5y^4+2y-1$

هرگاه یک پولینوم کامل الجبری نامرتب باشد، می‌توان آن را به دو شکل نزولی Descending Order (از زیاد به طرف کم) و یا صـعودی (از کـم بـه طرف زیاد) Ascending Order چنین ترتیب نمود:

$y^5+3y^2-y^3+5y^4+2y-1$

$y^5+5y^4-y^3+3y^2+2y-1$ .... ترتیب نزولی

$-1+2y+3y^2-y^3+5y^4+y^5$ .... ترتیب صعودی

پولینوم ناقص: هر پولینوم الجبری که بعضی از طاقت نماهـای حـروف مربوطه آن موجود نباشد، پولینوم ناقص نامیده می‌شود، مانند:

$3x^4-2x^3+x+1$

$2a^5-a^3+2a^2-3$

که می‌توان پولینوم‌های ناقص را با گذاشتن صفر به حیـث ضـری همـان حرف که از حیث نما وجود ندارد، جبران نمود و آن را در شکل پولینـوم کامـل ارائه نماییم، مثلاً:

1) $3x^4-2x^3+x+1 \Rightarrow 3x^4-2x^3+0x^2+x+1$

2) $2a^5-a^3+2a^2-3 \Rightarrow 2a^5-0a^4-a^3+2a^2+0a-3$

3) $y^3-1 \Rightarrow y^3+0y^2+0y-1$

پولینوم‌های معادل

پولینوم‌های که عین متحول‌ها (حروف) را داشته و حدود مـشابه آن دارای ضرایب مساوی باشند، پولینوم‌های معادل نامیده می‌شوند، مانند:

$3x^2+5y^3,\ 4x^2+5y^2-z^2$

پولینوم ثابت: پولینوم که درجه آن صفر باشد یا ضرایب حدود آن صفر باشد پولینوم ثابت نامیده می‌شود مثلاً $8+5x^0$ و یا $0m^3-0m^2+0m+2$ و غیره ... .

پولینوم صفری: پولینوم که حد ثابت آن صفر باشد مانند $P(x)=0$ به خاطر داشته باشید که پولینوم صفری درجه ندارد.

پولینوم متجانس: پولینومی که طاقت نماهای تمام حدود آن باهم مساوی باشند پولینوم متجانس نامیده می‌شود، مانند: $7x^3-5y^3+z^3$

قیمت‌گذاری افاده‌های الجبری
Value of Algebric Expressions

وضع نمودن قیمت‌های عددی معین به عوض حروف در افاده‌های الجبری و محاسبه آن را قیمت‌گذاری افاده‌های الجبری می‌نامند و قیمت یک افاده الجبری مربوط به قیمت‌های هریک از حروف آن می‌باشد.

مثال‌ها:

مثال اول: افاده الجبری $3x^2-5x+9$ را در برابر $x=2$ قیمت‌گذاری نمایید.

$$\Rightarrow 3x^2-5x+9=3(2)^2-5(2)+9=3\cdot4-10+9$$
$$=12-10+9=11$$

مثال دوم: افاده الجبری $3m^3-2mn+n^2$ را در برابر $m=-2$ و $n=+5$ قیمت‌گذاری نمایید.

$$3m^3-2mn+n^2=3(-2)^3-2(-2)(+5)+(+5)^2$$
$$=3(-8)+20+25=-24+45$$
$$=+21$$

مثال سوم: هرگاه $f(y)=2y^4-3y+5$ باشد $f(-3)=?$

$$\Rightarrow f(y)=2y^4-3y+5$$
$$f(-3)=2(-3)^4-3(-3)+5$$
$$f(-3)=2(+81)+9+5$$
$$f(-3)=+162+14\Rightarrow f(-3)=+176$$

مثال چهارم: $H(x)=\frac{x^3-5x+1}{x^2+1}$ باشد $H(\frac{3}{2})=?$

$$\Rightarrow H(x)=\frac{x^3-5x+1}{x^2+1}$$

$$H(\frac{3}{2})=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3-5\left(\frac{3}{2}\right)+1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2+1}=\frac{\frac{27}{8}-\frac{15}{2}+1}{\frac{9}{4}+1}=\frac{\frac{27-60+8}{8}}{\frac{9+4}{4}}$$

$$=\frac{-25/8}{13/4}\Rightarrow H\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{25}{26}$$

مثال پنجم: افاده الجبری $\sqrt[3]{2x^2+5x+9}$ را دربرابر $x=+2$ قیمت گذاری نمائید.

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2x^2+5x+9}=\sqrt[3]{2(+2)^2+5(+2)+9}$$
$$=\sqrt[3]{8+10+9}=\sqrt[3]{27}=+3$$

قابل یادآوریست که بعضی از افاده های الجبری برای بعضی از قیمت‌های حروف (متحول) مربوطه خویش نا ممکن (بی مفهوم) می‌گردد. مثلاً:

مثال اول: افاده کسری الجبری $\frac{5x^2+x-1}{2x+10}$ را در برابر $x=-5$

قیمت‌گذاری نمایید.

$$\Rightarrow \frac{5x^2+x-1}{2x+10}=\frac{5(-5)^2+(-5)-1}{2(-5)+10}=\frac{125-6}{-10+10}=\frac{119}{0}=$$ (ناممکن)

مثال دوم: افاده جذری الجبری $\sqrt{3m^2-m-6}$ را در برابر $m=+1$ قیمت‌گذاری نمایید.

$$\sqrt{3m^2-m-6}=\sqrt{3(+1)^2-(+1)-6}=\sqrt{+3-7}=\sqrt{-4}=$$ (جذر حقیقی ندارد)

طاقت (Exponent)

هرگاه یک حد الجبری چندین مراتبه در خودش ضرب گردد، به شکل طاقت چنین تعریف گردیده است.

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots\cdots\cdots a}_{\text{n مرتبه}}=a^n$$

طوریکه $a\neq 0$ را به نام قاعده (Base) و n را به نام نما (طاقت نما) و افاده a^n را به نام طاقت Exponent می‌نامند.

قوانین طاقت

قانون ضرب: در عملیه ضرب، طاقت دارای دو قانون ذیل می‌باشد:

$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$ ....(1) قاعده‌های مساوی

$a^n\cdot b^n=(ab)^n$ ....(2) نماهای مساوی

در حالیکه $a\neq 0$ می‌باشد.

به طور مثال: طاقت‌های ذیل را ضرب نمایید:

1) $(2m)^5\cdot(2m)^8=(2m)^{5+8}=(2m)^{13}$

2) $(-3x)^{-11}\cdot(-3x)^{-6}=(-3x)^{(-11)+(-6)}=(-3x)^{-17}$

3) $(ax^2)^{17}\cdot(ax^2)^{-5}\cdot(ax^2)^4=(ax^2)^{(17)+(-5)+(4)}=(ax^2)^{16}$

4) $(2x)^5\cdot(3y)^5=[(2x)(3y)]^5=(6xy)^5$

5) $(-5m^2)^{-8}\cdot(+3n^3)^{-8}=[(-5m^2)(+3n^3)]^{-8}=(-15m^2n^3)^{-8}$

قانون نما در نما: هرگاه یک طاقت در نمای دیگر قرار داشته باشد چنین ساده می‌گردد:

$(a^n)^m=a^{n\cdot m}$ و $(a\neq 0)$

مثال‌ها:

طاقت‌های ذیل را ساده سازید.

$\langle 1\rangle: (P^3)^2=P^{3\cdot 2}=P^6$

$\langle 2\rangle: (x^{-3})^{-5}=x^{(-3)(-5)}=x^{+15}$

$\langle 3\rangle: (y^2)^{-7}=y^{(2)(-7)}=y^{-14}$

$\langle 4\rangle: (2m^3)^2=2^{1\cdot 2}m^{3\cdot 2}=2^2\cdot m^6=4m^6$

$\langle 5\rangle: (-4a^2b^5)^3=(-4)^{1\cdot 3}a^{2\cdot 3}b^{5\cdot 3}=(-4)^3a^6b^{15}=-64a^6b^{15}$

$\langle 6\rangle: (x^{-3})^{-5}=x^{(-3)(-5)}=x^{15}$

قانون تقسیم: در عملیه تقسیم، طاقت دو قانون ذیل را دارا می‌باشد:

$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ .... (1) قاعده‌های مساوی

$\frac{a^n}{b^n}=(\frac{a}{b})^n$ .... (2) نماهای مساوی

در حالیکه $a\neq 0$ می‌باشد.

مثال‌ها:

طاقت‌های ذیل را تقسیم نمایید:

$$\langle 1\rangle : \frac{x^{15}}{x^{7}} = x^{15-7} = x^{8}$$

$$\langle 2\rangle : \frac{(am)^{5}}{(am)^{8}} = (am)^{5-8} = (am)^{-3}$$

$$\langle 3\rangle : \frac{(3y)^{-6}}{(3y)^{2}} = (3y)^{-6-2} = (3y)^{-8}$$

$$\langle 4\rangle : \frac{(5ax^2)^{-10}}{(5ax^2)^{-17}} = (5ax^2)^{(-10)-(-17)} = (5ax^2)^{-10+17} = (5ax^2)^{7}$$

$$\langle 5\rangle : \frac{(mx)^3(mx)^{11}}{(m)^{14}(x)^{14}} = ?$$

$$= \frac{(mx)^{3+11}}{(m\cdot x)^{14}} = \frac{(mx)^{14}}{(mx)^{14}} = (mx)^{14-14} = (mx)^{0}$$

نتیجه: از عملیه تقسیم در طاقت نتایج ذیل حاصل می‌گردد.

الف: هر عدد حقیقی خلاف صفر یا حد الجبری به نمای صفر مساوی به یک است، مثلاً:

$$\frac{x^3}{x^3} = x^{3-3} = x^{0}\text{............(1)}$$ نظر به قاعده های مساوی

$$\frac{x^3}{x^3} = \left(\frac{x}{x}\right)^3 = 1^3 = 1\text{............(2)}$$ نظر به نما های مساوی

در نتیجه از مقایسه رابطه (1) و (2) می‌توان نوشت که $\boxed{x^0 = 1}$

مثال‌ها:

$$\langle 1\rangle : (2xy)^0 = 1$$

$$\langle 2\rangle : (-5ab^2)^0 = 1$$

$$\langle 3\rangle : \left(+\tfrac{8}{5}ax^3y^2\right)^0 = 1$$

ب: هر عدد حقیقی خلاف صفر یا حد الجبری به نمای منفی مساوی به معکوس همان عدد یا حد به نما مثبت می‌باشد.

مثال:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^3}{x^5} = x^{3-5} = x^{-2}\text{...............(1)}\\[2ex] \dfrac{x^3}{x^5} = \dfrac{x\cdot x\cdot x}{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x} = \dfrac{1}{x^2}\text{.............(2)}\end{array}\right\} \Rightarrow x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

پس بطور عموم می‌توان نوشت که: $a \neq 0$ و $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

به همین ترتیب می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \Rightarrow \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

مثال:

$$\langle 1\rangle : (2xy^2)^{-2} = \frac{1}{(2xy^2)^2} = \frac{1}{4x^2y^4}$$

$$\langle 2\rangle : (-3a^2b^3)^{-3} = \frac{1}{(-3a^2b^3)^3} = \frac{1}{-27a^6b^9} = -\frac{1}{27a^6b^9}$$

$$\langle 3\rangle : \left(\frac{2m}{3n}\right)^{-4} = \left(\frac{3n}{2m}\right)^4 = \frac{81n^4}{16m^4}$$

$$\langle 4\rangle : \left(-\frac{1}{2x}\right)^{-5} = (-2x)^5 = -32x^5$$

$$\langle 5\rangle : \left(-\frac{2}{5y^{-2}}\right)^{-2} = \left(-\frac{5y^{-2}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{5}{2y^2}\right)^2 = +\frac{25}{4y^4}$$

عملیات بالای افاده‌های تام الجبری
(Fundamental Operations on The Algebric Expressions)

اول: عملیه جمع (Addition of Algebric Expressions)

در عملیه جمع افاده های الجبری فقط می‌توان حـدود مـشابه الجبـری را باهم جمع نمود.

مثال‌ها:

۱- جمع مونوم ها:

مثال اول: ستونی

$$\begin{array}{r} +\ 8x \\ \underline{+\ 12x} \\ +20x \end{array}$$

سطری $(+8x)+(+12x)=+20x$

مثال دوم: سطری $(-5ab^2)+(-8ab^2)+(-35ab^2)=-48ab^2$

ستونی

$$\begin{array}{r} -\ 5ab^2 \\ -\ 8ab^2 \\ \underline{-35ab^2} \\ -48ab^2 \end{array}$$

مثال سوم:

ستونی

$$\begin{array}{r} -15ax^2y^3 \\ \underline{+18ax^2y^3} \\ +3ax^2y^3 \end{array}$$

سطری $(-15ax^2y^3)+(+18ax^2y^3)=+3ax^2y^3$

۲- جمع پولینوم ها:

مثال اول:

$A=2x^2+5x-1$

$B=8x-7x^2+12$

$A+B=?$

سطری $A+B=(2x^2+5x-1)+(8x-7x^2+12)=(-5x^2+13x+11)$

ستونی

$$\begin{array}{rrrr} A= & 2x^2 & +\ 5x & -\ 1 \\ B= & -7x^2 & +\ 8x & +12 \\ \hline A+B= & -5x^2 & +13x & +11 \end{array}$$

مثال دوم:

$A=5ab^2+8b^2+3c$

$B=12a^2+8ab^2-4c+1$

$A+B=?$

سطری

$$\begin{cases} A+B=(5ab^2+8b^2+3c)+(12a^2+8ab^2-4c+1) \\ A+B=12a^2+13ab^2+8b^2-c+1 \end{cases}$$

ستونی

$$\begin{array}{rrrrrr} A= & & +5ab^2 & +8b^2 & +3c & \\ B= & 12a^2 & +8ab^2 & & -4c & +1 \\ \hline A+B= & 12a^2 & +13ab^2 & +8b^2 & -\ c & +1 \end{array}$$

دوم: عملیه تفریق (Subtraction of Algebric Expressions)

در عملیه تفریق افاده‌های تام الجبری مانند اعداد علامه‌دار الجبری، فقـط علامه مفروق را تغییر داد، عیناً جمع الجبری را انجام می‌دهیم.

مثال:

۱- تفریق مونوم‌ها:

مثال اول:

سطری $(+8m^2)-(-5m^2)=+8m^2+5m^2=+13m^2$

ستونی

$$\begin{array}{r} +\ 8m^2 \\ \underline{\overset{-}{+}\ 5m^2} \\ +13m^2 \end{array}$$

مثال دوم:

سطری $\left(-4a^3b^2\right)-\left(+12a^3b^2\right)=-4a^3b^2-12a^3b^2=-16a^3b^2$

ستونی

$$\begin{array}{r} -\ 4a^3b^2 \\ \underline{\overset{+}{-}12a^3b^2} \\ -16a^3b^2 \end{array}$$

مثال سوم:

سطری

$$\left(+14.5x^2y^5\right)-\left(+5.3x^2y^5\right)=+14.5x^2y^5-5.3x^2y^5$$
$$=+9.2x^2y^5$$

ستونی

$$\begin{array}{r} +14.5x^2y^5 \\ \underline{\overset{+}{-}\ 5.3x^2y^5} \\ +\ 9.2x^2y^5 \end{array}$$

۲- تفریق پولینوم‌ها:

جز الف $A=3x+5y-z \quad A-B=?$

جز ب $B=5y-8z+3x \quad B-A=?$

حل (جز الف)

سطری

$$A-B=(3x+5y-z)-(5y-8z+3x)$$
$$A-B=3x+5y-z-5y+8z-3x \Rightarrow A-B=+7z$$

ستونی

$$\begin{array}{rl} A= & 3x+5y-\ z \\ B= & \underline{\overset{-}{+}3x\overset{-}{+}5y\overset{+}{-}8z} \\ A-B= & \qquad\qquad +7z \end{array}$$

حل (جز ب):

سطری

$$B-A=(5y-8z+3x)-(3x+5y-z)$$
$$B-A=5y-8z+3x-3x-5y+z=B-A=-7z$$

ستونی

$$\begin{array}{rl} B= & 5y\ -8z\ +3x \\ A= & \underline{\overset{-}{+}5y\ \overset{+}{-}\ z\ \overset{-}{+}3x} \\ B-A= & \qquad -7z \end{array}$$

1) $\left.\begin{array}{l} A=5m^3-2m+8 \\ B=3m^2+8m-1 \end{array}\right\} A-B=?$

سطری

$$A-B=\left(5m^3-2m+8\right)-\left(3m^2+8m-1\right)$$
$$A-B=5m^3-2m+8-3m^2-8m+1$$
$$A-B=5m^3-3m^2-10m+9$$

(ستونی)

$$\begin{array}{rl} A= & 5m^3 \qquad\qquad -\ 2m\ \ +8 \\ B= & \underline{\qquad\quad \overset{+}{-}\ 3m^2\ \overset{-}{+}\ \ 8m\ \ \overset{+}{-}\ 1} \\ A-B= & 5m^3\ -\ 3m^2\ -\ 10m\ \ +9 \end{array}$$

2)

$A=3a+5c$

$B=2a-b+4c$

$C=8b-10c$

جز الف: A+B-C=?

جز ب: 2A-3B=?

جز ج: 5A+2C=?

جز د: A-2B+C=?

در این حالات ساده‌ترین نوع جمع و تفریق برای پولینوم‌های الجبری به شکل سطری می‌باشد.

حل جز الف:

$$A+B-C=(3a+5c)+(2a-b+4c)-(8b-10c)$$
$$A+B-C=3a+5c+2a-b+4c-8b+10c$$
$$A+B-C=5a-9b+19c$$

حل جز ب:

$$2A-3B=2(3a+5c)-3(2a-b+4c)$$
$$2A-3B=6a+10c-6a+3b-12c$$
$$2A-3B=3b-2c$$

حل جز ج:

$$5A+2C=5(3a+5c)+2(8b-10c)$$
$$5A+2C=15a+25c+16b-20c$$
$$5A+2C=15a+16b+5c$$

حل جز د:

$$A-2B+C=(3a+5c)-2(2a-b+4c)+(8b-10c)$$
$$A-2B+C=3a+5c-4a+2b-8c+8b-10c$$
$$A-2B+C=-a+10b-13c$$

سوم: عملیه ضرب

Multiplication of Algebraic Expressions

برای اجرای عملیه ضرب در افاده‌های تام الجبری هریک از حدود افاده‌های مذکور را طوری با هم ضرب می‌نماییم که اولاً علامه‌ها، بعداً ضرایب و در اخیر حروف را به اساس قوانین طاقت ضرب می‌نماییم و جهت آموزش بهتر عملیه ضرب را در سه حالت ذیل اجرا می‌نماییم.

ضرب مونوم در مونوم

مثال‌ها:

1) $(-8xy)(+12x)=-96x^2y$

2) $(5a^3)(\frac{3}{5}b^2)=+3a^3b^2$

3) $(-4am^3)(-32a^2m)=+128a^3m^4$

4) $(+7x^2y)(-2xz^3)(+4y^5z)=-56x^3y^6z^4$

ضرب مونوم در پولینوم

مثال‌ها:

1) $(-5a^3)(a^2-2a+3)=-5a^5+10a^4-15a^3$

2) $(+\frac{3}{7}x^2y)(+14x^3-4xy-3y^2)$
$=+6x^5y-\frac{12}{7}x^3y^2-\frac{9}{7}x^2y^3$

3) $(-a^{2y})(a^y-a^{2y+5}-a^2)=-a^{3y}+a^{4y+5}+a^{2y+2}$

4) $e^x(e^x-1)+e^{-x}(e^{2x}+e^x+1)=?$
$=e^{2x}-e^x+e^x+e^0+e^{-x}=e^{2x}+e^{-x}+1$

ضرب پولینوم در پولینوم: در این حالت دقت به عمل آید تا هر یک از حدود پولینوم اول در تمام حدود پولینوم دومی ضرب گردد و در اخیر در صورتیکه حدود مشابه باشند می‌توان آنها را جمع نمود.

مثال‌ها:

1) $(3x+4)(x-5)=3x^2-15x+4x-20=3x^2-11x-20$

2) $(7y-3z)(y^2-3yz+z^2)=?$

$$= 7y^3 - 21y^2z + 7yz^2 - 3y^2z + 9yz^2 - 3z^3$$
$$= 7y^3 - 24y^2z + 16yz^2 - 3z^3$$

3) $(e^x - 1)(e^x + 1) = e^{2x} + e^x - e^x - 1 = e^{2x} - 1$

4) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1) = ?$
$$= x^4 + x^3 - x^2 - x^3 - x^2 + x + x^2 + x - 1$$
$$= x^4 - x^2 + 2x - 1$$

5) $(a^n + b^n)(a^n - b^n) = ?$
$$= a^{2n} - (ab)^n + (ab)^n - b^{2n} = a^{2n} - b^{2n}$$

چهـــــارم: عملیـــه تقسیـــــم

(Division of Algebraic Expressions)

تقسیم مونوم بالای مونوم: جهت اجرای این عملیه تقسیم مانند عملیه ضرب اولاً علامه ها، بعداً ضرایب و در اخیر حروف را به اساس قوانین طاقت تقسیم می‌نماییم.

مثال‌ها:

1) $(-72a^2m^3) \div (12am^2) = ?$
$$\frac{-72a^2m^3}{12am^2} = -6am$$

2) $(-\frac{7}{5}x^5y^2z) \div (-\frac{5}{3}xy^2) = ?$
$$= \frac{-\frac{7}{5}x^5y^2z}{-\frac{5}{3}xy^2} = +\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{5}x^4z = +\frac{21}{25}x^4z$$

3) $(5.4a^3b^2) \div (-0.3a^2b^3c^5) = ?$
$$\frac{5.4a^3b^2}{-0.3a^2b^3c^5} = \frac{-18a}{bc^5} = -18ab^{-1}c^{-5}$$

تقسیم پولینوم بالای مونوم: مانند عملیه تقسیم مونوم بر مونوم، هر یک از حدود پولینوم را بالای مونوم تقسیم می‌نماییم.

مثال‌ها:

1) $(35x^3y^2 - 14x^2y^4 + 21xy^3) \div (-7xy) = ?$
$$\frac{35x^3y^2 - 14x^2y^4 + 21xy^3}{-7xy} = \frac{35x^3y^2}{-7xy} - \frac{14x^2y^4}{-7xy} + \frac{21xy^3}{-7xy}$$
$$= -5x^2y + 2xy^3 - 3y^2$$

2) $(-54m^5 - 51m^3 + 8m - 2) \div (3m) = ?$
$$= \frac{-54m^5 - 51m^3 + 8m - 2}{3m} = \frac{-54m^5}{3m} - \frac{51m^3}{3m} + \frac{8m}{3m} - \frac{2}{3m}$$
$$= -18m^4 - 17m^2 + \frac{8}{3} - \frac{2}{3m}$$

3) $(75a^3b^3c^2 - 25a^2c^3 + 15b^4c^5) \div (-15a^2bc^2) = ?$
$$= \frac{75a^3b^3c^2 - 25a^2c^3 + 15b^4c^5}{-15a^2bc^2}$$
$$= \frac{75a^3b^3c^2}{-15a^2bc^2} - \frac{25a^2c^3}{-15a^2bc^2} + \frac{15b^4c^5}{-15a^2bc^2}$$
$$= -5ab^2 + \frac{5}{3}b^{-1}c - a^{-2}b^3c^3$$

تقسیم پولینوم بالای پولینوم: جهت اجرای عملیه تقسیم پولینوم‌های الجبری نکات ذیل را در نظر داشته باشید:

- اولاً پولینوم‌های مقسوم و مقسوم علیه را به اساس یک حرف ترتیب و کامل سازید.
- اولین حد مقسوم را بالای اولین حد مقسوم علیه به اساس عملیه تقسیم مونوم بر مونوم تقسیم نمایید.
- حاصل تقسیم مرحله (2) را به حیث خارج قسمت در نظر گرفته به تمام

حدود پولینوم مقسوم علیه ضرب نموده و در تحت پولینوم مقسوم بنویسید و عملیه تفریق را انجام دهید.

- عملیه مربوط مراحل (2) و (3) را تا زمانی ادامه بدهید که درجهٔ مقسوم کمتر از درجه مقسوم علیه گردد.
- آن حد اخیر که قابلیت تقسیم را بر مقسوم علیه ندارد، یعنی درجه آن کمتر است بحیث باقیمانده عملیه تقسیم در نظر گرفته می‌شود.

مثال‌ها:

پولینوم های ذیل را تقسیم نمائید؟

1) $(2x^3-5x^2+7x-20)\div(x-2)=?$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-5x^2+7x-20 & x-2 \\ \cline{2-2} \pm 2x^3 \mp 4x^2 & 2x^2-x+5 \\ \hline -\ x^2+7x-20 & \\ \mp\ x^2 \pm 2x & \\ \hline +5x-20 & \\ \pm 5x \mp 10 & \\ \hline -10 & \end{array}$$

2) $(14y^4-4y^2-21y^3+3+4y)\div(7y^3-2y-1)=?$

$$\begin{array}{l|l} 14y^4-21y^3-4y^2+4y+3 & 7y^3+0y^2-2y-1 \\ \cline{2-2} \mp 14y^4 \pm 0y^3 \mp 4y^2 \mp 2y & 2y-3 \\ \hline -21y^3+0y^2+6y+3 & \\ \mp 21y^3 \mp 0y^2 \pm 6y \pm 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3) $(15a^4+7a^2+31a^3-8a+3)\div(2a+5a^2-1)=?$

$$\begin{array}{l|l} 15a^4+31a^3+7a^2-8a+3 & 5a^2+2a-1 \\ \cline{2-2} \pm 15a^4 \pm 6a^3 \mp 3a^2 & 3a^2+5a \\ \hline +25a^3+10a^2-8a+3 & \\ \pm 25a^3 \pm 10a^2 \mp 5a & \\ \hline -3a+3 & \end{array}$$

باقیمانده $-3a+3$

4) $(3x^3+10y^3-5xy^2+x^2y)\div(x+2y)=?$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3+x^2y-5xy^2+10y^3 & x+2y \\ \cline{2-2} \pm 3x^3 \pm 6x^2y & 3x^2-5xy+5y^2 \\ \hline -5x^2y-5xy^2+10y^3 & \\ \mp 5x^2y \mp 10xy^2 & \\ \hline +5xy^2+10y^3 & \\ \pm 5xy^2 \pm 10y^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

تقسیم ترکیبی (Synthetic Division)

یک طریقه ساده برای تقسیم نمودن یک پولینوم الجبری مانند P(x) فقط بالای بینوم (x-a) می‌باشد، که جهت اجرای این عملیه تقسیم پولینوم مقسوم را مرتب و کامل نموده، ضرایب آن را منظماً روی یک خط افقی در نظر گرفته و بالای خلاف اشاره عدد ثابت مقسوم‌علیه یعنی (a) عملیه تقسیم ترکیبی را چنین اجرا می‌نماییم.

مثال‌ها:

مثال اول: $(2x^3-5x^2+7x-20)\div(x-2)=?$

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -5 & +7 & -20 & +2 \\ & +4 & -2 & +10 & \\ \hline 2 & -1 & +5 & \textcircled{-10} & \end{array}$$

باقیمانده

حاصل تقسیم $(2x^2-x+5)$

مثال دوم: $(5y^4-3y^2+8-y)\div(y+3)=?$

$(5y^4+0y^3-3y^2-y+8)\div(y+3)$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 5 & 0 & -3 & -1 & +8 & -3 \\ & -15 & +45 & -126 & +381 & \\ \hline 5 & -15 & +42 & -127 & \textcircled{+388} & \end{array}$$

باقیمانده

حاصل تقسیم $(5y^3-15y^2+42y-127)$

مثال سوم: $(2x^4-5x^2-6x^3+20x-15)\div(x-3)=?$

$(2x^4-6x^3-5x^2+20x-15)\div(x-3)$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -6 & -5 & +20 & -15 & +3 \\ & -6 & 0 & -15 & +15 & \\ \hline 2 & 0 & -5 & +5 & \textcircled{0} & \end{array}$$

باقیمانده

حاصل تقسیم $(2x^3-0x^2-5x+5)=(2x^3-5x+5)$

به خاطر داشته باشید که در عملیه تقسیم مقسوم مساویست به مقسوم‌علیه ضرب خارج قسمت جمع باقیمانده.

مثال‌ها:

$$\begin{array}{r|l} 25 & 4 \\ \hline \pm 24 & 6 \\ 1 & \end{array} \quad \Rightarrow 25=4\cdot 6+1$$

یعنی به طور عموم می‌توان گفت که هرگاه پولینوم $p(x)$ بالای بینوم (x-a) تقسیم گردد، طوریکه حاصل تقسیم $Q_{(x)}$ و باقیمانده R گردد، پس می‌توان نوشت:

$P(x)=(x-a)\cdot Q(x)+R$

هرگاه باقیمانده مساوی به صفر گردد $(R=0)$ می‌توان پولینوم مقسوم را به دو قوس مقسوم‌علیه و خارج قسمت نیز تجزیه نمود، یعنی:

$P(x)=(x-a)\cdot Q(x)+R$

$P(x)=(x-a)\cdot Q(x)+0$

$\Rightarrow P(x)=(x-a)\cdot Q(x)$

مثال‌ها:

مثال اول: $(3x^2+10x+8)\div(x+2)=?$

$$\begin{array}{rrr|r} 3 & +10 & +8 & -2 \\ & -6 & -8 & \\ \hline 3 & +4 & \textcircled{0} & \end{array}$$

باقیمانده

خارج قسمت $(3x+4)$

$\Rightarrow 3x^2+10x+8=(x+2)(3x+4)$

مثال دوم: $(3m^4-6m^2+7m-3m^3-1)\div(m-1)=?$

$(3m^4-3m^3-6m^2+7m-1)\div(m-1)=?$

3	−3	−6	+7	−1	+1
	+3	0	−6	+1	
3	0	−6	+1	باقیمانده (0)	

حاصل تقسیم $3m^3+0m^2-6m+1=3m^3-6m+1$

$$\Rightarrow 3m^4-3m^3-6m^2+7m-1=(m-1)(3m^3-6m+1)$$

قضیه باقیمانده (Remainder Theorem)

هرگاه پولینوم $P(x)$ بالای بینوم $x-a$ تقسیم گردد جهت دریافت باقیمانده عملیه تقسیم به خلاف اشاره عدد ثابت مقسوم‌علیه یعنی (a) پولینوم مقسوم را قیمت‌گذاری می‌نمایم یعنی باقیمانده عبارت از $P(a)$ می‌باشد زیرا:

$$P(x)=(x-a)\cdot Q(x)+R$$
$$P(a)=(a-a)\cdot Q(a)+R$$
$$P(a)=0\cdot \quad Q(a)+R\Rightarrow P(a)=R$$

اگر $P(a)=R=0$ گردد در این صورت پولینوم $P(x)$ بالای بینوم $x-a$ پوره قابل تقسیم می‌باشد.

مثال‌ها:

مثال اول: در عملیه تقسیم $(2x^3-5x^2+7x-20)\div(x-2)$ باقیمانده عملیه تقسیم را دریابید:

$$P(x)=2x^3-5x^2+7x-20$$
$$P(2)=2(2)^3-5(2)^2+7(2)-20$$
$$P(2)=2\cdot 8-5\cdot 4+14-20$$
$$P(2)=16-20-6\Rightarrow P(2)=-10$$

مثال دوم: در عملیه تقسیم $(3y^5-7y^2+8y-1)\div(y+1)$ باقیمانده عملیه تقسیم را دریابید:

$$P(y)=3y^5-7y^2+8y-1$$
$$P(-1)=3(-1)^5-7(-1)^2+8(-1)-1$$
$$P(-1)=3(-1)-7(+1)-8-1$$
$$P(-1)=-3-7-9\Rightarrow P(-1)=-19$$

مثال سوم: در عملیه تقسیم $(m^4-625)\div(m-5)$ باقیمانده عملیه تقسیم را دریابید.

$$P(m)=m^4-625$$
$$P(5)=(5)^4-625\Rightarrow P(5)=625-625\Rightarrow P(5)=0$$

در نتیجه پولینوم m^4-625 بالای $(m-5)$ پوره قابل تقسیم می‌باشد.

عملیات مشترک و رفع قوس‌ها در افاده‌های تام الجبری

هرگاه در یک افادهٔ تام الجبری از عملیات جمع، تفریق، ضرب و تقسیم به شمول قوس‌ها استفاده گردیده باشد، جهت اجرای درست عملیات اولاً قوس‌ها بعداً عملیات ضرب و تقسیم و بالاخره عملیات جمع و تفریق انجام می‌گردد.

مثال‌ها:

افاده‌های الجبری ذیل را ساده سازید؟

$\langle 1\rangle: 2x(x-5)+5x-1=?$

$=2x^2-10x+5x-1\Rightarrow 2x^2-5x-1$

$\langle 2\rangle: 3y-\{3(2y+1)-2(3y+1)-y\}=?$

$=3y-\{6y+3-6y-2-y\}=3y-\{-y+1\}$

$=3y+y-1=4y-1$

$\langle 3\rangle: 2m[m^2-3\{(m^3-1)\div(m-1)-m\}]=?$

$=2m[m^2-3\{m^2+m+1-m\}]=2m[m^2-3\{m^2+1\}]$

$=2m[m^2-3m^2-3]=2m[-2m^2-3]$

$=-4m^3-6m$

$\langle 4\rangle : a^2-[2b+\{(a-b)(a-1)-(2a+b)(b+1)\}+b^2]$
$=a^2-[2b+\{a^2-a-ab+b-(2ab+2a+b^2+1)\}+b^2]$
$=a^2-[2b+\{a^2-a-ab+b-2ab-2a-b^2-1\}+b^2]$
$=a^2-[2b+a^2-3a-3ab+b-b^2-1+b^2]$
$=a^2-[3b+a^2-3a-3ab-1]$
$=a^2-3b-a^2+3a+3ab+1=3a-3b+3ab+1$

مطابقت‌ها یا عینیت‌ها (Quantities)

دو افاده الجبری که نظر به قیمت‌های مختلف ولی همزمان حروف (متحولین) خویش دارای عین قیمت باشند، مطابقت یا عینیت الجبری نامیده می‌شوند.

به عباره دیگر: مساوات دو افاده الجبری که برای تمام قیمت‌های متحول باهم مساوی باشد، مطابقت گفته می‌شود مثلاً: افاده‌های الجبری x^2-6x+9 و $(x-3)^2$ یک مطابقت الجبری است، زیرا:

x^2-6x+9
$x=1\Rightarrow (1)^2-6(1)+9=4$
$x=-3\Rightarrow (-3)^2-6(-3)+9$
$=+9+18+9=+36$
$x=0\Rightarrow (0)^2-6(0)+9=+9$
$x=\frac{5}{2}\Rightarrow (5/2)^2-6(5/2)^2+9$
$=\frac{25}{4}-15+9=\frac{25}{4}-6$
$=\frac{25-24}{4}=1$

$(x-3)^2$
$x=1\Rightarrow (1-3)^2=(-2)^2=\ +4$
$x=-3\Rightarrow (-3-3)^2=(-6)^6$
$=+36$
$x=0\Rightarrow (0-3)^2=(-3)^2=\ +9$
$x=\frac{5}{2}\Rightarrow (\frac{5}{2}-3)^2=\ (-\frac{1}{2})^2$
$=\ +\frac{1}{4}$

درنتیجه می‌توان گفت که افاده های الجبری $(x-3)^2\equiv x^2-6x+9$ یک مطابقت الجبری میباشند.

اینک سه نوع مطابقت‌های الجبری را به‌طور مفصل مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

اول: انکشاف بینوم های $(a\pm b)^n$

چون می‌دانیم که:

$\langle 1\rangle : (a+b)^2=(a+b)(a+b)$
$=a^2+ab+ab+b^2$
$=a^2+2ab+b^2$

$\langle 2\rangle : (a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$
$=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$
$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$\langle 3\rangle : (a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3$$
$$= (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$$
$$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

به همین ترتیب بینوم‌های دیگری آن را نیز می‌توان دریافت نمود.

پس به طور عموم جهت انکشاف این نوع بینوم‌ها بدون اجراء عملیه ضرب نکات ذیل را در نظر داشته باشید:

۱. حد اول را a^n و حد اخیر را b^n بنوسید.

۲. برای دریافت ضریب حدود مابعد نمای حد اول را ضرب ضریب خودش نموده، تقسیم نوبت آن می‌نماییم.

۳. از نمای حد اول یک کم نموده به نمای حد دوم علاوه می‌کنیم، طوریکه مجموعه نماهای آن در هر حد (n) گردد.

۴. عملیه‌های مربوط حالات (۲) و (۳) را تا زمانی ادامه می‌دهیم که حد دوم b^n گردد.

۵. تعداد حدود انکشاف یافته (n+1) جمله می‌باشد.

۶. در انکشاف بینوم‌های $(a+b)^n$ علایم تمامی حدود انکشاف یافته مثبت و در انکشاف $(a-b)^n$ علایم حدود انکشاف یافته، به طور متناوب مثبت، منفی می‌باشد، یعنی:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$\vdots$

$\vdots$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2}a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n$$

به همین ترتیب:

$$(a-b)^0 = 1$$
$$(a-b)^1 = a-b$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$
$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

$\vdots$

$\vdots$

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{2}a^{n-3}b^3 + \cdots + (-1)^n b^n$$

مثلث پاسکال (Pascale Triangle)

پاسکال عالم فرانسوی جهت دریافت ضرایب حدود انکشاف یافته در بینوم‌های فوق‌الذکر مثلث زیر را ارائه نمود، طوریکه هر سطر آن با عدد (۱) شروع و به عدد (۱) ختم می‌گردد و سایر جملات این مثلث در هر سطر با مجموعه جملات طرفین آن جمله در سطر ماقبل آن برابر است:

$n=0$ ……………………1

$n=1$ ……………………1 1

$n=2$ ……………………1 2 1

$n=3$ ……………………1 3 3 1

$n=4$ ……………………1 4 6 4 1

$n=5$ ……………………1 5 10 10 5 1

$n=6$ ……………………1 6 15 20 15 6 1

$n=7$ ……………………1 7 21 35 35 21 7 1

$n=8$ ……………………1 8 28 56 70 56 28 8 1

$n=9$ …1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

⋮

به خاطر داشته باشید در صورتیکه $a=b=1$ باشد مجموع ضرایب حالت انکشاف $(a+b)^n=2^n$ می‌باشد.

مثال‌ها:

مثال اول: مجموعه ضرایب انکشاف $(a+b)^4$ را دریابید.

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$2^4=1+4+6+4+1=16$$

مثال دوم: مجموعه ضرایب انکشاف $(2x+5y)^3$ را دریابید.

$$(2\cdot1+5\cdot1)^3=(2+5)^3=7^3=343$$

مثال سوم: مجموعه ضرایب انکشاف $(7m-4n)^5$ را دریابید.

$$(7\cdot1-4\cdot1)^5=(7-4)^5=(3)^5=243$$

فکتوریل (Factorial): عبارت از حاصل ضرب اعداد مسلسل طبیعی می‌باشد، یعنی:

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots\cdots n$$

قابل یادآوریست این که 1=!0 قبول گردیده است.

مثال‌ها:

$$1!=1$$
$$2!=1\cdot2=2$$
$$3!=1\cdot2\cdot3=6$$
$$4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$$
$$5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$$
$$6!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720$$

⋮

به خاطر داشته باشید که با در نظرداشت فکتوریل می‌توان بینوم‌های $(a\pm b)^n$ را چنین انکشاف داد:

$$(a+b)^n=\frac{a^n}{0!}+\frac{n}{1!}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots2\cdot1}{n!}b^n$$

همچنان:

$$(a-b)^n=\frac{a^n}{0!}-\frac{n}{1!}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots2\cdot1}{n!}b^n$$

مثال‌ها:

مثال (۱):

$$(a+b)^4=\frac{a^4}{0!}+\frac{4}{1!}a^3b+\frac{4\cdot3}{2!}a^2b^2+\frac{4\cdot3\cdot2}{3!}ab^3+\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4!}b^4$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

مثال (۲):

$$(a-b)^5=\frac{a^5}{0!}-\frac{5}{1!}a^4b+\frac{5\cdot4}{2!}a^3b^2-\frac{5\cdot4\cdot3}{3!}a^2b^3+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4!}ab^4-\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5!}b^5$$

$$(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$$

مثال‌ها:

بینوم‌های ذیل را انکشاف دهید.

$$\langle1\rangle:(a+2c)^3=a^3+3a^2\cdot(2c)^1+3a^1\cdot(2c)^2+(2c)^3$$
$$=a^3+6a^2c+12ac^2+8c^3$$

$$\langle2\rangle:(x-y^2)^4=x^4-4x^3(y^2)^1+6x^2(y^2)^2-4x^1(y^2)^3+(y^2)^4$$
$$=x^4-4x^3y^2+6x^2y^4-4xy^6+y^8$$

$$\langle3\rangle:(m+p)^5=m^5+5m^4p+10m^3p^2+10m^2p^3+5mp^4+p^5$$

$$\langle4\rangle:(y-1)^6=y^6-6y^5\cdot1+15y^4\cdot1^2-20y^3\cdot1^3+15y^2\cdot1^4-6y^1\cdot1^5+1^6$$
$$=y^6-6y^5+15y^4-20y^3+15y^2-6y+1$$

$$\langle5\rangle:(3x+5y)^2=(3x)^2+2(3x)^1(5y)^1+(5y)^2$$
$$=9x^2+30xy+25y^2$$

$$\langle6\rangle:(a+b+c)^2=a^2+2a^1(b+c)^1+(b+c)^2$$
$$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

دریافت حد خواسته شده در انکشاف بینوم‌های $(a+b)^n$

قبل از رسیدن به این هدف ترکیب اعداد طبیعی (n) بالای (r) را چنین تعریف می‌نماییم:

$$C\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$ طوریکه $n\geq r$ و $n,r\in N$ است.

مثال‌ها:

ترکیب های ذیل را دریابید؟

$$\langle1\rangle:C\binom{7}{5}=\frac{7!}{(7-5)!\cdot5!}=\frac{7\cdot6\cdot5!}{2\cdot1\cdot5!}=21$$

$$\langle2\rangle:C\binom{10}{7}=\frac{10!}{(10-7)!\cdot7!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7!}{3\cdot2\cdot1\cdot7!}=120$$

$$\langle3\rangle:C\binom{8}{8}=\frac{8!}{(8-8)!\cdot8!}=\frac{1}{0!}=\frac{1}{1}=1$$

$$\langle4\rangle:C\binom{9}{0}=\frac{9!}{(9-0)!\cdot0!}=\frac{9!}{9!\cdot1}=\frac{1}{1}=1$$

از مثال‌های فوق دو نتیجه ذیل نیز به دست می‌آید:

$$C\binom{n}{n}=1\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$C\binom{n}{0}=1\cdots\cdots\cdots(2)$$

همچنان ترکیب‌های ذیل باهم مساوی اند.

$$C\binom{n}{r}=C\binom{n}{n-r}$$

$$C\binom{7}{4}=C\binom{7}{7-4}$$

$$C\binom{7}{4}=\frac{7!}{(7-4)!\cdot 4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4!}=35$$

$$C\binom{7}{7-4}=C\binom{7}{3}=\frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=35$$

با در نظر داشت ترکیب انکشاف بینوم $(a+b)^n$ عبارت از:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n}a^{n-n}b^n$$

مثال‌ها:

$$(a+b)^3=\binom{3}{0}a^3+\binom{3}{1}a^{3-1}b+\binom{3}{2}a^{3-2}b^2+\binom{3}{3}a^{3-3}b^3$$

$$(a+b)^3=1\cdot a^3+3a^2b+3ab^2+1\cdot a^0b^3$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

به همین ترتیب با استفاده از ترکیب اعداد می‌توان حد خواسته شـده را در انکشاف بینومیل‌های $(a+b)^n$ از رابطه ذیل به دست آورد:

$$C\binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r$$

$$\text{ویا}\quad \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}\cdot a^{n-r}\cdot b^r$$

به خاطر داشته باشید که حد خواسته شده (r+1) می‌باشد، زیرا تعداد حدود انکشاف $(a+b)^n$ به تعداد (n+1) جمله است.

مثال ها:

مثال اول: در انکشاف $(a+b)^{15}$ جمله یازدهم آن را دریابید؟

$$\left.\begin{matrix}n=15\\ r+1=11\\ \Rightarrow r=10\end{matrix}\right\}\begin{aligned}&=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}a^{n-r}\cdot b^r=\frac{15!}{(15-10)!\cdot 10!}a^{15-10}\cdot b^{10}\\&=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 10!}a^5\cdot b^{10}=3003a^5b^{10}\end{aligned}$$

مثال دوم: در انکشاف $(x+y)^{20}$ جمله هژدهم آنرا دریابید؟

$$\left.\begin{matrix}n=20\\ r+1=18\\ \Rightarrow r=17\\ a=x\\ b=y\end{matrix}\right\}\begin{aligned}&=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}a^{n-r}\cdot b^r=\frac{20!}{(20-17)!\cdot 17!}x^{20-17}\cdot y^{17}\\&=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 17!}x^3\cdot y^{17}=1140x^3y^{17}\end{aligned}$$

مثال سوم: در انکشاف $(p^2+2m)^{12}$ جمله نهم را دریابید؟

$$\left.\begin{matrix}n=12\\ r+1=9\\ \Rightarrow r=8\\ a=p^2\\ b=2m\end{matrix}\right\}\begin{aligned}&=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}a^{n-r}\cdot b^r=\frac{12!}{(12-8)!\cdot 8!}(p^2)^{12-8}\cdot(2m)^8\\&=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 8!}(p^2)^4\cdot(256m^8)=126720p^8m^8\end{aligned}$$

مثال چهارم: در انکشاف $(3x-1)^9$ جمله چهارم آنرا را دریابید؟

$$\left.\begin{matrix}n=9\\ r+1=4\\ \Rightarrow r=3\\ a=3x\\ b=-1\end{matrix}\right\}\begin{aligned}&=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}a^{n-r}\cdot b^r=\frac{9!}{(9-3)!\cdot 3!}(3x)^{9-3}\cdot(-1)^3\\&=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(3x)^6\cdot(-1)=-84\cdot 729x^6=-61236x^6\end{aligned}$$

مثال پنجم: در انکشاف $(2m-k)^{10}$ جمله یازدهم آن را را دریابید؟

$$\left.\begin{array}{l} n=10 \\ r+1=11 \\ \Rightarrow r=10 \\ a=2m \\ b=-k \end{array}\right\} \begin{array}{l} =\dfrac{n!}{(n-r)!\cdot r!}a^{n-r}\cdot b^{r}=\dfrac{10!}{(10-10)!\cdot 10!}(2m)^{10-10}\cdot(-k)^{10} \\ =\dfrac{1}{0!}(2m)^{0}\cdot\left(+k^{10}\right)=1\cdot 1\cdot k^{10}=k^{10} \end{array}$$

دوم: انکشاف بینوم‌های a^n-b^n به‌شکل حاصل ضرب دو قوس

برای انکشاف این نوع بینوم‌ها به شکل حاصل‌ضرب دو قوس سه حالت ذیل را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: هرگاه n یک عدد جفت یا طاق باشد. بینوم‌های فوق طوری ذیل به دو قوس انکشاف می‌نمایند.

$$a^1-b^1=a-b$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$
$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+\cdots\cdots+b^{n-1})$$

حالت دوم: هرگاه n یک عدد جفت باشد بر علاوه حالت اول به شکل ذیل نیز تجزیه می گردد:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$
$$a^4-b^4=(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$$
$$a^6-b^6=(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+$$
$$+a^{n-5}b^4-\cdots\cdots-b^{n-1})$$

حالت سوم: هرگاه n به عوامل ضربی خویش تجزیه گردد، تعداد این نوع تجزیه متعدد می‌گردد.

مثال‌ها:

$$\langle 1\rangle: a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$a^4-b^4=(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$a^4-b^4=(a^2)^2-(b^2)^2=(a^2-b^2)(a^2+b^2)\cdots\cdots(3)$$

$$\langle 2\rangle: x^6-y^6=(x-y)(x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5)..\ (1)$$
$$x^6-y^6=(x+y)(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5)\cdot\cdot(2)$$
$$x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3-y^3)(x^3+y^3)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$
$$x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)\cdots(4)$$

مثال‌ها: بینوم‌های ذیل را به اساس مطابقت a^n-b^n به دو قوس انکشاف دهید:

$$\langle 1\rangle: x^3-8=?$$
$$=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$$
$$\langle 2\rangle: 4m^2-25=?$$
$$=(2m)^2-5^2=(2m-5)(2m+5)$$

$\langle 3\rangle : 32 - c^{10} = ?$

$= 2^5 - (c^2)^5$

$= (2 - c^2)\{2^4 + 2^3 \cdot c^2 + 2^2 \cdot (c^2)^2 + 2^1 \cdot (c^2)^3 + (c^2)^4\}$

$= (2 - c^2)(16 + 8c^2 + 4c^4 + 2c^6 + c^8)$

$\langle 4\rangle : x^6 - y^9 = ?$

$= (x^2)^3 - (y^3)^3 = (x^2 - y^3)\{(x^2)^2 + (x^2)^1(y^3)^1 + (y^3)^2\}$

$= (x^2 - y^3)(x^4 + x^2y^3 + y^6)$

$\langle 5\rangle : y^4 - 81 = ?$

$\Rightarrow y^4 - 3^4 = (y-3)(y^3 + y^2 \cdot 3^1 + y^1 \cdot 3^2 + 3^3)$

$= (y-3)(y^3 + 3y^2 + 9y + 27) \cdots (1)$

$\Rightarrow y^4 - 81 = (y+3)(y^3 - 3y^2 + 9y - 27) \cdots (2)$

$\Rightarrow y^4 - 81 = (y^2)^2 - (9)^2$

$= (y^2 - 9)(y^2 + 9) \cdots\cdots\cdots (3)$

$\Rightarrow y^4 - 81 = (y^2 - 3^2)(y^2 + 9)$

$= (y-3)(y+3)(y^2+9) \cdots\cdots (4)$

$\langle 6\rangle : m^6 - 1 = ?$

$\Rightarrow m^6 - 1^6 = (m-1)(m^5 + m^4 \cdot 1 + m^3 \cdot 1^2 + m^2 \cdot 1^3 + m^1 \cdot 1^4 + 1^5)$

$= (m-1)(m^5 + m^4 + m^3 + m^2 + m + 1) \cdots (1)$

$\Rightarrow m^6 - 1 = (m+1)(m^5 - m^4 + m^3 - m^2 + m - 1) \cdots (2)$

$\Rightarrow m^6 - 1 = (m^3)^2 - (1)^2 = (m^3 - 1)(m^3 + 1) \cdots (3)$

$\Rightarrow m^6 - 1 = (m^2)^3 - (1)^3 = (m^2 - 1)\left[(m^2)^2 + (m^2)^1 \cdot 1^1 + 1^2\right]$

$= (m^2 - 1)(m^4 + m^2 + 1) \cdots\cdots (4)$

سوم: انکشاف مطابقت $a^n + b^n$ به شکل حاصل ضرب دو قوس

حالت اول: هرگاه n یک عدد طاق باشد می‌توان بینوم‌های فوق الذکر را به شکل حاصل ضرب دو قوس چنین انکشاف داد:

$a^1 + b^1 = a + b$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

$a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

$\vdots$

$a^n + b^n = (a-b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + a^{n-5}b^4 - \cdots\cdots + b^{n-1})$

مثال‌ها:

بینوم‌های ذیل را به دو قوس انکشاف دهید:

1) $a^3 + 125$

$a^3 + 5^3 = (a+5)(a^2 - a \cdot 5 + 5^2)$

$= (a+5)(a^2 - 5a + 25)$

2) $x^3 + \frac{1}{8} = ?$

$x^3 + (\frac{1}{2})^3 = (x + \frac{1}{2})\left\{x^2 - x \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2\right\}$

$= (x + \frac{1}{2})(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})$

3) $y^5 + 243 = ?$

$y^5 + 3^5 = (y+3)(y^4 - y^3 \cdot 3 + y^2 \cdot 3^2 - y \cdot 3^3 + 3^4)$

$= (y+3)(y^4 - 3y^3 + 9y^2 - 27y + 81)$

4) $m^{10} + n^{15} = ?$

$$(m^2)^5+(n^3)^5=(m^2+n^3)\{(m^2)^4-(m^2)^3(n^3)^1$$
$$+(m^2)^2(n^3)^2-(m^2)^1(n^3)^3+(n^3)^4\}$$
$$=(m^2+n^3)(m^8n^3+m^4n^6-m^2n^9+n^{12})$$

5) $p^7+1=?$

$$p^7+1^7=(p+1)(p^6-p^5\cdot 1+p^4\cdot 1^2-p^3\cdot 1^3$$
$$+p^2\cdot 1^4-p^1\cdot 1^5+1^6)$$
$$=(p+1)(p^6-p^5+p^4-p^3+p^2-p+1)$$

حالت دوم: هرگاه n یک عدد جفت باشد، نمی توانیم بینوم‌های a^n+b^n را به شکل حاصل ضرب دو قوس (برای اعداد نسبتی) انکشاف داد.

فقط می‌توانیم بینوم‌های فوق را به شکل تفاضل مربعات (برای اعداد غیرنسبتی) به دو قوس مزدوج چنین تجزیه نمود.

$$\because (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \Rightarrow a^2+b^2=(a+b)^2-(\sqrt{2ab})^2$$
$$a^2+b^2=(a+b+\sqrt{2ab})(a+b-\sqrt{2ab})$$

به همین ترتیب به طور عموم برای n تمام اعداد جفت می‌توان چنین نوشت:

$$a^n+b^n=(a^{n/2}+b^{n/2}+\sqrt{2(ab)^{n/2}})(a^{n/2}+b^{n/2}-\sqrt{2(ab)^{n/2}})$$

به طور مثال:

1) $x^4+y^4=(x^2+y^2+\sqrt{2(xy)^2})(x^2+y^2-\sqrt{2(xy)^2})$

2) $x^6+1=(x^3+1+\sqrt{2x^3})(x^3+1-\sqrt{2x^3})$

3) $m^8+16=(m^4+4+\sqrt{2\cdot m^4\cdot 4})(m^4+4-\sqrt{2\cdot m^4\cdot 4})$

$$=(m^4+4+\sqrt{8m^4})(m^4+4-\sqrt{8m^4})$$

4) $a^2+25=(a+5+\sqrt{10a})(a+5-\sqrt{10a})$

5) $a^2x^6+49y^6=?$

$$(ax^3)^2+(7y^3)^2=(ax^3+7y^3+\sqrt{2\cdot ax^3\cdot 7y^3})$$
$$(ax^3+7y^3-\sqrt{2\cdot ax^3\cdot 7y^3})$$
$$=(ax^3+7y^3+\sqrt{14ax^3y^3})(ax^3+7y^3-\sqrt{14ax^3y^3})$$

مطابقت‌های مشهور

جهت اجرای عملیات در ریاضیات مطابقت‌های مشهور ذیل را همیشه به خاطر داشته باشید:

۱) مربع کامل

$$\begin{cases}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\end{cases}$$

۲) مکعب کامل

$$\begin{cases}(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{cases}$$

۳) تفاضل مربعات

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

۴) مجموعه مربعات

$$a^2+b^2=(a+b+\sqrt{2ab})(a+b-\sqrt{2ab})$$

۵) تفاضل مکعبات

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

۶) مجموعه مکعبات

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

۷) تفاضل مربعات دو قوس مزدوج

$$\begin{cases}(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab \\ (a-b)^2 - (a+b)^2 = -4ab\end{cases}$$

۸) مجموعه مربعات دو قوس مزدوج

$$\left.\begin{matrix}(a+b)^2 + (a-b)^2 \\ (a-b)^2 + (a+b)^2\end{matrix}\right\} = 2(a^2 + b^2)$$

تجزیه پولینوم‌های الجبری
(Factorization of Algebraic Pilynomials)

تجزیه یک افاده الجبری عبارت ازدریافت چند افاده دیگر به شکل عوامل ضربی می‌باشد. که می‌توان جهت تجزیه پولینوم‌های الجبری حالات ذیـل را مورد مطالعه قرار داد:

تجزیه نوع اول: هرگاه در یک پولینوم الجبری یک عامل مشترک بـین تمام حدود آن موجود شده بتواند، می‌توان آنرا مشترک گرفت و پولینوم مذکور را تجزیه نمود. یعنی: $ax + ay + az = a(x + y + z)$

مثال‌ها:

پولینوم‌های ذیل را تجزیه نمایید.

1) $ax + bx = x(a+b)$

2) $6m^2 - 12mn = 6m(m - 2n)$

3) $8x^2y^3 - 12x^3y^2 + 20x^2y^5 = 4x^2y^2(2y - 3x + 5y^3)$

4) $35m^2n^5 - 49mn^2 - \frac{14}{5}m^3n^2 = 7mn^2(5mn^3 - 7 - \frac{2}{5}m^2)$

5) $5x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_1^3x_2^3 = x_1(5x_1 - 3x_2 + 4x_1^2x_2^3)$

تجزیه نوع دوم: اگر پولینوم‌های الجبری در شـکل بینـوم‌هـای تفاضـل مربعات قرار داشته باشد، می‌تـوان آن را بـه شـکل حاصـل ضـرب دو قـوس مزدوج تجزیه نمود. یعنی: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

مثال‌ها:

پولینوم‌های ذیل را تجزیه نمایید.

1) $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$

2) $e^{2x} - 1 = ?$
$= (e^x)^2 - 1^2$
$= (e^x + 1)(e^x - 1)$

3) $a^3 - ab^2 = ?$
$= a(a^2 - b^2)$
$= a(a-b)(a+b)$

4) $p^4 - y^6 = ?$
$= (p^2)^2 - (y^3)^2$
$= (p^2 - y^3)(p^2 + y^3)$

5) $u^2 - 0.81 = ?$
$= u^2 - (0.9)^2$
$= (u - 0.9)(u + 0.9)$

6) $\frac{1}{16}x^2 - 0.36 = ?$
$= (\frac{1}{4}x)^2 - (0.6)^2$
$= (\frac{1}{4}x + 0.6)(\frac{1}{4}x - 0.6)$

7) $(m-3n)^2 - 9k^2 = ?$
$= (m-3n)^2 - (3k)^2$
$= (m - 3n + 3k)(m - 3n - 3k)$

8) $(2x - 5y)^2 - (3x + y)^2 = ?$

$$=\{(2x-5y)-(3x+y)\}\{(2x-5y)+(3x+y)\}$$
$$=(2x-5y-3x-y)(2x-5y+3x+y)$$
$$=(-x-6y)(5x-4y)$$

9) $y^8-5=?$
$$=(y^4)^2-(\sqrt{5})^2$$
$$=(y^4-\sqrt{5})(y^4+\sqrt{5})$$

10) $x^{6n}-y^{12e}=?$
$$=(x^{3n})^2-(y^{6e})^2$$
$$=(x^{3n}-y^{6e})(x^{3n}+y^{6e})$$

تجزیه نوع سوم: (تجزیه به کمک مربع کامل) هرگاه یک پولینوم الجبری در شکل ترینوم‌های درجه دوم $a^2\pm 2ab+b^2$ قرار داشته باشد می‌توان آن را به شکل حاصل ضرب دو قوس یکسان طوری تجزیه نمود، که جذر حد اول و حد سوم و علامه از حد وسط را در شکل مربع کامل در نظر می‌گیریم به شرط این که حاصل‌ضرب دو چند جذر حد اول با حد سوم حد وسط را حاصل نمایید. یعنی:

چون می‌دانیم که: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$$\Rightarrow a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$

جذر ↓ a → 2 ← b ↓ جذر

به همین ترتیب: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$$\Rightarrow a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(a-b)(a-b)$$

جذر ↓ a → 2 ← b ↓ جذر

مثال‌ها: ترینوم‌های ذیل را به اساس مربع کامل به دو قوس تجزیه نمایید.

1) $x^2-10x+25=?$
$$\Rightarrow x^2-10x+25=(x-5)^2=(x-5)(x-5)$$

2) $y^2+y+\frac{1}{4}=?$
$$\Rightarrow y^2+y+\frac{1}{4}=(y+\frac{1}{2})^2=(y+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2})$$

3) $9m^2-6m+1=?$
$$\Rightarrow 9m^2-6m+1=(3m-1)^2=(3m-1)(3m-1)$$

4) $16x^3+24x^2+9x=?$
$$\Rightarrow 16x^3+24x^2+9x=x(16x^2+24x+9)$$
$$=x(4x+3)^2$$
$$=x(4x+3)(4x+3)$$

5) $a^2+2ab^2+b^4-c^4=?$
$$\Rightarrow a^2+2ab^2+b^4-c^4=(a+b^2)^2-(c^2)^2$$
$$=(a+b^2-c^2)(a+b^2+c^2)$$

6) $12xy-y^2-36x^2+1=?$
$$\Rightarrow 1-(36x^2-12xy+y^2)=1^2-(6x-y)^2$$
$$=\{1+(6x-y)\}\{1-(6x-y)\}=(1+6x-y)(1-6x+y)$$

7) $x^2-3x+4=?$

در شکل مربع کامل قرار ندارد، زیرا حاصل‌ضرب دو چند جذر اول و سوم حد وسط را حاصل نمی‌دهد.

8) $a^2-8a-16=?$

در شکل مربع کامل قرار ندارد، زیرا 16- جذرالمربع ندارد.

9) $-y^2+14y+49=?$

در شکل مربع کامل قرار ندارد، زیرا y^2- جذرالمربع ندارد.

تجزیه نوع چهارم (تجزیه گروپی): اگر بین تمام حدود یک پولینوم الجبری یک حد مشترک به اساس تجزیه نوع اول موجود نباشد. و امکان طوری مساعد گردد که بین حدود پولینوم مذکور به شکل دسته ها یا گروپ های جداگانه یک حد مشترک دریافت شده بتواند، به شرط آنکه در مرحله بعدی یک عامل مشترک در پولینوم مذکور دریافت گردد، می‌توان پولینوم را طوری ذیل به دو قوس تجزیه نمود:

$ax+ay+bx+by=?$
$=ax+ay+bx+by$
$=a(x+y)+b(x+y)$
$=(x+y)(a+b)$

مثال‌ها:

پولینوم‌های الجبری ذیل را در شکل تجزیه گروپی به دو قوس تجزیه نمایید.

1) $5x^3-x^2-10x+2=?$
$\Rightarrow x^2(5x-1)-2(5x-1)$
$=(5x-1)(x^2-2)$

2) $2m^3-6m^2+5m-15=?$
$\Rightarrow 2m^2(m-3)+5(m-3)$
$=(m-3)(2m^2+5)$

3) $x^2-2x+xy-y+1=?$
$\Rightarrow x^2-2x+1+xy-y$
$=(x-1)^2+y(x-1)$
$=(x-1)\{(x-1)+y\}$
$=(x-1)(x+y-1)$

4) $m^2+2mp-2np-n^2=?$
$\Rightarrow m^2-n^2+2mp-2np$
$=(m-n)(m+n)+2p(m-n)$
$=(m-n)(m+n+2p)$

5) $x^3-3x^2+3x-1=?$
$\Rightarrow x^3-1-3x^2+3x$
$=(x-1)(x^2+x+1)-3x(x-1)$
$=(x-1)(x^2+x+1-3x)$
$=(x-1)(x^2-2x+1)$
$=(x-1)(x-1)^2$
$=(x-1)^3$

6) $3x^3+x-3xy^2+y=?$
$\Rightarrow 3x^3-3xy^2+x+y$
$=3x(x^2-y^2)+(x+y)$
$=3x(x-y)(x+y)+(x+y)$
$=(x+y)\{3x(x-y)+1\}$
$=(x+y)(3x^2-3xy+1)$

تجزیه نوع پنجم: (تجزیه ترینوم‌های درجه دوم x^2+Sx+P)

در این نوع تجزیه حد سوم (P) را طوری به دو حد تجزیه می‌نماییم که حاصل‌ضرب شان (P) و حاصل‌جمع (حاصل‌تفریق) شان حد وسط (S) را بدهد و جهت آموزش بهتر می‌توان این تجزیه را در چهار حالت ذیل در نظر گرفت:

حالت I: توجه (x^2+Sx+P):

در این حالت (P) طوری به دو عامل ضربی تجزیه گردد که حاصل جمع

شان حد وسط را حاصل دهد و از جانبی چون علامه (P) مثبت است عوامل تجزیه شده هم علامه و با در نظر علامه حد وسط (S+) هردو عامل باید مثبت در نظر گرفته شود.

مثال‌ها:

ترینوم‌های ذیل را به دو قوس تجزیه نمائید.

$\langle 1 \rangle : x^2 + 5x + 6$ → 2, 3

$= (x+2)(x+3)$

$\langle 2 \rangle : y^2 + 8x + 7$ → 1, 7

$= (y+1)(y+7)$

$\langle 3 \rangle : m^2 + 13m + 42$ → 6, 7

$= (m+6)(m+7)$

حالت II: $(x^2 - Sx + P)$

در این حالت (P) را طوری به دو عامل ضربی تجزیه می‌نماییم که حاصل جمع شان حد وسط را بدهد و از جانبی چون علامه (P) مثبت است، عوامل تجزیه شده هم علامه و با در نظرداشت علامه حد وسط (S-) هردو عامل باید منفی در نظر گرفته شود.

مثال‌ها:

ترینوم‌های ذیل را به دو قوس تجزیه نمایید.

$\langle 1 \rangle : x^2 - 14x + 48$ → 6, 8

$= (x-6)(x-8)$

$\langle 2 \rangle : a^2 - 20a + 51$ → 17, 3

$= (a-17)(a-3)$

$\langle 3 \rangle : m^2 - 3m + 2$ → 1, 2

$= (m-1)(m-2)$

حالت III: $(x^2 + Sx - P)$

در این حالت (P) را طوری به دو عامل ضربی تجزیه می‌نماییم که حاصل تفریق شان حد وسط را بدهد و از جانبی چون علامه (P) منفی است، عوامل تجزیه شده مختلف‌العلامه و با در نظرداشت علامه وسط (S+) باید عامل بزرگ علامه مثبت و عامل کوچک علامه منفی را داشته باشد.

مثال‌ها: ترینوم‌های ذیل را به دو قوس تجزیه نمایید.

$\langle 1 \rangle : y^2 + y - 12$ → بزرگ + ; 4, 3

$= (y+4)(y-3)$

$\langle 2 \rangle : x^2 + 2x - 8$ → بزرگ + ; 2, 4

$= (x-2)(x+4)$

$\langle 3 \rangle : p^2 + 6p - 91$ → بزرگ + ; 13, 7

$= (p+13)(p-7)$

حالت IV: $(x^2 - Sx - P)$

در این حالت (P) را طوری به دو عامل ضربی تجزیه خواهیم نمود که حاصل تفریق شان حد وسط را بدهد و از جانبی چون علامه (P) منفی است، عوامل تجزیه شده مختلف‌العلامه و با در نظرداشت علامه وسط (S-) باید عامل بزرگ علامه منفی و عامل کوچک علامه مثبت داشته باشد.

مثال‌ها:

ترینوم‌های ذیل را به دو قوس تجزیه نمایید.

$\langle 1 \rangle : x^2 - x - 30$

بزرگ - 5 6

$= (x+5)(x-6)$

$\langle 2 \rangle : y^2 - 4y - 12$

بزرگ - 6 2

$= (y-6)(y+2)$

$\langle 3 \rangle : m^2 - 7m - 44$

بزرگ - 4 11

$= (m+4)(m-11)$

هرگاه در این نوع تجزیه ضریب حد اول (± 1) نباشد یعنی ترینوم در شکل عمومی $ax^2 + bx + c$ در حالیکه $a \neq \pm 1$ قرار داشته باشد می‌توان آن را به دو طریقه ذیل تجزیه نمود:

طریقه اول: تجزیه به کمک ضرب ac ممکن می‌گردد که این حاصل ضرب بدو عامل طوری تجزیه گردد که حاصل جمع یا تفریق شان حد وسط را بدهد.

مثال‌ها:

ترینوم‌های درجه دوم ذیل را به دو قوس تجزیه نمایید.

$\langle 1 \rangle : 2x^2 + 7x + 5 = ?$

$2 \cdot 5 = 10 \to +2, +5$

$= 2x^2 + 2x + 5x + 5$

$= 2x(x+1) + 5(x+1)$

$= (x+1)(2x+5)$

$\langle 2 \rangle : 3y^2 - 8y + 4 = ?$

$3 \cdot 4 = 12 \to -2, -6$

$= 3y^2 - 2y - 6y + 4$

$= y(3y-2) - 2(3y-2)$

$= (3y-2)(y-2)$

$\langle 3 \rangle : 5m^2 + 21m + 4 = ?$

$5 \cdot 4 = 20 \to +1, +20$

$= 5m^2 + 1m + 20m + 4$

$= m(5m+1) + 4(5m+1)$

$= (5m+1)(m+4)$

$\langle 4 \rangle : 8p^2 - 10p + 3 = ?$

$8 \cdot 3 = 24 \to -6, -4$

$= 8p^2 - 6p - 4p + 3$

$= 2p(4p-3) - (4p-3)$

$= (4p-3)(2p-1)$

طریقه دوم: تجزیه به کمک چلیپا طوری ممکن می‌گردد که در شاخه اول (چپ) آن حد اول و در شاخه دوم (راست) آن حد سوم تجزیه گردد طوریکه مجموعه (حاصل تفریق) الجبری حاصل‌ضرب شکل افقی حدود، حد وسط را حاصل نمایید.

مثال اول: $2x^2 + 7x + 5 = ?$

$2x \quad +1 = +2x$

$x \quad +5 = +5x$

$+7x$

$= (2x+5)(x+1)$

مثال دوم: $3y^2 - 8y + 4 = ?$

$3y \quad -2 = -6y$

$y \quad -2 = -2y$

$-8y$

$= (3y-2)(y-2)$

مثال سوم: $5m^2+21m+4=?$

$$\begin{array}{llll} 5m & +4 & = & +20m \\ 1m & +1 & = & +1m \\ & & & +21m \end{array}$$

$=(5m+1)(m+4)$

مثال چهارم: $8p^2-10p+3=?$

$$\begin{array}{llll} 2p & -3 & = & -6p \\ 4p & -1 & = & -4p \\ & & & -10p \end{array}$$

$=(2p-1)(4p-3)$

مثال پنجم: $3x^2-4x-4=?$

$$\begin{array}{llll} 3x & -2 & = & -6x \\ x & +2 & = & +2x \\ & & & -4x \end{array}$$

$=(3x+2)(x-2)$

مثال ششم: $7y^2+5y-2=?$

$$\begin{array}{llll} 7y & +1 & = & +7y \\ y & -2 & = & -2y \\ & & & +5y \end{array}$$

$=(7y-2)(y+1)$

مثال هفتم: $4m^2-3m-10=?$

$$\begin{array}{llll} 4m & -2 & = & -8m \\ m & +5 & = & +5m \\ & & & -3m \end{array}$$

$=(4m+5)(m-2)$

تجزیه نوع ششم: (تجزیه به کمک تکمیل مربع)

هرگاه یک ترینوم درجه دوم الجبری به هیچ طریقـه قابـل تجزیـه نباشـد می‌توان با استفاده از طریقه تکمیل مربع آنها را با در نظرداشت مراحل ذیل به دو قوس تجزیه نمود.

۱- ضریب حد اول یک گردد.

۲- حد وسط را نصف نمایید.

۳- حد نصف شده را مربع نمایید.

۴- حد مربع شده را در ترینوم جمع و تفریق نمایید.

۵- سه حد اول را در شکل مربع کامل بنوسید.

۶- تمام افاده را در شکل تفاضل مربعات تبدیل نموده، به دو قوس مزدوج تجزیه نمایید.

مثال‌ها:

ترینوم‌های ذیل را به کمک تکمیل مربع به دو قوس تجزیه نمایید.

$\langle 1 \rangle : x^2-6x-1=?$

$\frac{6}{2}=3\rightarrow(3)^2=9$

$=x^2-6x+9-9-1$

$=(x-3)^2-10$

$=(x-3)^2-(\sqrt{10})^2$

$=(x-3+\sqrt{10})(x-3-\sqrt{10})$

$$\langle 2\rangle : 3x^2+12x-5=?$$

$$=3\left(x^2+4x-\frac{5}{3}\right)$$

$$\frac{4}{2}=2\rightarrow(2)^2=4$$

$$=3\left(x^2+4x+4-4-\frac{5}{3}\right)$$

$$=3\left\{(x+2)^2-\left(4+\frac{5}{3}\right)\right\}$$

$$=3\left\{(x+2)^2-\left(\frac{17}{3}\right)\right\}$$

$$=3\left\{(x+2)^2-\left(\sqrt{\frac{17}{3}}\right)^2\right\}$$

$$=3\left(x+2+\sqrt{\frac{17}{3}}\right)\left(x+2-\sqrt{\frac{17}{3}}\right)$$

$$=\left(3x+6+3\sqrt{\frac{17}{3}}\right)\left(x+2-\sqrt{\frac{17}{3}}\right)$$

$$\langle 3\rangle : 5x^2+9x+2=?$$

$$=5\left(x^2+\frac{9}{5}x+\frac{2}{5}\right)$$

$$\frac{\frac{9}{5}}{2}=\frac{9}{10}\rightarrow\left(\frac{9}{10}\right)^2=\frac{81}{100}$$

$$=5\left(x^2+\frac{9}{5}x+\frac{81}{100}-\frac{81}{100}+\frac{2}{5}\right)$$

$$=5\left\{\left(x+\frac{9}{10}\right)^2-\left(\frac{81}{100}-\frac{2}{5}\right)\right\}$$

$$=5\left\{\left(x+\frac{9}{10}\right)^2-\left(\frac{81-40}{100}\right)\right\}$$

$$=5\left\{\left(x+\frac{9}{10}\right)^2-\left(\frac{41}{100}\right)\right\}$$

$$=5\left\{\left(x+\frac{9}{10}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{41}}{10}\right)^2\right\}$$

$$=5\left\{\left(x+\frac{9}{10}+\frac{\sqrt{41}}{10}\right)\left(x+\frac{9}{10}-\frac{\sqrt{41}}{10}\right)\right\}$$

$$=5\left\{\left(x+\frac{9+\sqrt{41}}{10}\right)\left(x+\frac{9-\sqrt{41}}{10}\right)\right\}$$

$$=\left(5x+\frac{9+\sqrt{41}}{2}\right)\left(x+\frac{9-\sqrt{41}}{10}\right)$$

کوچکترین مضرب مشترک افاده های تام الجبری
(Last Common Multiplication of Algebraic Expressions)

عبارت از دریافت کوچکترین افاده تام الجبری است که بر تمام افاده‌های تام داده شده الجبری پوره قابل تقسیم باشد، که می‌توان با استفاده از مطابقت‌ها و تجزیه پولینوم‌های الجبری آن‌ها را دریافت نمود.

مثال‌ها:

کوچکترین مضرب مشترک افاده‌های تام الجبری ذیل را دریافت نمایید.

$\langle 1\rangle : 5x^3,\quad 15x^2y,\quad 10xy^2 \Rightarrow (30x^3y^2)\ L.C.M$

$\langle 2\rangle : 8am^3,\quad 4am^5,\quad 2am^2 \Rightarrow (8am^5)\ L.C.M$

$\langle 3\rangle : 6a^2b^3,\quad 7b^2c,\quad 2abc^2 \Rightarrow (42a^2b^3c^2)\ L.C.M$

$\langle 4\rangle : x+y,\quad x-y \Rightarrow (x^2-y^2) L.C.M$

$\langle 5\rangle : (a+b)^2,\quad a^2-b^2 = ?$

$= (a+b)^2,\quad (a+b)(a-b) \Rightarrow \{(a+b)^2(a-b)\}\ L.C.M$

$\langle 6\rangle : m^3+n^3,\quad (m+n),\quad (m^2-mn+n^2) = ?$

$= (m+n)(m^2-mn+n^2),\quad (m+n),\quad (m^2-mn+n^2)$

$\Rightarrow (m^3+n^3)\ L.C.M$

$\langle 7\rangle : x^2-x,\quad x^2+x,\quad x^2-1 = ?$

$= x(x-1),\quad x(x+1),\quad (x-1)(x+1) \Rightarrow \{x(x-1)(x+1)\}$

$= x(x^2-1)$

$\Rightarrow (x^3-x)\ L.C.M$

$\langle 8\rangle : a^3-ab^2,\quad a^2-2ab+b^2,\quad a^2+ab = ?$

$= a(a^2-b^2),\quad (a-b)^2,\quad a(a+b)$

$= a(a-b)(a+b),\quad (a-b)^2,\quad a(a+b)$

$= \{a(a-b)^2(a+b)\}\ L.C.M$

$\langle 9\rangle : x^2-3x+2,\quad x^2+x-6 = ?$

$= (x-2)(x-1),\quad (x+3)(x-2)$

$\Rightarrow \{(x-2)(x-1)(x+3)\}\ L.C.M$

$\langle 10\rangle : 2x^2+x-3,\quad x^2-1,\quad 2x^2+5x+3 = ?$

$= (2x+3)(x-1),\quad (x-1)(x+1),\quad (2x+3)(x+1)$

$\Rightarrow \{(2x+3)(x-1)(x+1)\}\ L.C.M$

افاده‌های کسری یا نسبتی (ناطق) الجبری

هرگاه افاده‌های الجبری در شکل $\frac{a}{b}$ طوریکه $b \neq 0$ است، ارائه گردیده باشد، افاده‌های کسری یا نسبتی الجبری نامیده می‌شوند؛ مانند:

$$\frac{2x^2+5}{3x-1} \quad , \quad 3x-1 \neq 0$$

$$\frac{3m^2+5mn-n^3}{5m+2n} \quad , \quad 5m+2n \neq 0$$

$$\frac{3ax^3+5a^2x-2}{x^3+5a} \quad , \quad x^3+5a \neq 0$$

$$\vdots$$

به خاطر داشته باشید که یک کسر الجبری زمانی مساوی به صفر است که صورت کسر مساوی به صفر و مخرج آن خلاف صفر باشد، یعنی:

$$\frac{a}{b}=0 \Rightarrow a=0\,,\, b\neq 0$$

مثال‌ها:

1) $\frac{5x+4}{x-2}=0 \Rightarrow 5x+4=0\,,\, x-2\neq 0$

2) $\frac{a^2-2ab+5b^2}{2a+b}=0 \Rightarrow a^2-2ab+5b^2=0\,,\, 2a+b\neq 0$

3) $\frac{x^3-y^3}{x+y}=0 \Rightarrow x^3-y^3=0\,,\, x+y\neq 0$

و هرگاه مخرج کسر مساوی به صفر گردد، کسر مذکور ناممکن می‌گردد.

یعنی در کسر $\frac{a}{b}$ هرگاه $b=0$ باشد. نا ممکن $=\frac{a}{0}$

مثال‌ها:

در کسر الجبری $\frac{3x+5}{x-2}$ اگر $x=2$ گردد کسر مذکور ناممکن می‌گردد. زیرا:

$$\frac{3x+5}{x-2}=\frac{3(2)+5}{2-2}=\frac{6+5}{0}=\frac{11}{0} \text{ (ناممکن)}$$

همچنان در کسر الجبری $\frac{6a+2b}{2a+b}$ اگر $a=-\frac{b}{2}$ گردد کسر مذکور ناممکن می‌گردد، زیرا:

$$\frac{6a+2b}{2a+b}=\frac{6(-\frac{b}{2})+2b}{2(-\frac{b}{2})+b}=\frac{-3b+2b}{-b+b}=\frac{-b}{0} \text{ (ناممکن)}$$

اختصار کسرهای الجبری
Reduction of Algebraic Fractions

عملیه تقسیم نمودن یک کسر الجبری توسط عوامل مشترک آنها (یعنی تقسیم بر بزرگترین قاسم مشترک ، صورت و مخرج یک کسر) عبارت از اختصار کسر ها نامیده می‌شود که می‌توان با استفاده از مطابقت‌ها و تجزیه پولینوم‌های الجبری عوامل مشترک صورت و مخرج کسر را دریافته و آنها را اختصار نمود.

مثال‌ها:

کسرهای الجبری ذیل را اختصار نمایید:

1) $\frac{x^2+x}{x+1}=?$

$$\Rightarrow \frac{x^2+x}{x+1}=\frac{x(x+1)}{x+1}=x$$

2) $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}=?$

$=\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}=\dfrac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{a}{a-b}$

3) $\dfrac{y^3-1}{y^2-1}=?$

$=\dfrac{y^3-1}{y^2-1}=\dfrac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)}=\dfrac{y^2+y+1}{y+1}$

4) $\dfrac{x^2-x-20}{x^2-6x+5}=?$

$=\dfrac{x^2-x-20}{x^2-6x+5}=\dfrac{(x-5)\,(x+4)}{(x-5)\,(x-1)}=\dfrac{x+4}{x-1}$

5) $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-2x+1}=?$

$=\dfrac{x^2(x-1)-(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{(x^2-1)\,(x-1)}{(x-1)\,(x-1)}=\dfrac{(x-1)\,(x+1)}{x-1}=x+1$

عملیات اساسی بالای کسرهای الجبری

Foundamental Operations on The Algebraic Fractions

اول- عملیه ضرب کسرهای الجبری (Product of Fractions)

حاصل ضرب کسر الجبری $\dfrac{a}{b}$ و $\dfrac{c}{d}$ درحالیکه $b,d\neq 0$ اند، عبارت از:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\quad,\quad b,d\neq 0$$

در نظر داشته باشید که قبل از اجـرای عملیـه ضـرب در صـورت امکـان اختصار نموده، بعداً عملیه ضرب را اجرا نمایید.

مثال‌ها:

کسرهای الجبری ذیل را باهم ضرب نمایید:

1) $\dfrac{5x^3y}{2a^2b^5}\cdot\dfrac{8ab^3}{15x^2y^3}=\dfrac{4x}{3ab^2y^2}$

2) $\dfrac{x^2-4y^2}{x^3+x}\cdot\dfrac{x^2+1}{x+2y}=?$

$=\dfrac{(x-2y)(x+2y)}{x(x^2+1)}\cdot\dfrac{x^2+1}{x+2y}=\dfrac{x-2y}{x}$

3) $\dfrac{m^3-8}{m^2+2m+4}\cdot\dfrac{2m}{m^2+2m}=?$

$=\dfrac{(m-2)\,(m^2+2m+4)}{m^2+2m+4}\cdot\dfrac{2m}{m(m+2)}=\dfrac{2m-4}{m+2}$

4) $\dfrac{3x^2+5x-2}{2x^2-x-1}\cdot\dfrac{x^2-1}{3x^2-4x+1}\cdot\dfrac{2x^2+x}{x^3+2x^2}=?$

$=\dfrac{(x+2)\,(3x-1)}{(x-1)\,(2x+1)}\cdot\dfrac{(x-1)\,(x+1)}{(3x-1)\,(x-1)}\cdot\dfrac{x(2x+1)}{x^2(x+2)}$

$=\dfrac{x+1}{x(x-1)}=\dfrac{x+1}{x^2-x}$

دوم- عملیه تقسیم کسرهای الجبری (Division of Fractions)

حاصل‌تقسیم کسرهای الجبـری $\dfrac{a}{b}$ و $\dfrac{c}{d}$ درحالیکـه $b,c,d\neq 0$ انـد، عبارت از:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}\quad,\quad b,c\neq 0$$

مثال‌ها:

کسرهای الجبری ذیل را تقسیم نمایید:

1) $\dfrac{35a^2b}{22x^3y}\div\dfrac{7ab^2}{33x^2y^2}=?$

$=\dfrac{35a^2b}{22x^3y}\cdot\dfrac{33x^2y^2}{7ab^2}=\dfrac{5a}{2x}\cdot\dfrac{3y}{b}=\dfrac{15ay}{2bx}$

2) $\dfrac{x^4-y^4}{x^2+2xy+y^2}\div\dfrac{x^2+y^2}{x+y}=?$

$=\dfrac{x^4-y^4}{x^2+2xy+y^2}\cdot\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

$=\dfrac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x+y)^2}\cdot\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

$=\dfrac{(x-y)(x+y)}{(x+y)(x+y)}\cdot\dfrac{x+y}{1}=x-y$

3) $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-x+1}\div\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+1}=?$

$=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-x+1}\cdot\dfrac{x^3+1}{x^2-2x+1}$

$=\dfrac{x^3-1-3x(x-1)}{x^2-x+1}\cdot\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)-3x(x-1)}{1}\cdot\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1-3x)}{1}\cdot\dfrac{x+1}{(x-1)(x-1)}$

$=\dfrac{x^2-2x+1}{1}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$

$=\dfrac{(x-1)^2}{1}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$

$=\dfrac{(x-1)(x-1)}{1}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$

$=(x-1)(x+1)$

$=x^2-1$

4) $\dfrac{m^2-m-2}{2m^2-3m-2}\div\dfrac{m^2-2m-3}{2m^2-5m-3}=?$

$=\dfrac{m^2-m-2}{2m^2-3m-2}\cdot\dfrac{2m^2-5m-3}{m^2-2m-3}$

$=\dfrac{(m-2)(m+1)}{(2m+1)(m-2)}\cdot\dfrac{(2m+1)(m-3)}{(m+1)(m-3)}$

$=1$

سوم- عملیـــه جمـــع و تفریق کســرهـــای الجبری
Addition and Subtraction of Algebraic Fractions

به طور عموم می‌توان عملیه جمع و تفریق را بالای کسرهای الجبـری در دو حالت ذیل اجرا نمود:

۱. جمع و تفریق با مخرج های مساوی: هرگاه کـسرهـای الجبـری دارای مخرج‌های مساوی باشند، جهت اجرای عملیه جمع و تفریـق از مخرج‌های مساوی یکی را بحیث مخـرج مـشترک در نظـر گرفتـه و صورت‌ها را باهم جمع و یا تفریق می‌نماییم، یعنی:

$\dfrac{a}{c}\pm\dfrac{b}{c}=\dfrac{a\pm b}{c}\quad,\quad c\neq 0$

مثال‌ها:

کسرهای الجبری ذیل را جمع یا تفریق نمایید:

1) $\dfrac{5x+1}{2x}+\dfrac{7-3x}{2x}=?$

$=\dfrac{5x+1}{2x}+\dfrac{7-3x}{2x}=\dfrac{5x+1+7-3x}{2x}=\dfrac{2x+8}{2x}=\dfrac{2(x+4)}{2x}$

$=\dfrac{x+4}{x}$

$$2)\ \frac{a+2b}{3ab}-\frac{2a-b}{3ab}+\frac{a-2b}{3ba}=?$$
$$=\frac{a+2b-2a+b+a-2b}{3ab}=\frac{b}{3ab}=\frac{1}{3a}$$

$$3)\ \frac{5x+1}{2x-1}-\frac{x+2}{1-2x}+\frac{5-3x}{-1+2x}=?$$
$$=\frac{5x+1}{2x-1}-\frac{x+2}{-(2x-1)}+\frac{5-3x}{2x-1}=\frac{5x+1+x+2+5-3x}{2x-1}$$
$$=\frac{3x+8}{2x-1}$$

$$4)\ \frac{5m+1}{(m-1)^2}-\frac{3+3m}{m^2-2m+1}=?$$
$$=\frac{5m+1}{m^2-2m+1}-\frac{3+3m}{m^2-2m+1}=\frac{5m+1-3-3m}{m^2-2m+1}$$
$$=\frac{2m-2}{m^2-2m+1}$$
$$=\frac{2(m-1)}{(m-1)^2}=\frac{2(m-1)}{(m-1)\,(m-1)}=\frac{2}{m-1}$$

۲. جمع و تفریق با مخرج‌هـای متفـاوت: در عملیـه جمـع و تفریـق کسرهای الجبری که مخرج مختلـف باشـد اولاً کـوچکترین مـضرب مشترک کسرهای مذکور را دریافته آن را بـه حیـث مخـرج مـشترک درنظر گرفته، تقسیم هریک از مخرج هـا نمـوده و حاصـل تقـسیم را ضرب صورت های آن می‌نمائیم و نتیجه را باهم جمع خواهیم نمود.

یعنی:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}\quad,\quad b,d\neq 0$$

مثال‌ها:

کسرهای الجبری ذیل را جمع و تفریق نمایید:

$$\langle 1\rangle:\frac{5-a}{a}+\frac{3-2b}{b}=?$$
$$=\frac{b(5-a)+a(3-2b)}{ab}=\frac{5b-ab+3a-2ab}{ab}$$
$$=\frac{3a-3ab+5b}{ab}$$

$$\langle 2\rangle:\frac{x^2-5x+1}{2x^2}-\frac{7x+1}{3x}=?$$
$$=\frac{3(x^2-5x+1)-2x(7x+1)}{6x^2}=\frac{3x^2-15x+3-14x^2-2x}{6x^2}$$
$$=\frac{-11x^2-17x+3}{6x^2}$$

$$\langle 3\rangle:\frac{3a+1}{ab}-\frac{1}{bc}+\frac{2}{ac}=?$$
$$=\frac{c(3a+1)-a+2b}{abc}=\frac{3ac+c+2b-a}{abc}$$

$$\langle 4\rangle:\frac{x^2+5x}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x}{x+1}=?$$
$$=\frac{x^2+5x}{(x-1)(x+1)}+\frac{x+1}{x(x-1)}-\frac{x}{x+1}$$
$$=\frac{x(x^2+5x)+(x+1)(x+1)-x^2(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{x^3+5x^2+x^2+2x+1-x^3+x^2}{x(x^2-1)}$$
$$=\frac{7x^2+2x+1}{x^3-x}$$

$\langle 5\rangle : \dfrac{3y+1}{y^2-y-6}-\dfrac{5y-3}{y^2-4y+3}+\dfrac{1}{y^2+y-2}=?$

$=\dfrac{3y+1}{(y-3)(y+2)}-\dfrac{5y-3}{(y-3)(y-1)}+\dfrac{1}{(y+2)(y-1)}$

$=\dfrac{(y-1)(3y+1)-(5y-3)(y+2)+y-3}{(y-3)(y+2)(y-1)}$

$=\dfrac{3y^2+y-3y-1-5y^2-10y+3y+6+y-3}{(y-3)(y+2)(y-1)}$

$=\dfrac{-2y^2-8y+2}{(y-3)(y+2)(y-1)}$

$=\dfrac{-2y^2-8y+2}{y^3-2y^2-5y+6}$

عملیات مشترک بالای کسرهای الجبری

هرگاه در یک افاده کسری الجبری با وجود قوس‌ها، عملیه جمع، تفریـق، ضرب و تقسیم موجود گردد، مانند عملیات بالای پولینـوم‌هـای الجبـری اولاً رفع قوس‌ها با درنظرداشت حق اولیت به عملیه ضرب و تقسیم و بعـداً عملیـه جمع و تفریق، می‌توان افاده‌های کسری را ساده نمود.

مثال‌ها:

افاده های کسری الجبری ذیل را ساده سازید.

$\langle 1\rangle : \dfrac{3x}{2}+\dfrac{5x^2}{3y}\div\dfrac{15x^2}{2y^2}=?$

$=\dfrac{3x}{2}+\dfrac{5x^2}{3y}\cdot\dfrac{2y^2}{15x^2}$

$=\dfrac{3x}{2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2y}{3}=\dfrac{3x}{2}+\dfrac{2y}{9}$

$=\dfrac{27x+4y}{18}$

$\langle 2\rangle : \left(2a-\dfrac{5}{a}\right)\div\left(7a+\dfrac{1}{2a}\right)=?$

$=\left(\dfrac{2a^2-5}{a}\right)\div\left(\dfrac{14a^2+1}{2a}\right)$

$=\dfrac{2a^2-5}{a}\cdot\dfrac{2a}{14a^2+1}=\dfrac{4a^2-10}{14a^2+1}$

$\langle 3\rangle : 2y\left\{3x\left(1+\dfrac{x}{y}\right)-5y\div\left(1-\dfrac{x}{y}\right)\right\}=?$

$=2y\left\{3x\left(\dfrac{y+x}{y}\right)-5y\div\left(\dfrac{y-x}{y}\right)\right\}$

$=2y\left\{\dfrac{3x^2+3xy}{y}-5y\cdot\dfrac{y}{y-x}\right\}$

$=2y\left\{\dfrac{3x^2+3xy}{y}-\dfrac{5y^2}{y-x}\right\}$

$=2y\left\{\dfrac{(y-x)(3x^2+3xy)-5y^3}{y(y-x)}\right\}$

$=2y\left\{\dfrac{3x^2y+3xy^2-3x^3-3x^2y-5y^3}{y(y-x)}\right\}$

$=2y\left\{\dfrac{3xy^2-3x^3-5y^3}{y(y-x)}\right\}=\dfrac{6xy^2-6x^3-10y^3}{y-x}$

$$\langle 4\rangle : \frac{m^3+5m^2}{4m^2-9} \div \left[2m\left\{\left(\frac{1}{m}+\frac{3}{m^2}\right)\div\left(\frac{3}{m^3}-\frac{2}{m^2}\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{m^3+5m^2}{4m^2-9} \div \left[2m\left\{\left(\frac{m+3}{m^2}\right)\div\left(\frac{3-2m}{m^3}\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{m^3+5m^2}{4m^2-9} \div \left[2m\left\{\frac{m+3}{m^2}\cdot\frac{m^3}{3-2m}\right\}\right]$$

$$=\frac{m^3+5m^2}{4m^2-9} \div \left[2m\left\{\frac{m^2+3m}{3-2m}\right\}\right]$$

$$=\frac{m^3+5m^2}{4m^2-9} \div \left[\left\{\frac{2m^3+6m^2}{3-2m}\right\}\right]$$

$$=\frac{m^3+5m^2}{4m^2-9}\cdot\frac{3-2m}{2m^3+6m^2}$$

$$=\frac{m^2(m+5)}{(2m-3)(2m+3)}\cdot\frac{-(2m-3)}{m^2(2m+6)}$$

$$=\frac{-m-5}{4m^2+18m+18}$$

کسرهای مرکب الجبری

هرگاه کسرهای الجبری به طور پیهم تحت عملیات اساسی مانند جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم بالای همدیگر قرار داشته باشند، کسرهای مرکب الجبری نامیده می‌شوند که می‌توان عمل ساده‌سازی را از آخرین مخرج آغاز نمود.

مثال‌ها:

کسرهای مرکب الجبری ذیل را ساده سازید.

$$\langle 1\rangle : \frac{1}{2a+\frac{1}{a-\frac{1}{a}}}=?$$

$$=\frac{1}{2a+\frac{1}{\frac{a^2-1}{a}}}=\frac{1}{2a+\frac{a}{a^2-1}}=\frac{1}{\frac{2a^3-2a+a}{a^2-1}}=\frac{a^2-1}{2a^3-a}$$

$$\langle 2\rangle : \frac{x+5}{3x-\frac{x}{1+\frac{2}{x}}}=?$$

$$=\frac{x+5}{3x-\frac{x}{\frac{x+2}{x}}}=\frac{x+5}{3x-\frac{x^2}{x+2}}=\frac{x+5}{\frac{3x^2+6x-x^2}{x+2}}$$

$$=\frac{x+5}{\frac{2x^2+6x}{x+2}}=\frac{(x+5)(x+2)}{2x^2+6x}=\frac{x^2+7x+10}{2x^2+6x}$$

$$\langle 3\rangle : \frac{3y+\frac{1}{y}}{y^2-\frac{y}{3y+\frac{1}{2+\frac{1}{y}}}}=?$$

$$=\frac{\frac{3y^2+1}{y}}{y^2-\frac{y}{3y+\frac{1}{\frac{2y+1}{y}}}}=\frac{\frac{1}{y}}{y^2-\frac{y}{3y+\frac{y}{2y+1}}}$$

$$=\frac{\frac{3y^2+1}{y}}{y^2-\frac{y}{\frac{6y^2+3y+y}{2y+1}}}$$

$$=\frac{\frac{3y^2+1}{y}}{y^2-\frac{2y^2+y}{6y^2+4y}}=\frac{\frac{3y^2+1}{y}}{y^2-\frac{y(2y+1)}{y(6y+4)}}$$

$$=\frac{\frac{3y^2+1}{y}}{\frac{6y^3+4y^2-2y-1}{6y+4}}$$

$$=\frac{3y^2+1}{y}\cdot\frac{6y+4}{6y^3+4y^2-2y-1}=\frac{18y^3+12y^2+6y+4}{6y^4+4y^3-2y^2-y}$$

$$\langle 5\rangle:\frac{m}{m+\frac{1}{m-\frac{1}{m+\frac{1}{m}}}}=?$$

$$=\frac{m}{m+\frac{1}{m-\frac{1}{\frac{m^2+1}{m}}}}=\frac{m}{m+\frac{1}{m-\frac{m}{m^2+1}}}=\frac{m}{m+\frac{1}{\frac{m^3+m-m}{m^2+1}}}$$

$$=\frac{m}{m+\frac{1}{\frac{m^3}{m^2+1}}}=\frac{m}{m+\frac{m^2+1}{m^3}}=\frac{m}{\frac{m^4+m^2+1}{m^3}}$$

$$=m\cdot\frac{m^3}{m^4+m^2+1}=\frac{m^4}{m^4+m^2+1}$$

افاده‌های جذری (غیرناطق) الجبری
Radicals of Algebric Expressions

هرگـاه $n\in N, a, x\in IR$ باشـد پـس اگـر $x^n=a$ باشـد پـس $x=\sqrt[n]{a}$ یک افاده جذری یا غیر نستبی (غیر ناطق) الجبری تعریف گردیده است.

یا به عباره دیگر چون می‌دانیم که: $x^5=x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$ است.

به همین ترتیب $x^{-5}=\frac{1}{x^5}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$ می‌باشد.

اما اگر افاده $x^{\frac{5}{2}}$ را تحلیل نماییم، خواهیم نوشت که:

$$x^{\frac{5}{2}}=x^{2,5}=x\cdot x\cdot(\quad)$$

که این افاده بی‌معنی خواهد بود و از نگاه ریاضیات کدام مفهـوم نخواهـد داشت.

بناءً هر افاده الجبری به نمای کسری به شکل افادهٔ جذری یا غیر نـسبتی الجبری طور ذیل نیز تعریف گردیده است:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

طوریکه $n\geq 2$ را درجه جذر (جذرنما) و a^m را مجذور (عدد تحت جذر) می‌نامند.

مثال‌ها:

I: افاده های ذیل را در شکل افاده جذری بنوسید:

$\langle 1\rangle:(3)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3]{9}$

$\langle 2\rangle:(2x)^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{(2x)^3}=\sqrt[5]{8x^3}$

$\langle 3\rangle:(5a^2)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(5a^2)^2}=\sqrt[3]{25a^4}$

$\langle 4\rangle:(a+2b)^{\frac{5}{8}}=\sqrt[8]{(a+2b)^5}$

$\langle 5\rangle:(x-y)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x-y}$

$\langle 6\rangle:(2m^2n^3)^{\frac{7}{4}}=\sqrt[4]{(2m^2n^3)^7}=\sqrt[4]{128m^{14}n^{21}}$

II: افاده‌های جذری ذیل را در شکل افادهٔ نمایی کسری بنویسید.

$\langle 1\rangle:\sqrt[4]{125}=(125)^{\frac{1}{4}}=(5^3)^{\frac{1}{4}}=(5)^{\frac{3}{4}}$

$\langle 2\rangle:\sqrt[5]{x^3}=x^{\frac{3}{5}}$

$\langle 3\rangle:\sqrt[3]{(ax)^2}=(ax)^{\frac{2}{3}}$

$\langle 4\rangle:\sqrt[4]{32x^5y^{15}}=\sqrt[4]{(2xy^3)^5}=(2xy^3)^{\frac{5}{4}}$

$\langle 5\rangle:\sqrt[7]{25x^4y^6}=\sqrt[7]{5^2(x^2)^2(y^3)^2}=\sqrt[7]{(5x^2y^3)^2}=(5x^2y^3)^{\frac{2}{7}}$

$\langle 6\rangle:\sqrt{a+b}=(a+b)^{\frac{1}{2}}$

هم‌درجه ساختن جذور: در صورتیکه جذور مختلف‌الدرجه باشند، جهت هم‌درجه ساختن آنها اولاً کوچکترین مضرب مشترک درجه‌های جذور را دریافت نموده، آن را تقسیم درجه هر یک از جذور می‌نماییم. حاصل تقسیم را به نمای مجذور بلند می‌بریم یعنی به کمک معادل‌سازی کسور می‌توان چنین نوشت:

مثال‌ها:

جذور ذیل باهم درجه سازید:

$\langle 1\rangle:\sqrt[5]{x^3}=x^{\frac{3}{5}}=x^{\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}}=x^{\frac{6}{10}}=\sqrt[10]{x^6}$

$\sqrt{y}=y^{\frac{1}{2}}=y^{\frac{1\cdot 5}{2\cdot 5}}=y^{\frac{5}{10}}=\sqrt[10]{y^5}$

به طور ساده می‌توان نوشت:

$\sqrt[5]{x^3},\sqrt{y}=?$

$\sqrt[10]{(x^3)^2},\sqrt[10]{(y)^5}=\sqrt[10]{x^6},\sqrt[10]{y^5}$

$\langle 2\rangle:\sqrt[3]{5},\sqrt[4]{3}=?$

$\sqrt[12]{5^4},\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{625},\sqrt[12]{27}$

$\langle 3\rangle:\sqrt[4]{a^3},\sqrt[8]{a^5}=?$

$\sqrt[8]{(a^3)^2},\sqrt[8]{(a^5)^1}=\sqrt[8]{a^6},\sqrt[8]{a^5}$

$\langle 4\rangle:\sqrt[5]{x^3},\sqrt[3]{x^2},\sqrt[10]{x^7}=?$

$\sqrt[30]{(x^3)^6},\sqrt[30]{(x^2)^{10}},\sqrt[30]{(x^7)^3}=\sqrt[30]{x^{18}},\sqrt[30]{x^{20}},\sqrt[30]{x^{21}}$

$\langle 5\rangle:\sqrt{ax^3},\sqrt[3]{a^2x},\sqrt[5]{a^3x^4}=?$

$\sqrt[30]{(ax^3)^{15}},\sqrt[30]{(a^2x)^{10}},\sqrt[30]{(a^3x^4)^6}$

$=\sqrt[30]{a^{15}x^{45}},\sqrt[30]{a^{20}x^{10}},\sqrt[30]{a^{18}x^{24}}$

مقایسه جذور (Comperision of the Radicals)

در صورتیکه جذور هم‌درجه باشند، جذری بزرگتر است که مجذور آن بزرگتر باشد، اما اگر جذور مختلف‌الدرجه باشند، اولاً آن را هم درجه ساخته، بعداً مقایسه می‌کنیم.

مثال‌ها:

جذور ذیل را مقایسه نمایید؟

$\langle 1\rangle : \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{3} = ?$

$\Rightarrow \sqrt[3]{5} > \sqrt[3]{3}$

$\langle 2\rangle : \sqrt[7]{25}, \sqrt[7]{74}$

$\Rightarrow \sqrt[7]{25} < \sqrt[7]{74}$

$\langle 3\rangle : \sqrt{25}, \sqrt{16} = ?$

$\Rightarrow \sqrt{25} > \sqrt{16}$

$\langle 4\rangle : \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{125}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{125}$

$\langle 5\rangle : \sqrt[3]{x^2}, \sqrt[3]{x} = ?$ در صورتیکه باشد: $x > 1$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2} > \sqrt[3]{x}$

$\langle 6\rangle : \sqrt[7]{a^5}, \sqrt[7]{a^6} = ?$ در صورتیکه $a > 1$ باشد:

$\Rightarrow \sqrt[7]{a^5} < \sqrt[7]{a^6}$

$\langle 7\rangle : \sqrt[3]{5}, \sqrt[5]{6} = ?$

$= \sqrt[15]{5^5}, \sqrt[15]{6^3} \Rightarrow \sqrt[15]{3125}, \sqrt[15]{216}$

$\Rightarrow \sqrt[15]{3125} > \sqrt[15]{216} \Rightarrow \sqrt[3]{5} > \sqrt[5]{6}$

در صورتیکه $y > 1$ باشد:

$\langle 8\rangle : \sqrt[4]{7}, \sqrt{3} = ?$

$= \sqrt[4]{7^1}, \sqrt[4]{3^2} \Rightarrow \sqrt[4]{7}, \sqrt[4]{9} \Rightarrow \sqrt[4]{7} < \sqrt[4]{9} \Rightarrow \sqrt[4]{7} < \sqrt{3}$

$\langle 9\rangle : \sqrt[7]{y^5}, \sqrt[5]{y^3} = ?$

$\Rightarrow \sqrt[35]{\left(y^5\right)^5}, \sqrt[35]{\left(y^3\right)^7} \Rightarrow \sqrt[35]{y^{25}}, \sqrt[35]{y^{21}} \Rightarrow \sqrt[35]{y^{25}} > \sqrt[35]{y^{21}}$

$\Rightarrow \sqrt[7]{y^5} > \sqrt[5]{y^3}$

$\langle 10\rangle : \sqrt[8]{x^5}, \sqrt[3]{x^2} = ?$ در صورتیکه $x > 1$ باشد:

$\Rightarrow \sqrt[24]{\left(x^5\right)^3}, \sqrt[24]{\left(x^2\right)^8} \Rightarrow \sqrt[24]{x^{15}}, \sqrt[24]{x^{16}} \Rightarrow \sqrt[24]{x^{15}} < \sqrt[24]{x^{16}}$

$\Rightarrow \sqrt[8]{x^5} < \sqrt[3]{x^2}$

جذرالجذر: هرگاه یک یا چندین جذر به طور پی هم بالای یک افاده جذری قرار داشته باشد، جذرالجذر نامیده می‌شود، که چنین ساده می‌گردد:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x^p}} = \sqrt[n]{x^{\frac{p}{m}}} = (x)^{\frac{p/m}{n}} = (x)^{\frac{p}{m}\cdot\frac{1}{n}} = (x)^{\frac{p}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{x^p}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{x^p}} = \sqrt[n\cdot m]{x^p}}$$

مثال: جذور ذیل را ساده سازید؟

$\langle 1\rangle : \sqrt[3]{\sqrt[5]{x^{30}}} = ?$

$\sqrt[3\cdot 5]{x^{30}} = \sqrt[15]{x^{30}} = x^{\frac{30}{15}} = x^2$

$\langle 2\rangle : \sqrt{\sqrt{\sqrt{(am)^{12}}}} = ?$

$= \sqrt[2\cdot 2\cdot 2]{(am)^{12}} = \sqrt[8]{(am)^{12}} = (am)^{\frac{12}{8}} = (am)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{(am)^3} = \sqrt{(am)^3}$

$\langle 3\rangle : \sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{(a+b)^{15}}}} = ?$

$= \sqrt[4\cdot 3\cdot 2]{(a+b)^{15}} = \sqrt[24]{(a+b)^{15}} = (a+b)^{\frac{15}{24}}$

$= (a+b)^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{(a+b)^5}$

$\langle 4\rangle : \sqrt[5]{x^3\cdot\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[7]{x^5}}}=?$

$$\sqrt[5]{x^3\cdot\sqrt[4]{x\cdot x^{\frac{5}{7}}}}=\sqrt[5]{x^3\sqrt[4]{x^{1+\frac{5}{7}}}}=\sqrt[5]{x^3\sqrt[4]{x^{\frac{12}{7}}}}$$

$$=\sqrt[5]{x^3\cdot x^{\frac{12/7}{4}}}=\sqrt[5]{x^3\cdot x^{\frac{3}{7}}}=\sqrt[5]{x^{3+\frac{3}{7}}}$$

$$=\sqrt[5]{x^{\frac{24}{7}}}=x^{\frac{24/7}{5}}=x^{\frac{24}{35}}=\sqrt[35]{x^{24}}$$

پس به طور ساده اولاً درجه‌های جذور را باهم ضرب نموده به حیث یک درجه جذر قرار می‌دهیم و ثانیاً از نمای اولین مجذور چنین عمل می‌کنیم:

$$(3\cdot4+1)\cdot7+5=13\cdot7+5=91+5=96$$

$$\sqrt[5]{x^3\cdot\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[7]{x^5}}}=\sqrt[5\cdot4\cdot7]{x^{(3\cdot4+1)\cdot7+5}}=\sqrt[140]{x^{96}}=x^{\frac{96}{140}}$$

$$=x^{\frac{24}{35}}=\sqrt[35]{x^{24}}$$

$\langle 5\rangle : \sqrt[7]{y^5\cdot\sqrt[4]{y^3\cdot\sqrt[3]{y^2}}}=?$

$$\sqrt[7\cdot4\cdot3]{y^{(5\cdot4+3)\cdot3+2}}=\sqrt[84]{y^{71}}$$

$\langle 6\rangle : \sqrt[8]{(am)^5\cdot\sqrt[6]{(am)^5\cdot\sqrt[3]{(am)^2}}}=?$

$$\sqrt[8\cdot6\cdot3]{(am)^{(5\cdot6+5)\cdot3+2}}=\sqrt[144]{(am)^{107}}$$

عملیات اساسی بالای افاده‌های جذری یـــا غیـــر نسبتـــی الجبـــری

Fundamental Operations on Algebric Radicals Expression

اول - عملیه ضرب جذور (Product of Radicals): عملیه ضـرب فقـط بالای جذور هم‌درجه امکان پذیر است، یعنی:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{ab}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}}\ldots\ldots\ldots \quad ①$$

به همین ترتیب:

$$\sqrt[n]{a^p}\cdot\sqrt[n]{a^q}=a^{\frac{p}{n}}\cdot a^{\frac{q}{n}}=a^{\frac{p}{n}+\frac{q}{n}}=a^{\frac{p+q}{n}}=\sqrt[n]{a^{p+q}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt[n]{a^p}\cdot\sqrt[n]{a^q}=\sqrt[n]{a^{p+q}}}\ \ldots.. ②$$

در صورتیکه جذور مختلف‌الدرجه باشند، اولاً آنها را هم‌درجه ساخته بعـداً ضرب می‌نماییم.

مثال‌ها:

جذور ذیل را ضرب نمایید.

$\langle 1\rangle : \sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}=?$

$$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{5\cdot2}=\sqrt[3]{10}$$

$\langle 2\rangle : \sqrt[4]{7}\cdot\sqrt[4]{3}=?$

$$\sqrt[4]{7}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{7\cdot3}=\sqrt[4]{21}$$

$\langle 3\rangle : \sqrt[5]{2x}\cdot\sqrt[5]{3y^2}=?$

$$\sqrt[5]{2x}\cdot\sqrt[5]{3y^2}=\sqrt[5]{2x\cdot3y^2}=\sqrt[5]{6xy^2}$$

$\langle 4\rangle : \sqrt[8]{15ab^3}\cdot\sqrt[8]{9a^3x^5}=?$

$$\sqrt[8]{15ab^3}\cdot\sqrt[8]{9a^3x^5}=\sqrt[8]{15ab^3\cdot9a^3x^5}=\sqrt[8]{135a^4b^3x^5}$$

$\langle 5\rangle : \sqrt[7]{(ax)^2}\cdot\sqrt[7]{(ax)^{12}}=?$

$$\sqrt[7]{(ax)^2}\cdot\sqrt[7]{(ax)^{12}}=\sqrt[7]{(ax)^{2+12}}=\sqrt[7]{(ax)^{14}}=(ax)^{\frac{14}{7}}=(ax)^2$$

$\langle 6\rangle : \sqrt[13]{x^5y^8}\cdot\sqrt[13]{x^7y^3}\cdot\sqrt[13]{xy^2}=?$

$$\sqrt[13]{x^5y^8}\cdot\sqrt[13]{x^7y^3}\cdot\sqrt[13]{xy^2}=\sqrt[13]{x^5y^8\cdot x^7y^3\cdot xy^2}$$
$$=\sqrt[13]{x^{5+7+1}\cdot y^{8+3+2}}=\sqrt[13]{x^{13}\cdot y^{13}}=\sqrt[13]{(xy)^{13}}=(xy)^{\frac{13}{13}}=xy$$

$\langle 7\rangle : \sqrt[5]{(pm)^3}\cdot\sqrt[5]{(pm)^4}\cdot\sqrt[5]{(pm)^2}=?$

$$\sqrt[5]{(pm)^3}\cdot\sqrt[5]{(pm)^4}\cdot\sqrt[5]{(pm)^2}=\sqrt[5]{(pm)^{3+4+2}}=\sqrt[5]{(pm)^9}$$

$\langle 8\rangle : \sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}=?$

$$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}=\sqrt[6]{5^2}\cdot\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{25}\cdot\sqrt[6]{27}=\sqrt[6]{25\cdot 27}=\sqrt[6]{675}$$

$\langle 9\rangle : \sqrt[5]{7}\cdot\sqrt[3]{2}=?$

$$\sqrt[5]{7}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[15]{7^3}\cdot\sqrt[15]{2^5}=\sqrt[15]{343}\cdot\sqrt[15]{32}=\sqrt[15]{343\cdot 32}=\sqrt[15]{10976}$$

$\langle 10\rangle : \sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[7]{x^3}=?$

$$\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[7]{x^3}=\sqrt[21]{(x^2)^7}\cdot\sqrt[21]{(x^3)^3}=\sqrt[21]{x^{14}}\cdot\sqrt[21]{x^9}=\sqrt[21]{x^{14+9}}=\sqrt[21]{x^{23}}$$

$\langle 11\rangle : \sqrt[8]{(ay)^5}\cdot\sqrt{(ay)}\cdot\sqrt[4]{(ay)^3}=?$

$$\sqrt[8]{(ay)^5}\cdot\sqrt{(ay)}\cdot\sqrt[4]{(ay)^3}=\sqrt[8]{(ay)^5}\cdot\sqrt[8]{(ay)^4}\cdot\sqrt[8]{\{(ay)^3\}^2}$$
$$=\sqrt[8]{(ay)^{5+4+6}}=\sqrt[8]{(ay)^{15}}$$

$\langle 12\rangle : \sqrt[3]{(a+b)^2}\cdot\sqrt[8]{(a+b)^5}=?$

$$\sqrt[3]{(a+b)^2}\cdot\sqrt[8]{(a+b)^5}=\sqrt[24]{\{(a+b)^2\}^8}\cdot\sqrt[24]{\{(a+b)^5\}^3}$$
$$=\sqrt[24]{(a+b)^{16}}\cdot\sqrt[24]{(a+b)^{15}}=\sqrt[24]{(a+b)^{16+15}}=\sqrt[24]{(a+b)^{31}}$$

دوم- عملیه تقسیم جذور (Division of Radicals): مانند عملیه ضرب جذور فقط می‌توان جذور هم‌درجه را باهم تقسیم نمود، یعنی:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

به همین ترتیب:

$$\frac{\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[n]{a^q}}=\frac{a^{\frac{p}{n}}}{a^{\frac{q}{n}}}=a^{\frac{p}{n}-\frac{q}{n}}=a^{\frac{p-q}{n}}=\sqrt[n]{a^{p-q}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[n]{a^q}}=\sqrt[n]{a^{p-q}}\ \ldots\ldots\ (2)$$

در صورتیکه جذور مختلف‌الدرجه باشند، اولاً آنها را هم‌درجه ساخته، بعداً عملیه تقسیم را اجرا می‌نماییم.

مثال‌ها:

جذور ذیل را تقسیم نمایید.

$\langle 1\rangle : \dfrac{\sqrt[5]{75}}{\sqrt[5]{25}}=?$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[5]{75}}{\sqrt[5]{25}}=\sqrt[5]{\frac{75}{25}}=\sqrt[5]{3}$$

$\langle 2\rangle : \dfrac{\sqrt[3]{51}}{\sqrt[3]{39}}=?$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{51}}{\sqrt[3]{39}}=\sqrt[3]{\frac{51}{39}}=\sqrt[3]{\frac{17}{13}}$$

$\langle 3\rangle : \dfrac{\sqrt[4]{2x^5}}{\sqrt[4]{6y^3}} = ?$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[4]{2x^5}}{\sqrt[4]{6y^3}} = \sqrt[4]{\frac{2x^5}{6y^3}} = \sqrt[4]{\frac{x^5}{3y^3}}$$

$\langle 4\rangle : \dfrac{\sqrt[7]{am^3y^5}}{\sqrt[7]{a^2m^2y^3}} = ?$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[7]{am^3y^5}}{\sqrt[7]{a^2m^2y^3}} = \sqrt[7]{\frac{am^3y^5}{a^2m^2y^3}} = \sqrt[7]{\frac{my^2}{a}}$$

$\langle 5\rangle : \dfrac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x}} = ?$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x}} = \sqrt[5]{x^{3-1}} = \sqrt[5]{x^2}$$

$\langle 6\rangle : \dfrac{\sqrt[12]{(am^2)^{11}}}{\sqrt[12]{(am^2)^2}} = ?$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[12]{(am^2)^{11}}}{\sqrt[12]{(am^2)^2}} = \sqrt[12]{(am^2)^{11-2}} = \sqrt[4]{(am^2)^3}$$

$\langle 7\rangle : \dfrac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{\sqrt[6]{(x-1)^2}} = ?$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{\sqrt[6]{(x-1)^2}} = \sqrt[6]{(x-1)^{5-2}} = \sqrt[6]{(x-1)^3} = \sqrt{x-1}$$

$\langle 8\rangle : \dfrac{\sqrt[5]{7}}{\sqrt[3]{5}} = ?$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[5]{7}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[15]{7^3}}{\sqrt[15]{5^5}} = \frac{\sqrt[15]{343}}{\sqrt[15]{3125}} = \sqrt[15]{\frac{343}{3125}} = \sqrt[15]{0.10976}$$

$\langle 9\rangle : \dfrac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[5]{5}} = ?$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[5]{5}} = \frac{\sqrt[20]{(10)^5}}{\sqrt[20]{(5)^4}} = \frac{\sqrt[20]{100000}}{\sqrt[20]{625}} = \sqrt[20]{\frac{100000}{625}} = \sqrt[20]{160}$$

$\langle 10\rangle : \dfrac{\sqrt[7]{x^5}}{\sqrt[5]{y^3}} = ?$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[7]{x^5}}{\sqrt[5]{y^3}} = \frac{\sqrt[35]{(x^5)^5}}{\sqrt[35]{(y^3)^7}} = \frac{\sqrt[35]{x^{25}}}{\sqrt[35]{y^{21}}} = \sqrt[35]{\frac{x^{25}}{y^{21}}}$$

$\langle 11\rangle : \dfrac{\sqrt[8]{(am)^5}}{\sqrt[6]{(am)}} = ?$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[8]{(am)^5}}{\sqrt[6]{(am)}} = \frac{\sqrt[24]{\{(am)^5\}^3}}{\sqrt[24]{(am)^4}} = \frac{\sqrt[24]{(am)^{15}}}{\sqrt[24]{(am)^4}}$$

$$= \sqrt[24]{(am)^{15-4}} = \sqrt[24]{(am)^{11}}$$

$\langle 12\rangle : \dfrac{\sqrt[7]{(x-3)^6}}{\sqrt[5]{(x-3)^3}} = ?$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[7]{(x-3)^6}}{\sqrt[5]{(x-3)^3}} = \frac{\sqrt[35]{\{(x-3)^6\}^5}}{\sqrt[35]{\{(x-3)^3\}^7}} = \frac{\sqrt[35]{(x-3)^{30}}}{\sqrt[35]{(x-3)^{21}}}$$

$$= \sqrt[35]{(x-3)^{30-21}} = \sqrt[35]{(x-3)^9}$$

$$\langle 13\rangle : \frac{\sqrt[5]{(a+b)^3}\cdot\sqrt[3]{(a+b)^2}}{\sqrt{\sqrt[3]{(a+b)^5}}\cdot\sqrt[4]{(a+b)^3}} = ?$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[5]{(a+b)^3}\cdot\sqrt[3]{(a+b)^2}}{\sqrt{\sqrt[3]{(a+b)^5}}\cdot\sqrt[4]{(a+b)^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[15]{\{(a+b)^3\}^3}\cdot\sqrt[15]{\{(a+b)^2\}^5}}{\sqrt[6]{(a+b)^5}\cdot\sqrt[4]{(a+b)^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[15]{(a+b)^9}\cdot\sqrt[15]{(a+b)^{10}}}{\sqrt[12]{\{(a+b)^5\}^2}\cdot\sqrt[12]{\{(a+b)^3\}^3}} = \frac{\sqrt[15]{(a+b)^{9+10}}}{\sqrt[12]{(a+b)^{10}}\cdot\sqrt[12]{(a+b)^9}}$$

$$= \frac{\sqrt[15]{(a+b)^{19}}}{\sqrt[12]{(a+b)^{10+9}}} = \frac{\sqrt[15]{(a+b)^{19}}}{\sqrt[12]{(a+b)^{19}}} = \frac{\sqrt[60]{\{(a+b)^{19}\}^4}}{\sqrt[60]{\{(a+b)^{19}\}^5}}$$

$$= \frac{\sqrt[60]{(a+b)^{76}}}{\sqrt[60]{(a+b)^{95}}} = \sqrt[60]{(a+b)^{76-95}} = \sqrt[60]{(a+b)^{-19}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[60]{(a+b)^{19}}}$$

رفع عامل‌های مجذور و برعکس آن (Simplifying of Radicals)

هرگاه یک افاده جذری دارای جذر کامل نبوده و امکان طوری مساعد گردد که یک عامل مجذور از جذر رفع گردد می‌توان آن را با در نظرداشت درجه جذر طوری تجزیه نموده که اقلاً یک عامل آن از جذر رفع گردد.

مثال‌ها:

از افاده‌های جذری ذیل در صورت امکان عوامل آن را از جذر رفع نمایید:

$\langle 1\rangle : \sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = 2\sqrt{2}$

$\langle 2\rangle : \sqrt{50} = \sqrt{2\cdot 25} = 5\sqrt{2}$

$\langle 3\rangle : \sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} = 3\sqrt{5}$

$\langle 4\rangle : \sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8\cdot 5} = 2\sqrt[3]{5}$

$\langle 5\rangle : \sqrt[4]{324} = \sqrt[4]{81\cdot 4} = 3\sqrt[4]{4} = 3\sqrt[4]{2^2} = 3\cdot 2^{\frac{2}{4}}$

$= 3\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{2}$

$\langle 6\rangle : \sqrt[5]{64x^7} = \sqrt[5]{32\cdot 2\cdot x^5\cdot x^2} = 2x\sqrt[5]{2x^2}$

$\langle 7\rangle : \sqrt[3]{250a^8b^6c^4} = \sqrt[3]{125\cdot 2\cdot a^6\cdot a^2\cdot b^6\cdot c^3\cdot c}$

$= 3a^2b^2c\cdot\sqrt[3]{2a^2c}$

$\langle 8\rangle : \sqrt[4]{162m^{10}n^{17}} = \sqrt[4]{81\cdot 2\cdot m^8\cdot m^2\cdot n^{16}\cdot n}$

$= 3m^2n^4\sqrt[4]{2m^2n}$

برعکس برای آوردن، افاده های غیر جذری بحیث مجذور آن را به نمـای درجه جذر بلند برده و به حیث مجذور قرار می‌دهیم.

مثال‌ها:

$\langle 1\rangle : 2\sqrt{2} = \sqrt{2^2\cdot 2} = \sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{8}$

$\langle 2\rangle : 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2\cdot 5} = \sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{45}$

$\langle 3\rangle : 5\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5^3\cdot 2} = \sqrt[3]{125\cdot 2} = \sqrt[3]{250}$

$\langle 4\rangle : 7x\cdot\sqrt[3]{2x^2} = \sqrt[3]{(7x)^3\cdot 2x^2} = \sqrt[3]{343x^3\cdot 2x^2}$

$= \sqrt[3]{686x^5}$

$\langle 4\rangle: 9m\cdot\sqrt[4]{2m}-4m\cdot\sqrt[4]{2m}-7m\cdot\sqrt[4]{2m}$
$+m\cdot\sqrt[4]{2m}=?$
$\Rightarrow 9m\cdot\sqrt[4]{2m}-4m\cdot\sqrt[4]{2m}-7m\cdot\sqrt[4]{2m}+m\cdot\sqrt[4]{2m}$
$=(9m-4m-7m+m)\sqrt[4]{2m}=-m\cdot\sqrt[4]{2m}$

$\langle 5\rangle: 5\sqrt{12}+3\sqrt{27}-4\sqrt{75}=?$
$\Rightarrow 5\sqrt{12}+3\sqrt{27}-4\sqrt{75}=5\sqrt{4\cdot 3}+3\sqrt{9\cdot 3}$
$-4\sqrt{25\cdot 3}$
$=10\sqrt{3}+9\sqrt{3}-20\sqrt{3}=(10+9-20)\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

$\langle 6\rangle: 7\cdot\sqrt[3]{16x}-2\cdot\sqrt[3]{54x}+4\cdot\sqrt[3]{250x}=?$
$\Rightarrow 7\cdot\sqrt[3]{16x}-2\cdot\sqrt[3]{54x}+4\cdot\sqrt[3]{250x}$
$=7\cdot\sqrt[3]{8\cdot 2x}-2\cdot\sqrt[3]{27\cdot 2x}+4\cdot\sqrt[3]{125\cdot 2x}$
$=14\cdot\sqrt[3]{2x}-6\cdot\sqrt[3]{2x}+20\cdot\sqrt[3]{2x}$
$=(14-6+20)\sqrt[3]{2x}=28\cdot\sqrt[3]{2x}$

$\langle 7\rangle: 15y\cdot\sqrt[4]{2y^5}+8y^2\cdot\sqrt[4]{32y}=?$
$\Rightarrow 15y\cdot\sqrt[4]{2y^5}+8y^2\cdot\sqrt[4]{32y}=$
$15y\cdot\sqrt[4]{2y^4\cdot y}+8y^2\cdot\sqrt[4]{16\cdot 2y}$
$=15y^2\cdot\sqrt[4]{2y}+16y^2\cdot\sqrt[4]{2y}=(15y^2+16y^2)\sqrt[4]{2y}$
$=31y^2\cdot\sqrt[4]{2y}$

$\langle 5\rangle: 5ab^2\cdot\sqrt[4]{3a^3b}=\sqrt[4]{(5ab^2)^4\cdot 3a^3b}$
$=\sqrt[4]{625a^4b^8\cdot 3a^2b}=\sqrt[4]{1875a^7b^9}$

$\langle 6\rangle: 2x^3c\cdot\sqrt[7]{5x^5c^2b}=\sqrt[7]{(2x^3c)^7\cdot 5x^5c^2b}$
$=\sqrt[7]{128x^{21}c^7\cdot 5x^5c^2b}\quad=\sqrt[7]{640x^{26}bc^9}$

$\langle 7\rangle: \frac{5}{3}m^2\cdot\sqrt[3]{9m^2}=\sqrt[3]{\left(\frac{5}{3}m^2\right)^3\cdot 9m^2}$
$=\sqrt[3]{\frac{125}{27}m^6\cdot 9m^2}=\sqrt[3]{\frac{125}{3}m^8}$

سوم: عملیه جمـــع و تفـریق جــذور
Addition and Subtraction of Radicals

فقط می‌توان عملیه جمع و تفریق را بالای جذور مشابه انجام داد و جـذور وقتی مشابه نامیده می‌شود که اولاً هم‌درجه باشند و ثانیاً این کـه مجـذورهـا باهم مساوی باشند.

مثال‌ها:

جذور ذیل را باهم جمع و تفریق نمایید.

$\langle 1\rangle: 7\sqrt{3}+15\sqrt{3}=?$
$\Rightarrow 7\sqrt{3}+15\sqrt{3}=(7+15)\sqrt{3}=22\sqrt{3}$

$\langle 2\rangle: 5\cdot\sqrt[3]{2}-4\cdot\sqrt[3]{2}+7\cdot\sqrt[3]{2}=?$
$\Rightarrow 5\cdot\sqrt[3]{2}-4\cdot\sqrt[3]{2}+7\cdot\sqrt[3]{2}=(5-4+7)\sqrt[3]{2}=8\cdot\sqrt[3]{2}$

$\langle 3\rangle: 2a\cdot\sqrt[5]{x}+5b\cdot\sqrt[5]{x}-3a\cdot\sqrt[5]{x}=?$
$\Rightarrow 2a\cdot\sqrt[5]{x}+5b\cdot\sqrt[5]{x}-3a\cdot\sqrt[5]{x}=(2a+5b-3a)\sqrt[5]{x}$
$=(5b-a)\sqrt[5]{x}$

$$\langle 8\rangle : -\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{2x^3y^2}+7x\cdot\sqrt[3]{\frac{16}{125}y^2}-2\cdot\sqrt[3]{\frac{54}{343}x^3y^2}=?$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{2x^3y^2}+7x\cdot\sqrt[3]{\frac{16}{125}y^2}-2\cdot\sqrt[3]{\frac{54}{343}x^3y^2}$$

$$=-\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{2\cdot x^3\cdot y^2}+7x\cdot\sqrt[3]{\frac{8\cdot 2}{125}y^2}-2\cdot\sqrt[3]{\frac{27\cdot 2}{343}x^3y^2}$$

$$=-\frac{3}{5}x\cdot\sqrt[3]{2y^2}+\frac{14}{5}x\cdot\sqrt[3]{2y^2}-\frac{6}{7}x\cdot\sqrt[3]{2y^2}$$

$$=\left(-\frac{3}{5}x+\frac{14}{5}x-\frac{6}{7}x\right)\sqrt[3]{2y^2}=\left(\frac{-21x+98x-30x}{35}\right)\sqrt[3]{2y^2}$$

$$=\left(\frac{-51x+98x}{35}\right)\sqrt[3]{2y^2}=\frac{47x}{35}\cdot\sqrt[3]{2y^2}$$

جذور مرکب (Complex Radicals)

ترکیب اعداد جذری یا غیر نسبتی با اعداد نسبتی و یا ترکیب دو یا چندین جذر غیر مشابه ولی هم‌درجه را جذور مرکب می‌نامند، مثلاً:

$$5+\sqrt{2}\ ,\ 7-2\cdot\sqrt[3]{5}\ ,\ \frac{8}{5}+\sqrt[5]{3}\ ,\ -\sqrt{7}+5,\ \sqrt{5}-\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{3x}+y\ ,\ 5a-\sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\ ,\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2y},\ldots\ldots\ldots$$

عملیـــات بـــالای جـــذور مـــرکب
Fundamental Operations on the Complex Radicals

اول- عملیــــه جمـــع و تفـــریق جـــذور مـــرکب
Addition and Subtraction of Complex Radicals

چون عملیه جمع و تفریق در الجبر بالای حدود مشابه امکان‌پـذیر اسـت، بناءً در جذور مرکب نیز با پیروی از همین اصل می‌توان عملیه جمع و تفریـق را اجرا نمود.

مثال‌ها:

جذور ذیل را جمع و تفریق نمایید.

$$\langle 1\rangle : \left(5+3\sqrt{2}\right)+\left(7-2\sqrt{2}\right)=?$$

$$\Rightarrow \left(5+3\sqrt{2}\right)+\left(7-2\sqrt{2}\right)=(5+7)+\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)$$

$$=12+\sqrt{2}$$

$$\langle 2\rangle : \left(9-4\cdot\sqrt[3]{5}\right)-\left(12+3\cdot\sqrt[3]{5}\right)=?$$

$$\Rightarrow \left(9-4\cdot\sqrt[3]{5}\right)-\left(12+3\cdot\sqrt[3]{5}\right)=9-4\cdot\sqrt[3]{5}-12-3\cdot\sqrt[3]{5}$$

$$=(9-12)+(-4-3)\sqrt[3]{5}=-3-7\cdot\sqrt[3]{5}$$

$$\langle 3\rangle : \left.\begin{aligned} A&=5x-3y^2+2\sqrt{xy}\\ B&=5y^2-2x+\sqrt{25xy}\end{aligned}\right\}\begin{aligned} A+B&=?\\ A-B&=?\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A+B=\left(5x-3y^2+2\sqrt{xy}\right)+\left(5y^2-2x+5\sqrt{xy}\right)$$

$$=+3x+2y^2+7\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow A-B=\left(5x-3y^2+2\sqrt{xy}\right)-\left(5y^2-2x+5\sqrt{xy}\right)$$

$$=5x-3y^2+2\sqrt{xy}-5y^2+2x-5\sqrt{xy}$$

$$=7x-8y^2-3\sqrt{xy}$$

$\langle 4\rangle: A=\left(5\cdot\sqrt[3]{a}+8b\cdot\sqrt[3]{b}+2c\right)\quad 2A+3B=?$

$B=\left(\sqrt[3]{8a}+5\cdot\sqrt[3]{b^4}-3c\right)\quad 7A-5B=?$

$\Rightarrow 2A+3B=2\left(5\cdot\sqrt[3]{a}+8b\cdot\sqrt[3]{b}+2c\right)$

$+3\left(\sqrt[3]{8a}+5\cdot\sqrt[3]{b^4}-3c\right)$

$=10\cdot\sqrt[3]{a}+16b\cdot\sqrt[3]{b}+4c+3\left(2\cdot\sqrt[3]{a}+5b\cdot\sqrt[3]{b}-3c\right)$

$=10\cdot\sqrt[3]{a}+16b\cdot\sqrt[3]{b}+4c+6\cdot\sqrt[3]{a}+15b\cdot\sqrt[3]{b}-9c$

$=(10+6)\sqrt[3]{a}+(16b+15b)\sqrt[3]{b}+(4c-9c)$

$=16\cdot\sqrt[3]{a}+31\cdot\sqrt[3]{b}-5c$

$\Rightarrow 7A-5B=7\left(5\cdot\sqrt[3]{a}+8b\cdot\sqrt[3]{b}+2c\right)$

$-5\left(\sqrt[3]{8a}+5\cdot\sqrt[3]{b^4}-3c\right)$

$=35\cdot\sqrt[3]{a}+56b\cdot\sqrt[3]{b}+14c-10\cdot\sqrt[3]{a}-25b\cdot\sqrt[3]{b}+15c$

$=(35-10)\sqrt[3]{a}+(56b-25b)\sqrt[3]{b}+(14c+15c)$

$=25\cdot\sqrt[3]{a}+31b\cdot\sqrt[3]{b}+29c$

دوم- عملیه ضرب جذور مرکب (Product of Complex Radicals)

عملیه ضرب در جذور مرکب مانند عملیه ضرب پولینوم‌های الجبری قابـل اجرا می‌باشد.

مثال‌ها:

جذور ذیل را باهم ضرب نمایید.

$\langle 1\rangle: \left(3\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)=?$

$\Rightarrow\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)=3\cdot5-9\sqrt{10}-2\sqrt{10}-6\cdot2$

$=15-11\sqrt{10}-12=3-11\sqrt{10}$

$\langle 2\rangle: \left(\frac{3}{5}+\sqrt[3]{3}\right)\left(-\frac{1}{2}+2\cdot\sqrt[3]{3}\right)=?$

$\Rightarrow\left(\frac{3}{5}+\sqrt[3]{3}\right)\left(-\frac{1}{2}+2\cdot\sqrt[3]{3}\right)=-\frac{3}{10}+\frac{6}{5}\cdot\sqrt[3]{3}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{3}+2\cdot\sqrt[3]{9}$

$=-\frac{3}{10}+\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt[3]{3}+2\cdot\sqrt[3]{9}=-\frac{3}{10}+\left(\frac{12-5}{10}\right)\sqrt[3]{3}+2\cdot\sqrt[3]{9}$

$=-\frac{3}{10}+\frac{7}{10}\cdot\sqrt[3]{10}+2\cdot\sqrt[3]{9}$

$\langle 3\rangle: \left(\sqrt{7}-3\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{3}+7\right)=?$

$\Rightarrow\left(\sqrt{7}-3\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{3}+7\right)=\left(\sqrt{7}-3\sqrt{3}\right)\left(7+3\sqrt{3}\right)$

$=\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2=7-9\cdot3=7-27=-20$

$\langle 4\rangle: \left(5x-\sqrt{y}\right)\left(5x+\sqrt{y}\right)=?$

$\Rightarrow\left(5x-\sqrt{y}\right)\left(5x+\sqrt{y}\right)=(5x)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2=25x^2-y$

$\langle 5\rangle: \left(\sqrt{2a}-3b\right)\left(3\sqrt{2b}-b\right)=3\left(\sqrt{2a}\right)^2-b\sqrt{2a}$

$-9b\sqrt{2b}+3b^2$

$=6a-10b\sqrt{2a}+3b^2$

$\langle 6\rangle: \left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)\left(5\sqrt{3x}-5\sqrt{y}+z\right)=?$

$\Rightarrow 5\cdot\sqrt{3x\cdot x}-5\sqrt{x\cdot y}+z\sqrt{x}+10\sqrt{3x\cdot y}$

$-10\sqrt{y^2}+2z\sqrt{y}$

$=5\sqrt{3}x-5\sqrt{xy}+z\sqrt{x}+10\sqrt{3xy}-10y+2z\sqrt{y}$

عملیه ناطق سازی جذور (Simplifying of Complex Radicals)

چون می‌دانیم که عملیه تقسیم فقط بالای اعداد تام ممکن می‌گردد.

مثال‌ها:

$\langle 1 \rangle : \frac{+25}{+4} = +6.25$

$\langle 2 \rangle : \frac{+25}{-3} = -8.\overline{3}$

$\langle 3 \rangle : \frac{+25}{+2.4} = \frac{+250}{+24} = +10.41\overline{6}$

$\langle 4 \rangle : \frac{+25}{-1\frac{3}{5}} = \frac{+25}{-\frac{8}{5}} = (+25)\left(-\frac{5}{8}\right) = -\frac{125}{8} = -15.625$

اما عملیه تقسیم بالای اعداد غیر نسبتی، یک افاده غیر ناطق است، زیرا:

$\frac{+25}{+\sqrt{2}} = \frac{+25}{+1.4142135\cdots\cdots} = (?)$

بناءً لازم است تا از مخرج کسرها جذر را رفع نماییم یعنی ناطق‌سازی صورت بگیرد. بناءً عامل ناطق‌سازی در یک جذر ساده به افاده گفته می‌شود که به جذر مذکور ضرب شود، یک افاده غیر جذری (نستبی) حاصل می‌گردد. همچنان:

عامل ناطق‌سازی برای جذور مرکب (به درجه دوم) مزدوج آن می‌باشد.

مثال‌ها:

1) $\sqrt{13}$ $\xrightarrow{\text{عامل ناطق سازی}}$ $\sqrt{13}$

2) $\sqrt{5}-3$ $\xrightarrow{\text{عامل ناطق سازی}}$ $\sqrt{5}+3$

3) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$ $\xrightarrow{\text{عامل ناطق سازی}}$ $\sqrt{7}-\sqrt{3}$

4) $\sqrt{2x}-1$ $\xrightarrow{\text{عامل ناطق سازی}}$ $\sqrt{2x}+1$

5) $5a+\sqrt{2b}$ $\xrightarrow{\text{عامل ناطق سازی}}$ $5a-\sqrt{2b}$

6) $\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ $\xrightarrow{\text{عامل ناطق سازی}}$ $\sqrt{a+\sqrt{b}}$

در نظر داشته باشید که عامل ناطق‌سازی برای جذور مرکب بلندتر از درجه دوم قوس دوم مطابقت مربوطه آن می‌باشد.

$\langle 1 \rangle : \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = ?$

$\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} \xrightarrow{\text{عامل ناطق سازی}} (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})$

$\langle 2 \rangle : \sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} = ?$

$\because a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\Rightarrow \sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} \xrightarrow{\text{عامل ناطق سازی}} (\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2})$

$\langle 3 \rangle : \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = ?$

مرحله اول

$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \xrightarrow{\text{عامل ناطق سازی}} (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})$

$\Rightarrow (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

مرحله دوم

$\sqrt{x} - \sqrt{y} \xrightarrow{\text{عامل ناطق سازی}} (\sqrt{x} + \sqrt{y})$

$\langle 4 \rangle : \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \overline{?}$

$\because a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

$\Rightarrow \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} \rightarrow (\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3})$

$\langle 5 \rangle : \sqrt[5]{m} + \sqrt[5]{n} = \overline{?}$

$\because a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

$\Rightarrow \sqrt[5]{m} + \sqrt[5]{n} \rightarrow (\sqrt[5]{m^4} - \sqrt[5]{m^3n} + \sqrt[5]{m^2n^2} - \sqrt[5]{mn^3} + \sqrt[5]{n^4})$

سوم: عملیه تقسیم جذور مرکب (Division of Complex Radicals)

جهت اجرای عملیهٔ تقسیم در جذور مرکب اولاً با استفاده از نـاطق‌سـازی مخرج را به افاده نسبتی تبدیل نموده، بعداً عملیه تقسیم را انجام می‌دهیم.

مثال‌ها:

جذور ذیل را تقسیم نمایید.

$\langle 1\rangle: \dfrac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{2}}=?$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{6}+3)(\sqrt{2})}{(\sqrt{2})(\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{12}+3\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{2}+1.5\sqrt{2}$$

$$=\frac{\sqrt{4\cdot 3}}{2}+1.5\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}+1.5\sqrt{2}=\sqrt{3}+1.5\sqrt{2}$$

$\langle 2\rangle: \dfrac{8\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}=?$

$$\Rightarrow \frac{8\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{8\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-(1)^2}=\frac{8\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{5-1}$$

$$=\frac{8\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{4}=2\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)=2\sqrt{15}+2\sqrt{3}$$

$\langle 3\rangle: \dfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=?$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{10}+3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\sqrt{15}-\sqrt{10}+3\sqrt{3}-3\sqrt{2}$$

$\langle 4\rangle: \dfrac{a^2+2\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=?$

$$\Rightarrow \frac{(a^2+2\sqrt{a})(\sqrt{a})}{(\sqrt{a})(\sqrt{a})}=\frac{a^2\sqrt{a}+2a}{a}=\frac{a(a\sqrt{a}+2)}{a}=a\sqrt{a}+2$$

$\langle 5\rangle: \dfrac{x^2y-y^2}{x+\sqrt{y}}=?$

$$\Rightarrow \frac{(x^2y-y^2)(x-\sqrt{y})}{(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})}=\frac{y(x^2-y)(x-\sqrt{y})}{x^2-y}=y(x-\sqrt{y})$$

$$=xy-y\sqrt{y}$$

$\langle 6\rangle: \dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}=?$

$$\Rightarrow \frac{(a^2-b^2)(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}=\frac{(a-b)(a+b)(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{b-a}$$

$$=\frac{-(b-a)(a+b)(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{b-a}=-(a+b)(\sqrt{b}+\sqrt{a})$$

$$=-a\sqrt{a}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}-b\sqrt{b}$$

$\langle 7\rangle$: معکوس جذر $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ را دریابید.

$$\sqrt{m}+\sqrt{n}\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\frac{1(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}$$

$$=\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{m-n}$$

$\langle 8\rangle: \dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}=?$

$$\Rightarrow \frac{(x-y)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}$$

$$=\frac{(x-y)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}{x-y}$$

$$=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$$

اعداد موهومی (Imaginery Numbers)

طوریکه قبلاً در شروع فصل اول راجع به معرفی ست اعداد از ست اعـداد فوق نام برده شد و از جانبی در بحث جذر اعداد الجبری ذکـر نمـودیم اعـداد منفی به جذر نماهای جفت در ساحه اعداد حقیقی دارای قیمت نمی‌باشـد کـه چنین اعداد را اعداد موهومی می‌نامند، مثلاً:

$\sqrt{-49} = ?$

در ساحه اعداد حقیقی قیمت ندارد $= \sqrt{-49} \Leftarrow -49 = (\ )(\ )$

پس ست اعداد موهومی چنین تعریف گردیده است:

$$\text{Im} = \left\{x_i \,/\, x \in IR, i = \sqrt{-1}\right\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{-49} = \sqrt{49\cdot(-1)} = \sqrt{49}\cdot\sqrt{-1} = \pm 7i$$

یعنی:

واحد اعداد موهومی $i = \sqrt{-1}$ تعریف گردیده است.

همچنان قابل ذکر است اینکه:

$\sqrt{-1} = i$	$i = \sqrt{-1}$
$\sqrt[4]{-1} = \sqrt{i}$	$i^2 = -1$
$\sqrt[6]{-1} = \sqrt[3]{i}$	$i^3 = -i$
$\sqrt[8]{-1} = \sqrt[4]{i}$	$i^4 = +1$
.	$i^5 = i$
.	.
	.

مثال‌ها:

جذور ذیل را در شکل اعداد موهومی آن بنوسید.

$\langle 1\rangle : \sqrt{-25} = \sqrt{25\cdot(-1)} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{-1} = \pm 5i$

$\langle 2\rangle : \sqrt{-\dfrac{4}{81}} = \sqrt{\dfrac{4}{81}\cdot(-1)} = \sqrt{\dfrac{4}{81}}\cdot\sqrt{-1} = \pm\dfrac{2}{9}i$

$\langle 3\rangle : \sqrt[4]{-625} = \sqrt[4]{625\cdot(-1)} = \sqrt[4]{625}\cdot\sqrt[4]{(-1)}$

$= \pm 5\sqrt{\sqrt{-1}} = \pm 5\sqrt{i}$

$\langle 4\rangle : \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64\cdot(-1)} = \sqrt[6]{64}\cdot\sqrt[6]{(-1)}$

$= \pm 2\cdot\sqrt[3]{\sqrt{-1}} = \pm 2\cdot\sqrt[3]{i}$

عملیات اساسی بالای اعداد موهومی
Fundamental Operation on the Imaginery Numbers

اجرای عملیات اساسی بالای اعداد موهـومی عینـاًماننـد اعـداد الجبـری صورت می‌گیرد.

عملیه جمع (Addition):

$\langle 1\rangle : (+5i) + (+8i) = +13i$

$\langle 2\rangle : (-3i) + (-7i) = -10i$

$\langle 3\rangle : (-5.2i) + (+1.4i) = -3.8i$

$\langle 4\rangle : (7\frac{1}{2}i) + (-3\frac{1}{4}i) = ?$

$$\Rightarrow +\frac{15i}{2} - \frac{13i}{4} = \frac{+30i - 13i}{4} = +\frac{17}{4}i$$

$\langle 5\rangle : (+6i) + (-3i) + (-8i) + (+4i) = ?$

$\Rightarrow (+10i) + (-11i) = -i$

ست اعداد مختلط (Complex Numbers)

مجموعه الجبری اعداد حقیقی و موهومی را اعداد مخـتلط تعریـف نمـوده اند، یعنی:

$$C = \{a + bi / a, b \in IR, i = \sqrt{-1}\}$$

مثال: $5 + 2i\ ,\ 7i - 3\ ,\ \frac{2}{5} + 8i\ ,\ 7.1 - \frac{2}{3}i\ ,.......$

عملیات اساسی بالای اعداد مختلط

اجرای عملیات اساسی بالای اعداد مختلط عیناً مانند افـادههـای الجبـری صورت می‌گیرد.

عملیه جمع (Addition): جهت اجرای عملیه جمع اعداد مخـتلط، اعـداد حقیقی را باهم و اعداد موهومی را باهم جمع الجبری می‌نماییم.

مثال‌ها:

1) $(+5 + 2i) + (-7 + 3i) = (+5 - 7) + (+2i + 3i) = -2 + 5i$

2) $(-3.5i + 7) + (-4.7 + 3i) = (7 - 4.7) + (-3.5i + 3i)$
$= 2.3 - 0.5i$

3) $(+\frac{3}{5} - 2i) + (-1\frac{1}{2}i + \frac{7}{3}) = (+\frac{3}{5} + \frac{7}{3}) + (-2i - \frac{3}{2}i)$
$= (\frac{+9 + 35}{15}) + (-\frac{7}{2}i) = +\frac{44}{15} - \frac{7}{2}i$

عملیه تفریق (Subtration): در عملیه تفریـق فقـط علامـه مفـروق را تغییر داده عیناً عملیه جمع را اجرا می‌نماییم.

عملیه تفریق (Subtraction):

$\langle 1 \rangle : (+8i) - (-5i) = +8i + 5i = +13i$

$\langle 2 \rangle : (-4i) - (+18i) = -4i - 18i = -22i$

$\langle 3 \rangle : (+9.3i) - (2.8i) = +9.3i - 2.8i = +6.5i$

$\langle 4 \rangle : (-\frac{5}{7}i) - (-\frac{3}{2}i) = -\frac{5}{7}i + \frac{3}{2}i$
$= \frac{-10i + 21i}{14} = +\frac{11}{14}i$

عملیه ضرب (Production):

1) $(+7i)(+3i) = +21i^2 = +21(-1) = -21$

2) $(-\frac{3}{5}i)(-\frac{2}{3}i)(+\frac{7}{2}i) = +\frac{7}{5}i^3 = +\frac{7}{5}i^2 \cdot i$
$= +\frac{7}{5}(-1)i = -\frac{7}{5}i$

3) $(-3.2i)(-0.04i) = +0.128i^2 = +0.128(-1) = -0.128$

4) $(+8i)(-2i)(-\frac{5}{16}i)(-4i) = -20i^4 = -20(+1) = -20$

عملیه تقسیم (Division):

1) $\frac{+15i}{+3i} = +5$

2) $\frac{+35i}{-2} = -17.5i$

3) $\frac{+8}{+5i} = \frac{(+8)(i)}{(+5i)(i)} = \frac{+8i}{+5i^2} = \frac{+8i}{+5(-1)} = \frac{+8i}{-5} = -1.6i$

4) $\frac{(+8i)(-7i)}{-2i} = \frac{-56i^2}{-2i} = +28i$

مثال‌ها:

1) $(+8i+5)-(-4+2i)=?$

$=+8i+5+4-2i=(+5+4)+(8i-2i)=+9+6i$

2) $(-7.3+2i)-(\frac{5}{3}i+7)=?$

$=-7.3+2i-\frac{5}{3}i-7=(-7.3-7)+(2i-\frac{5}{3}i)=-14.3+\frac{1}{3}i$

عملیه ضرب (Production): مانند عملیه ضرب افاده‌های تـام الجبـری اجرأ می‌گردد.

مثال‌ها:

1) $(+3+2i)(5-4i)=?$

$\Rightarrow +15-12i+10i-8i^2=+15-12i+10i-8(-1)$

$=+15-2i+8=+23-2i$

2) $(-\frac{4}{5}i+\frac{3}{7})(-\frac{1}{2}i-\frac{4}{3})=?$

$\Rightarrow +\frac{2}{5}i^2+\frac{16}{15}i-\frac{3}{14}i-\frac{4}{7}=+\frac{2}{5}(-1)+\frac{224i-45i}{210}-\frac{4}{7}$

$=-\frac{2}{5}+\frac{179i}{210}-\frac{4}{7}=\frac{179}{210}i-\frac{2}{5}-\frac{4}{7}=\frac{179}{210}i-\frac{34}{35}$

3) $(7i+5)(7i-5)=?$

$\Rightarrow (7i+5)(7i-5)=(7i)^2-(5)^2=49i^2-25=49(-1)-25$

$=-49-25=-74$

عملیه تقسیم (Division): این عملیه مانند عملیه تقسیم پولینوم بـالای مونوم و پولینوم بالای مونوم و پولینوم بالای پولینوم صورت می‌گیرد.

1) $\frac{+5+2i}{2}=\frac{+5}{2}+\frac{2i}{2}=+2.5+i$

2) $\frac{3+7i}{5i}=?$

$\Rightarrow \frac{3+7i}{5i}=\frac{3}{5i}+\frac{7i}{5i}=\frac{3\cdot i}{5i\cdot i}+\frac{7}{5}=\frac{3i}{5i^2}+\frac{7}{5}=\frac{3i}{5(-1)}+\frac{7}{5}$

$=\frac{3i}{-5}+\frac{7}{5}$

$=-0.6i+1.4$

3) $\frac{7}{i-1}=?$

$\Rightarrow \frac{7(i+1)}{(i-1)(i+1)}=\frac{7i+7}{i^2-1}=\frac{7i+7}{(-1)-1}=\frac{7i+7}{-2}=\frac{7i}{-2}+\frac{7}{-2}$

$=-3.5i-3.5$

4) $\frac{5+2i}{3+i}=?$

$=\frac{(5+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{15-5i+6i-2i^2}{9-i^2}=\frac{15+i-2(-1)}{9-(-1)}$

$=\frac{15+i+2}{9+1}=\frac{17+i}{10}=\frac{17}{10}+\frac{i}{10}=1.7+0.1i$

تمرینات فصل دوم

۱. اعداد الجبری ذیل را ساده سازید.

1) $(+31)+(+54)=?$

2) $(-8)+(-17)+(-18)=?$

3) $(+7.4)+(+3.25)+(+5.1)=?$

4) $(-7.5)+(+2\frac{3}{5})=?$

5) $(-3\frac{1}{4})+(-1\frac{2}{5})+(+5\frac{3}{4})+(-\frac{5}{3})=?$

6) $(-35)-(+42)=?$

7) $(+7.523)-(-1.43)=?$

8) $(+5\frac{2}{7})-(+7\frac{3}{8})=?$

9) $(-4+7.2-2.12)-(+4.8+\frac{3}{5})=?$

10) $(-1\frac{3}{7}-2\frac{3}{5})-(+3\frac{1}{5}+2\frac{3}{5}-\frac{7}{4})=?$

11) $(+3.5-2.41)(+7.42-2.5-11.2)=?$

12) $(-2\frac{3}{5}-4\frac{1}{5}-\frac{8}{11})(-7\frac{1}{2}+0.42)=?$

13) $(+5-8-35+51)\div(-4.3-0.7-7)=?$

14) $(-2.3-4.51-0.7-2.49)\div(-3\frac{1}{2}+\frac{7}{2})=?$

15) $(-4\frac{2}{5}+3\frac{1}{4})\div(-3.5-0.5+\frac{1}{2})=?$

16) $(-5\frac{3}{5}-1\frac{1}{2})(-\frac{41}{8}+\frac{1}{8})\div(0.8+8.2)=?$

17) $\dfrac{-7\frac{3}{8}+4\frac{1}{4}}{+3\frac{1}{5}-1\frac{2}{7}+\frac{11}{3}}=?$

18) $(-3)^3+(2)^5-(-4.31)^0+(-1\frac{2}{3})^2=?$

19) $(-7+2.3+4.7+2\frac{3}{5})^3-(+3\frac{1}{2}-\frac{7}{4})^2=?$

20) $(-2)^{-2}+(4.2)^0-(+2.3)^1+(\frac{5}{3})^2=?$

۲. اعداد ذیل را در شکل علمی ارائه نمایید:

21) 32000000

22) 745300000000 = ?

23) 432000000000000 = ?

24) 1000000000000000000 = ?

25) 5000000000 = ?

26) 6900000000 = ?

27) 49653267397000 = ?

28) 492300000000 = ?

29) 56746200 = ?

30) 356566666666 = ?

31) 0.0004 = ?

32) 0.000085 = ?

33) 0.0000000183 = ?

34) 0.00000000061492 = ?

35) 0.0000007626 = ?

۳. جذرالمربع اعداد ذیل را دریابید.

36) 65536

37) 8185321

38) 9126441

39) 16016004

40) 10246401

41) 2160900

42) 11560000

۴. جذور اعداد ذیل را الی سه رقم اعشاری محاسبه نمایید.

43) 7543) 75
44) 8
45) 371
46) 5694
47) 4581
48) 74935612

۵. جذور اعداد اعشاری ذیل را دریابید.

49) 559.3225
50) 386013.69
51) 455.993316
52) 1869.784081
53) 5721.243
54) 3.54912
55) 0.841
56) 0.082
57) 0.008215
58) 0.00095143

۶. ضریب حدود ذیل را تعیین نمایید.

59) $-2xy^2$
60) $+5ab^2c^3$
61) $+8x^2m$
62) $-\frac{5}{8}ab^3z^2$
63) $-\sqrt{2}my^3$
64) $+3.52ax^3y^2$

۷. از ستون‌های ذیل حدود مشابه الجبری را دریابید.

A) $+2a^2b^3$
B) $+\frac{7}{11}y^3zb$
C) $+15azx^2p^3$
D) $+14pap$
E) $-7T^5L^7m$
F) $-5yx$
G) $-5am^3$

65) $2xy$
66) $-5a^2b^3$
67) $+\frac{8}{5}am^3$
68) $+3.4by^3z$
69) $-151ax^2zp^3$
70) $+12mT^5L^7$
71) $-14ap^2$

۸. در ستون از افاده‌های تام الجبری مونوم‌هـا، بینـوم‌هـا و ترینـوم‌هـا را دریابید.

72) $2xy-2$
73) $5a^2-2b^2+c$
74) $-2x^3y^2z$
75) $+5ab^2c^3+8$
76) $+3x^2-8x+2$
77) $-35y^3z+3x$
78) $3a^2y^3$
79) $-3/5\,ab^2c^3d^5$
80) $4x^2-9y^2$
81) ax^2+bx+c

۹. درجه مونوم‌های ذیل را تعیین نمایید؟

82) $5ab^3$
83) $-4ax^2z$
84) $+\frac{3}{5}a^2x^3y^2z^5$
85) $+7.3am^3n^3$
86) $+25x^5p^3T^7L$

۱۰.درجه پولینوم‌های ذیل را تعیین نمایید؟

87) $5x^2-2$
88) $2a^3+5a+1$
89) $7x+15x^2-2$
90) $35y+8y^2-2y^3+y^5$
91) $2x^5-32$
92) a^2-a^3+5a+1
93) $2x^{13}-5x^3y^5+2x^5y^4-2x^2y^8-y^{12}$
94) $ab^2-a^2b+2a^2b^2-a^3+2b^4-1$

۱۱.پولینوم های ذیل را اولاً در شـکل نزولـی و بعـداً در شـکل صـعودی ترتیب نمائید؟

95) $5x-2x^2+8$

96) $2a^5-2a^2-7a^3+a-a^4$

97) $x^3-2x+\frac{3}{5}x^2-2$

98) $5y^2-y^3+2y^4+8y+\frac{3}{5}$

99) $2m^2-5m+m^3+8$

۱۲. پولینوم‌های ناقص ذیل را جبران نموده در شکل کامل ارائه نمایید.

100) $3x^3-5x+1$

101) $5a^2+8a^3-12$

102) $y^5-15y^2+8y^3-7$

103) a^4-2a+9

104) m^4-16

۱۳. افاده‌های الجبری ذیل را بنابر قیمت‌های داده شده حروف آن قیمت‌گذاری نمایید.

105) $2x^2-5x+1$ برای $x=2$

106) $5a^3-2a^2+8$ برای $a=-5$

107) $x^3y+2xy-1$ برای $y=-3, x=+4$

108) $3m^3-5mn^2-2mn+3$ برای $n=-1.5, m=+2.1$

109) $\frac{5x+4}{3x-1}$ برای $x=+3$

110) $\frac{y^2-2y+1}{2y+3}$ برای $y=-2$

111) $\frac{5ab^2-2ab+1}{2a-3b}$ برای $b=+2, a=-3$

112) $\sqrt{3x+7}$ برای $x=\frac{2}{3}$

113) $\sqrt[3]{8x^2y-2xy+7}$ برای $y=2, x=-1$

114) $\sqrt{\frac{8m^3-2m^2+m-1}{m^2+8m+1}}$ برای $m=3$

۱۴. افاده‌های طاقت نمادار ذیل را ساده سازید:

115) $(2x)^5\cdot(2x)^7\cdot(2x)^{-2}=?$

116) $(am^2)^{-5}\cdot(am^2)^{-7}=?$

117) $(-5y^3z)^8\cdot(-5y^3z)^{-10}\cdot(-5y^3z)^{-3}=?$

118) $(-3xy)^4\cdot(+4x^2y^3)^4=?$

119) $(+2a)^{-5}\cdot(-3b)^{-5}\cdot(-3c)^{-5}=?$

120) $\left[(2x)^{-2}\right]^{-3}=?$

121) $\left\{\left[(x^2y^3)^3\right]^2\right\}^5=?$

122) $(-2a^2b^3)^7=?$

123) $\frac{(-2ax)^5}{(-2ax)^{-4}}=?$

124) $\frac{(+8m^2)^3\cdot(+8m^2)^{13}}{(+8m^2)^8}=?$

125) $\frac{(-az)^2(-az)^5}{(-az)^4(-az)^{-5}}=?$

126) $\dfrac{\left(-3xy^2\right)^{15}}{\left[\left(2xy^3\right)^3\right]^5} = ?$

127) $\dfrac{(4ax)^8(4xa)^7}{\left[\left(2^2ax\right)^5\right]^3} = ?$

128) $\left(\dfrac{2x}{5y}\right)^{-7} \cdot \left(\dfrac{5y}{2x}\right)^{15} = ?$

129) $\left(\dfrac{12am^2}{5xy}\right)^3 \div \left(\dfrac{5xy}{6a \cdot 2m^2}\right)^{-3} = ?$

۱۵. افاده‌های تام الجبری ذیل را جمع نمایید.

130) $(+18y)+(+5y)+(+7y)=?$

131) $\left(-4xz^2\right)+\left(-15xz^2\right)+\left(-xz^2\right)+\left(-2xz^2\right)=?$

132) $\left(+2ax^2\right)^2+\left(-12a^2x^4\right)=?$

133) $\left(12ab^2\right)+\left(-7ab^2\right)+\left(-4ab^2\right)+\left(+3b^2a\right)=?$

134) $(2a+5b)+(3a-8b)=?$

135) $\left(-14a^2+2b^3-c\right)+\left(+8a^2-b^3+3c\right)=?$

136) $\left.\begin{array}{l} A=2x^3-5x^2+8x+4 \\ B=5x^3-12x-2 \end{array}\right\} A+B=?$

137) $\left.\begin{array}{l} A=-2x^2y^3+8xy^2-5x^2y^2+3 \\ B=-5xy^2+x^2y^2-4+xy \\ C=8xy-12xy^2+5x^2y^3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A+2B=? \\ 3B+3C=? \\ A+B+C=? \\ 2A+C=? \end{array}$

۱۶. افاده‌های تام الجبری ذیل را تفریق نمایید.

138) $\left(+5xy^2\right)-\left(+3xy^2\right)=?$

139) $\left(-12am^2\right)-\left(-4am^2\right)$

140) $\left(+8ab^2c\right)-\left(-2acb^2\right)-\left(+5b^2ac\right)=?$

141) $(2a+5b)-(-8a-b)=?$

142) $\left.\begin{array}{l} A=2x^2-5x+1 \\ B=x^3-8x+3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A-B=? \\ B-A=? \end{array}$

143) $\left.\begin{array}{l} A=-4y^2-8y+7 \\ B=2y+9 \\ C=3y^2-10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A-B-C=? \\ 2A-3B=? \\ 5B-2C=? \\ 3B-2A-3C=? \end{array}$

۱۷. افاده های تام الجبری ذیل را ضرب نمایید.

144) $\left(-5xy^2\right)\left(+8x^2y^3\right)=?$

145) $\left(2a^3b\right)\left(\dfrac{3}{2}a^2b^3\right)=?$

146) $\left(-2am^3\right)\left(-8a^2m\right)\left(+\dfrac{3}{16}am\right)=?$

147) $\left(-2ay^2\right)\left(3x^2y-2a^2y\right)=?$

148) $\left(+\dfrac{8}{5}x^3\right)\left(-\dfrac{3}{2}x^5-\dfrac{5}{4}x^2y+\dfrac{5}{8}y^3\right)=?$

149) $(2x-5y)(3x+y)=?$

150) $(2a-b)\left(a^2-2ab+b^2\right)$

151) $\left(3e^{2x}-1\right)\left(2e^x-e^{x+1}-1\right)=?$

152) $(x-2y+1)^2=?$

153) $(a+2b-1)(2a-b+1)=?$

۱۸. افاده‌های تام الجبری ذیل را تقسیم نمایید.

154) $\left(-25x^2y^3\right)\div\left(-5xy^2\right)=?$

155) $\left(4.5a^3b^2c^3\right)\div\left(-0.9ax^2c^3\right)=?$

156) $\left(+\frac{8}{5}x^3yz^2\right)\div\left(-1\frac{2}{3}x^2yz\right)=?$

157) $\left(-12a^2b+5ab^2\right)\div(2ab)=?$

158) $\left(8x^3+14x^2-8x+5\right)\div(-4x)=?$

159) $\left(2x^3+x^2-x+2\right)\div(x+1)=?$

160) $\left(6y^3+24y^2+10y+4\right)\div(2y+8)=?$

161) $\left(9x^2-16\right)\div(3x+4)=?$

162) $\left(8y^3-27\right)\div\left(4y^2+6y+9\right)=?$

163) $\left(2x^5+x^2-8x^3+6x-3\right)\div\left(2x^3-2x+1\right)=?$

۱۹. در عملیات تقسیم ذیل قیمت باقیمانده را دریابید.

164) $\left(x^3-5x+4\right)\div(x-3)=?$

165) $\left(y^5-3y^2+8y-1\right)\div(y+2)=?$

166) $\left(a^3+8a-89a^2+3\right)\div(a+1)=?$

167) $\left(2m^3-5m+1\right)\div(m-5)=?$

168) $\left(p^4-16\right)\div(p+2)=?$

۲۰. افاده‌های تام الجبری ذیل را به اساس تقسیم ترکیبی تقسیم نمائید.

169) $\left(8x^3-2x+5\right)\div(x-2)=?$

170) $\left(9a^3-5a^2+a-2\right)\div(a-3)=?$

171) $\left(y^2+8y+12\right)\div(y-6)=?$

172) $\left(m^5-32\right)\div(m-2)=?$

173) $\left(x^3+x^2-2\right)\div(x-1)=?$

۲۱. افاده‌های تام الجبری ذیل را ساده سازید.

174) $3x-\left\{2x^2+(x-1)(x-7)\right\}=?$

175) $\left(2a^2-5\right)-\left\{3a^2\left[(a+5)(a-1)-(2a+1)(a-3)\right]\right\}$

176) $5a^2b+\left[2ab\left\{2(a-b)(a-3)+5a(b-1)\right\}\right]$

177) $\left\{3x\left(x^2-1\right)+5x\left(x^2-3x+6\right)\right\}-(x+1)\left(x^3-2x+4\right)$

۲۲. بینوم‌های ذیل را انکشاف دهید.

178) $(x-3)^2=?$

179) $(5a+2b)^2=?$

180) $(a+3b)^3=?$

181) $(3x-2y)^3=?$

182) $(a+b)^5=?$

183) $(2m-1)^6=?$

184) $(m-2n)^5=?$

185) حد هشتم بینوم $(x-2y)^{10}$ عبارت از

186) حد پنجم بینوم $(2a+3b)^8$ عبارت از

187) $x^3-8=?$

188) $64m^2-125=?$

189) $y^4-16=?$

190) $32n^5-1=?$

191) $a^6-64b^6=?$

192) $2x^3+54=?$

193) $32y^5+1=?$

194) $(ax)^7+128y^7=?$

195) $x^2+1=?$

196) $a^4+16b^4=?$

197) $81x^4+625=?$

افاده‌های تام الجبری ذیل را تجزیه نمایید.

198) $2am+8an=?$

199) $5x^2-8x+xy=?$

200) $20y^2-5y+10y^3=?$

201) $3xy^2-5x^2y^2+8x^3y^3+2xy^5=?$

202) $x^3-xy^2=?$

203) $m^4-n^8=?$

204) $\frac{4}{25}m^2 - \frac{1}{81} = ?$
205) $(2x-1)^2 - y^4 = ?$
206) $(a-2b)^2 - (b+2a)^2 = ?$
207) $m^{2e} - 1 = ?$
208) $(ax)^6 - y^{2ax} = ?$
209) $a^2 - 12a + 36 = ?$
210) $25 + 10m + m^2 = ?$
211) $4x^2 - 4x + 1 = ?$
212) $36y^2 - 24yz + 4z^2 = ?$
213) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = ?$
214) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = ?$
215) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2c - 1 = ?$
216) $ax^2 - ax + bx - b = ?$
217) $x^2 - xz + x + xy - yz + y = ?$
218) $xz - x - 2yz + 2y = ?$
219) $ax^2 - bx^2 + ax - bx - a + b = ?$
220) $y^3 + y^2 + 3y + 1 = ?$
221) $x^2 - 8x + 12 = ?$
222) $y^2 - 10y + 16 = ?$
223) $a^2 - 7a + 12 = ?$
224) $m^4 + 8m^2n^2 + 15n^4 = ?$
225) $x^2 - x - 12 = ?$
226) $m^2 + 4m - 21 = ?$
227) $m^2 + 4m - 21 = ?$
228) $x^2 + 5x - 36 = ?$
229) $2x^2 + 3x - 2 = ?$
230) $2y^2 - 3y - 5 = ?$
231) $14m^2 + 11m + 2 = ?$
232) $6x^2 - 17x + 12 = ?$
233) $x^2 + 6x + 1 = ?$
234) $y^2 - 10y - 1 = ?$
235) $2m^2 - 8m + 3 = ?$
236) $3p^2 - 5p + 1 = ?$
237) $8x^2 - 4x - 5 = ?$

۲۳. کوچکترین مضرب مشترک افاده‌های تام الجبری ذیل را دریابید:

238) $3m^2 \, , 12m^3n \, , 6mn^2$
239) $10x^3y^2 \, , 5x^2y^3 \, , 25xy^4$
240) $3ab \, , 4a^2b^3 \, , 16a^3b^2 \, , 15a^3b^3$
241) $a+b \, , (a+b)^2$
242) $a-b \, , a^2 - 2ab + b^2$
243) $x^2 + 2xy + y^2 \, , x^2 - y^2$
244) $m-n \, , m^2n - mn^2 \, , m^2 - n^2$
245) $a^2 + ab + b^2 \, , a^3 - b^3 \, , (a-b)^2$
246) $x^2 + 3x - 10 \, , 2x^2 - 5x + 2$
247) $y^3 - 1 \, , y^2 - 2y + 1 \, , y^2 + y - 2$

۲۴. کسرهای الجبری ذیل را اختصار نمایید.

248) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = ?$
249) $\frac{a^2 - 1}{1 + a} = ?$
250) $\frac{y^2 - 49}{y - 7} = ?$
251) $\frac{a^3 - m^3}{a^2 - m^2} = ?$
252) $\frac{y^2 - 8y - 9}{y^2 - 7y - 18} = ?$
253) $\frac{9x^2 - 6x + 1}{y - 3xy} = ?$
254) $\frac{p^2 - 14p - 15}{p^2 + 3p + 2} = ?$

۲۵. کسرهای الجبری ذیل را ضرب نمایید.

255) $\frac{2x^2y}{7ab^2} \cdot \frac{21a^2b^3}{8x^2y^3} = ?$

256) $\frac{2y+2}{y^2-1} \cdot \frac{x-1}{x+1} = ?$

257) $\frac{x^2-x-6}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{x^2+2x} = ?$

258) $\frac{a^3-a^2+4-4a}{2+a} \cdot \frac{a+1}{2-a-2a^2+a^3} = ?$

259) $\frac{a^2-b^2}{xy+y^2} \cdot \frac{x^2-y^2}{a+b} \cdot \frac{1}{a-b} = ?$

260) $\frac{m^3-n^3}{m^2+n^2+mn} \cdot \frac{m+n}{m^4-n^4} \cdot \frac{m^2+n^2}{2mn} = ?$

۲۶. کسر های الجبری ذیل را تقسیم نمایید.

261) $\frac{y^2-25}{x^2-49} \div \frac{y-5}{x^2+7x} = ?$

262) $\frac{a^3-b^3}{a+b} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a^2-b^2} = ?$

263) $\frac{xy+y^2}{x-y} \div \frac{xy}{x^2-y^2} = ?$

264) $\frac{m^4-n^4}{m^2-2mn+n^2} \cdot \frac{m-n}{m^2+mn} \div \frac{m^2+n^2}{m} = ?$

265) $\frac{2ab^2}{3a-2b} \div \frac{8a^2b^3}{4b^2-9a^2} \div \frac{4a^2b}{3a+2b} = ?$

۲۷. کسرهای الجبری ذیل را جمع و تفریق نمایید.

266) $\frac{2x}{x+y} + \frac{2x+4y}{x+y} = ?$

267) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(a-b)^2}{2a^2+2b^2} = ?$

268) $\frac{(x-y)^2}{4xy} - \frac{(x+y)^2}{4xy} = ?$

269) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2-2ab+b^2}{b^2-a^2} - \frac{2a^2-2b^2}{a^2-b^2} = ?$

270) $\frac{x+y}{x} - \frac{x-y}{y} = ?$

271) $\frac{3mn+1}{mn} - \frac{m-2}{m} + \frac{3-m}{n} = ?$

272) $\frac{x}{x+1} + \frac{5x}{1-x} + \frac{3x^2}{1-x^2} = ?$

273) $\frac{3}{a^2-b^2} - \frac{7}{a+b} = ?$

274) $\frac{y-1}{y+1} - \frac{1}{y^2+2y+1} = ?$

275) $\frac{3x+2}{x^2-9} + \frac{x+1}{x^2-5x+6} = ?$

۲۸. کسر های الجبری ذیل را ساده سازید.

276) $\left(x+\frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{4-9x^2}{6x}\right) = ?$

277) $\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right) \div \frac{m^2-n^2}{m^2+mn} = ?$

278) $\left(\frac{4xy}{2x^2-2xy}\right) \div \left(1-\frac{x+y}{x-y}\right) = ?$

279) $\left(a-\frac{1}{a^2}\right) \div \left(a+\frac{a+1}{\;}\right) = ?$

280) $\left(\frac{m}{m^2-2m} - \frac{n}{m}\right.$ [illegible] m $\left.\frac{1}{m^2+2m}\right) \div \frac{m-2}{m^2+2m} = ?$

۲۹. کسر های مرکب الجبری ذیل را ساده سازید:

281) $\dfrac{\dfrac{1}{ab}+a}{\dfrac{2}{a}-\dfrac{3}{b}}=?$

282) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=?$

283) $\dfrac{2a-\dfrac{3}{a-1}}{3a^2-\dfrac{5a-1}{a+\dfrac{1}{a}}}=?$

284) $\dfrac{a+2b}{a-\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}}=?$

۳۰. طاقت های الجبری ذیل را در شکل افاده جذری بنوسید:

285) $(2a)^{\frac{3}{5}}=?$

286) $(3x^2y)^{\frac{1}{2}}=?$

287) $\left(\dfrac{2}{5}am^3\right)^{\frac{9}{11}}=?$

288) $(2.3x^2y^3z)^{1\frac{1}{2}}=?$

۳۱. افاده های جذری الجبری ذیل را در شکل طاقت الجبری بنوسید:

289) $\sqrt[3]{2x}=?$

290) $\sqrt[5]{(3a^2)^2}=?$

291) $\sqrt[7]{(a+2b)^4}=?$

292) $\sqrt[4]{(xy^2)^7}=?$

292) $\sqrt[4]{(xy^2)^7}=?$

293) $\sqrt{am}=?$

۳۲. جذور الجبری ذیل را هم‌درجه سازید:

294) $\sqrt{2x}\ ,\ \sqrt[3]{y}\ \backslash$

295) $\sqrt[3]{m^2}\ ,\ \sqrt[4]{m^3}$

296) $\sqrt[5]{(a-b)^3}\ ,\ \sqrt[3]{(a+b)^2}$

297) $\sqrt{3xy}\ ,\ \sqrt[5]{mx^2}$

298) $\sqrt[7]{x^3y}\ ,\ \sqrt[12]{x^5y}\ ,\ \sqrt[14]{x^9y^5}$

۳۳. جذور ذیل را مقایسه نمایید:

299) $\sqrt{23}\ ,\ \sqrt{75}$

300) $\sqrt[3]{8}\ ,\ \sqrt[3]{125}$

301) $\sqrt[4]{3}\ ,\ \sqrt[4]{7}$

302) $\sqrt{2}\ ,\ \sqrt[4]{4}$

303) $\sqrt[3]{3}\ ,\ \sqrt[5]{2}$

304) $\sqrt[4]{2}\ ,\ \sqrt[5]{3}$

305) $\forall x>1\ \ \sqrt[3]{x^2}\ ,\ \sqrt{x}$

306) $\forall y>1\ \ \sqrt[5]{2y}\ ,\ \sqrt[3]{3y^2}$

307) $\forall m>1\ \ \sqrt{3m}\ ,\ \sqrt[3]{4m^2}$

308) $\forall x>1\ \ \sqrt[7]{2x^5}\ ,\ \sqrt[4]{2x^3}$

۳۴. جذور الجبری ذیل را ساده سازید:

309) $\sqrt{\sqrt[3]{(2xy)^2}}=?$

310) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{(mx)^2}}}=?$

311) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{64x^8y^{16}z^{32}}}}}=?$

312) $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x\sqrt[5]{x^3}}}=?$

313) $\sqrt[4]{(2y)^3\sqrt[5]{2y\sqrt[3]{(2y)^2}}}=?$

۳۵. جذور الجبری ذیل را باهم ضرب نمایید:

314) $\sqrt{3x}\cdot\sqrt{5y}=?$

315) $\sqrt[3]{2m^2}\cdot\sqrt[3]{3m}\cdot\sqrt[3]{5m^3}=?$

316) $\sqrt[4]{(x-y)^5}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1}{(x-y)}}=?$

317) $\sqrt[7]{(a+1)^2}\cdot\sqrt[7]{(a+1)^{12}}=?$

318) $\sqrt[5]{x-y}\cdot\sqrt[5]{x+y}\cdot\sqrt[5]{\left(x^2-y^2\right)^{-1}}=?$

319) $\sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt{3y}=?$

320) $\sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt[3]{y^2}=?$

321) $\sqrt[8]{2x^3}\cdot\sqrt[4]{4x}\cdot\sqrt{x}=?$

322) $\sqrt[5]{(x-1)^3}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}=?$

323) $\sqrt[12]{(a+b)^7}\cdot\sqrt[8]{(a+b)^3}\cdot\sqrt[6]{(a+b)^5}=?$

۳۶. جذور الجبری ذیل را تقسیم نمائید:

324) $\sqrt{125}\div\sqrt{5}=?$

325) $\sqrt[3]{24x^5}\div\sqrt[4]{3x^2}=?$

326) $\sqrt[4]{80x^7y^9}\div\sqrt[4]{5x^3y}=?$

327) $12\sqrt{3xy}\div2\sqrt{\dfrac{1}{3}x}=?$

328) $\sqrt[3]{x^2y}\div\sqrt[4]{xy^3}=?$

329) $\sqrt[7]{2ab^2}\div\sqrt[3]{a^2b}=?$

330) $\sqrt[5]{(x+y)^3}\div\sqrt[4]{x^2+2xy+y^2}=?$

۳۷. از جذور ذیل عوامل ممکنه آنرا از جذر رفع نمایید.

331) $\sqrt{128x^3}=?$

332) $\sqrt[3]{16x^3y^5}=?$

333) $\sqrt[3]{250m^4}=?$

334) $\sqrt[4]{162a^5b^4c^8}=?$

335) $\sqrt[5]{96x^{11}y^{12}}=?$

336) $\sqrt[4]{48x^{10}y^8z^{13}}=?$

۳۸. عوامل غیر جذری ذیل را تحت جذر بیاورید:

337) $3\sqrt{5}=?$

338) $7\sqrt{2}=?$

339) $2\sqrt[3]{5}=?$

340) $3x\cdot\sqrt[3]{2x^2}=?$

341) $3ab^2\cdot\sqrt[4]{3a^3b}$

342) $\dfrac{1}{3}y^2\sqrt[3]{54y^2}=?$

۳۹. جذور الجبری ذیل را جمع و تفریق نمایید:

343) $5\sqrt{2}-7\sqrt{2}+8\sqrt{2}=?$

344) $7\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{5}=?$

345) $12x\sqrt[4]{3x}+7x\sqrt[4]{3x}-x\sqrt[4]{3x}=?$

346) $\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{45}=?$

347) $3\sqrt{25m}-\sqrt{9m}+2\sqrt{16m}=?$

348) $5\sqrt[3]{40x^4}+2x\sqrt[3]{135x}-\sqrt[3]{5x}=?$

۴۰. جذور مرکب ذیل را جمع و تفریق نمایید:

349) $\left.\begin{array}{l}A=2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\\ B=8\sqrt{2}-3\sqrt{5}\end{array}\right\}\begin{array}{l}A+B=?\\ A-B=?\end{array}$

350) $\left.\begin{array}{l}A=3x-\sqrt[3]{2x}+1\\ B=5+7x+\sqrt[3]{250x}\end{array}\right\}\begin{array}{l}A+B=?\\ A-B=?\end{array}$

351) $A = \sqrt{8x^2y} - 3\sqrt{3x}$?

$B = 2\sqrt{27x} + 3x\sqrt{2y}$ ژ = ?

۴۱. جذور مرکب ذیل را باهم ضرب نمایید:

352) $(5\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = ?$

353($(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = ?$

354) $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}) = ?$

355) $(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}) = ?$

356) $(\sqrt{m}-n)(\sqrt{m}+\sqrt{n}-1) = ?$

۴۲. جذور مرکب ذیل را تقسیم نمایید.

358) $\dfrac{12\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1} = ?$

358) $\dfrac{\sqrt{6}-5}{\sqrt{2}} = ?$

360) $\dfrac{3x^2-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = ?$

359) $\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}} = ?$

362) $\dfrac{m^3-n^3}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} = ?$

361) $\dfrac{xy-y}{\sqrt{x}-1} = ?$

۴۳. اعداد موهومی مختلط ذیل را ساده سازید:

363) $5i+8i-2i = ?$

364) $5i-8i+18i-4i = ?$

365) $(8i)(2i) = ?$

366) $(2i+8i)-(5i-3i+7i) = ?$

367) $(12i-7i)(3i+4i) = ?$

368) $\dfrac{15i}{3} = ?$

369) $\dfrac{8i}{25i} = ?$

370) $\dfrac{7}{21i} = ?$

371) $(5+3i)+(3-2i) = ?$

372) $\left(4i-\dfrac{3}{2}\right)+\left(\dfrac{5}{3}i+5.5\right) = ?$

373) $(8i-3)-(2i+8) = ?$

374) $(14-i)-\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{i}{5}\right) = ?$

375) $(8-2i)(3i) = ?$

376) $5(12+7i) = ?$

377) $(8-2i)(3-i) = ?$

378) $(i+2)(i-2) = ?$

379) $\dfrac{7+5i}{2} = ?$

380) $\dfrac{5+12i}{5i} = ?$

381) $\dfrac{8-i}{i+1} = ?$

382) $\dfrac{5i+2}{2i-1} = ?$

فصل سوم

معادلات الجبری

Algebric Equations

معادله الجبری به مساوات الجبری گفتـه مـی‌شـود کـه بـرای بعـضی از قیمت‌های معین و مشخص حروف (مجهول‌ها) صدق نماید.

مثلاً: مساوات $5x+2=3x+6$ یک معادله الجبری گفته می‌شود، زیرا فقط برای $x=2$ صدق می‌نماید، یعنی:

$$5x+2=3x+6$$

$$5(2)+2\overset{?}{=}3(2)+6$$

$$10+2\overset{?}{=}6+6$$

$$12=12$$

مجهول در معادلـه (Varible of Equation): مجهـول در معادلـه بـه حرف یا حروفی گفته می‌شود که دریافت قیمت آن مطلوب باشد، مثلاً:

در معادله $5x-7=4$ مجهول آن x

در معادله $7x+2y=-3$ مجهول آن x و y

در معادله $m^2-3m+5=0$ مجهول آن m می‌باشد.

جذر یا ریشه معادله (Root or Solution of Equation): جذر یا ریشه معادله به آن قیمت یا قیمت‌های از مجهول گفته می‌شود که معادله را صـدق نماید یا اطراف معادله را مساوی سازد.

مثال: $x=2$ جذر (ریشه) معادله $5x-8=3x-4$ می‌باشد، زیرا:

$$5(2)-8\overset{?}{=}3(2)-4$$

$$10-8=6-4\Rightarrow 2=2$$

همچنـــان $y_1=-2$ و $y_2=3$ جـــذور معادلـــه $y^2-y-6=0$ می‌باشد، زیرا:

$$y_1=-2\Rightarrow(-2)^2-(-2)-6\overset{?}{=}0$$

$$+4+2-6=0$$

$$+6-6=0$$

$$y_2=+3\Rightarrow(+3)^2-(+3)-6\overset{?}{=}0$$

$$+9-3-6=0$$

$$+9-9=0$$

درجه معادله (Degree of Equation): عبارت از بلندترین طاقـت‌نمـای مجهول معادله می‌باشد.

مثال:

معادله درجه اول $5x-3=7$

معادله درجه دوم $7m^2-6m+1=0$

معادله درجه سوم $2y^2-y^3+8y=-4$

معادله درجه دوم $25x^2+16y^2=400$

معادله درجه سوم $7x^3-3x^2y+5y^2-1=0$

معادله درجه n $a_1x^n+a_2x^{n-1}+a_3x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$

انواع معادله (Kinds of Equation): معادلات نظر به تعـداد مجهـول و درجه مجهول انواع مختلف دارند، یعنی:

۱- انواع معادلات از نظر تعداد مجهول‌ها: مانند معادلات ذیل:

معادله یک مجهوله	$5x-1=3$
معادله دو مجهوله	$7x-2y=4$
معادله سه مجهوله	$8x-y=2z-5$
معادله چهار مجهوله	$4a-2b+3c=3+\frac{7}{5}$
و غیره	....

۲- انواع معادلات از نظر درجه: مانند معادلات ذیل:

معادله درجه اول	$3x+2=4$
معادله درجه دوم	$y^2-8y+3=0$
معادله درجه سوم	$m^3-4m^2-2=9m$
معادله درجه چهارم	$2x^4-5x^2-3=0$
و غیره	....

بناءً برای تشخیص منظم معادلات الجبری می‌توان آنها را از حیث تعداد مجهول و درجه چنین بیان نمود.

معادله یک مجهوله درجه اول	$7x+4=3$
معادله دومجهوله درجه اول	$-4x+2y=5$
معادله سه مجهوله درجه اول	$5x-z=2y+12$
معادله یک مجهوله درجه دوم	$3x^2-x-5=0$
معادله دو مجهوله درجه دوم	$x^2+y^2=16$
معادله دو مجهوله درجه سوم	$a^3-5a^2b-2b^2-3ab=7$
معادله یک مجهوله درجه چهارم	$y^4-16=0$

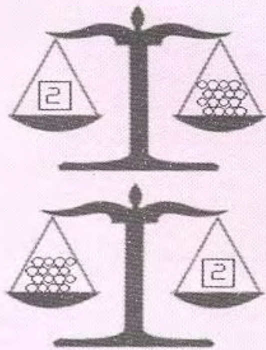
و بالاخره می‌توان معادلات m مجهوله درجه n را دریافت نمود.

خواص معادله (مساوات) الجبری
Property of Equality

معادله یا مساوات الجبری مانند یک ترازوی کاملاً حساس می‌باشد که کوچکترین تفاوت را به هیچ وجه نمی‌پذیرد، مثلاً هیچگاه $2=1.99999$ نمی‌باشد، بناءً خواص ذیل را دارا می‌باشد.

۱- نظر به خاصیت انعکاسی (Reflex property) برای همیش $x \equiv x$ است، مثلاً برای همیشه ۱=۱ و ۲=۲ است. هیچگاه آنچه دو است یک بوده نمی‌تواند $2 \neq 1$ و آنکه یک است دو بوده نمی‌تواند، یعنی: $2 \neq 1$، که این خود ثبوت ذات یگانه پروردگار عالمیان است. پس برای همیشه ۱=۱ است.

۲- نظر به خاصیت تناظری (Symmetric Property) در مساوات اگر $x=y$ است، پس حتماً $y=x$ است مثلاً ترازوی را در نظر بگیریم که در حالت تعادل قرار دارد اگر کفه ترازو را تبدیل نماییم تعادل برقرار خواهد بود.



۳- نظر به خاصیت انتقالی (Transitive Property) اگر:

$$\left.\begin{matrix} x=y \\ y=z \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=z$$

مثال:

عمرمحمود = عمر احمد $\Big\}$ عمر حمید = عمر احمد
عمر محمود = عمر حمید

۴- هرگاه به اطراف یک مساوات عین عدد (مقدار) را علاوه نماییم یا کم نماییم در مساوات کدام تغیر رونما نمی‌گردد: یعنی اگر $x = y$ باشد.

پس: $x+a = y+a$ است.

همچنان: $x-a = y-a$ است.

۵- هرگاه با اطراف یک مساوات عین عدد (مقدار) خلاف صفر ضرب و یا تقسیم گردد در مساوات تغییری به وجود نمی‌آید: یعنی اگر $x = y$ باشد، پس: $a \cdot x = a \cdot y$ است.

همچنان $\frac{x}{a} = \frac{y}{a}$ است.

درحالیکه $a \neq 0$ است.

معادلات یک مجهوله درجه اول (First Degree Equations)

هر معادله الجبری که به شکل عمومی $ax+b=0$ قرار گیرد طوریکه $a \neq 0$ و b اعداد ثابت و x مجهول از درجه اول باشد، معادله یـک مجهولـه درجه اول نامیده می‌شود که جـذر معادلـه فـوق $x = -\frac{b}{a}$ اسـت. مـی‌تـوان معادلات یک مجهوله درجه اول را در شکل پولینومیل یا کسری و یـا جـذری ملاحظه نمود.

قبل بر اینکه به حل معادلات یک مجهوله درجه اول اقـدام نمـاییم، لازم می‌دانیم تا تناسب و خواص آن را تکرار نماییم.

تناسب (Proportion)

مساوی بودن دو نسبت را تناسب می‌نامند، یعنی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$:

مثال: $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$

خواص تناسب

۱- خاصیت اساسی تناسب عبارت از حاصل‌ضـرب طـرفین مـساوی بـه حاصل‌ضرب وسطین است، یعنی: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$

۲- اگر جای طرفین یا وسطین تبدیل گردد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

۳- اگر اطراف تناسب معکوس گردد: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

۴- اگر مخرج با صورت جمع و تفریق گردد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

۵- اگر صورت به مخرج جمع و تفریق گردد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c}$$

۶- در صورتیکه $n \neq 0$ باشد:

اگر n به صورت‌ها ضرب گردد: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \cdot n}{b} = \frac{c \cdot n}{d}$

اگر n به مخرج‌ها ضرب گردد: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b \cdot n} = \frac{c}{d \cdot n}$

۷- اگر مخرج با صورت جمع در صورت و از صـورت مخـرج تفریـق و در مخرج قرار گیرد: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

۸- هرگاه نتیجه چندین نسبت باهم، مـساوی بـه n باشـد. پـس نـسبت،

مجموعه صورت‌ها و مخرج‌ها نیر مساوی به n است.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=n$$

$$\Rightarrow \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=n$$

حل معادلات یک مجهوله درجه اول

طوریکه قبلاً ذکر نمـودیم معـادلات یـک مجهولـه درجـه اول در شـکل پولینومیل، کسری و جذری ملاحظه می‌گردد که می‌توان هریـک از معـادلات مذکور را بـه کمـک خـواص مـساوات و خـواص تناسـب سـاده نمـود. یعنـی مجهول‌ها را به یکطرف و معلوم‌ها را به طـرف دیگـر مـساوات انتقـال داده و قیمت مجهول مربوط دریافت می‌نمایم.

مثال‌ها:

از معادلات یک مجهوله درجه اول ذیل قیمت مجهول مربوطه را دریافـت نمایید:

$\langle 1\rangle: 5x-3=4x+7$

$5x-4x=+7+3$

$x=+10$

پس $x=10$ جذر معادله گفته می‌شود زیرا:

$5x-3=4x+7$

$5(10)-3\overset{?}{=}4(10)+7$

$50-3\overset{?}{=}40+7$

$47=47$

$\langle 2\rangle: -8(2x-5)+10x=+4$

$-16x+40+10x=+4$

$-6x=+4-40$

$-6x=-36/:-6$

$x=\frac{-36}{-6}$

$x=+6$

$\langle 3\rangle: 2.5x+1.2=1.5x+0.8-x$

$2.5x+1.2=+0.5x+0.8 \ /\cdot 10$

$25x+12=+5x+8$

$25x-5x=+8-12$

$20x=-4 \ /:20$

$x=\frac{-4}{20}\Rightarrow x=-\frac{1}{5}\Rightarrow x=-0.2$

$\langle 4\rangle: (3y+5)(2y-3)=6y(y-3)+17y+1$

$6y^2-9y+10y-15=6y^2-18y+17y+1$

$6y^2+y-6y^2+y=+1+15$

$2y=16/:2 \Rightarrow y=8$

$\langle 5\rangle: \frac{2}{3x}+\frac{1}{x}=2\frac{1}{2}$

$\frac{2+3}{3x}=\frac{5}{2}\Rightarrow \frac{5}{3x}=\frac{5}{2}$

$15x=10/:15$

$x=\frac{10}{15}\Rightarrow x=\frac{2}{3}$

$\langle 6\rangle: \dfrac{5x+1}{x-2}+\dfrac{3x-1}{2-x}-\dfrac{2}{3}=0$

$\dfrac{5x+1}{x-2}+\dfrac{3x-1}{-(x-2)}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{5x+1-3x+1}{x-2}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{2x+2}{x-2}=\dfrac{2}{3}$

$6x+6=2x-4$

$6x-2x=-4-6$

$4x=-10\ /:4$

$x=-\dfrac{10}{4}\Rightarrow x=-\dfrac{5}{2}\Rightarrow x=-2.5$

$\langle 7\rangle: \sqrt{2a-3}-1=4$

$\sqrt{2a-3}=4+1$

$\sqrt{2a-3}=5$

$\left(\sqrt{2a-3}\right)^2=(5)^2$

$2a-3=25$

$2a=25+3$

$2a=28/:2$

$a=14$

$\langle 8\rangle: 5\cdot\sqrt[3]{y-2}-3=7$

$5\cdot\sqrt[3]{y-2}=7+3$

$5\cdot\sqrt[3]{y-2}=10\ :5$

$\sqrt[3]{y-2}=2$

$\left(\sqrt[3]{y-2}\right)^3=(2)^3$

$y-2=8$

$y=10$

$\langle 9\rangle: \sqrt[5]{\dfrac{2x-1}{x+1}}+3=4$

$\sqrt[5]{\dfrac{2x-1}{x+1}}=4-3$

$\sqrt[5]{\dfrac{2x-1}{x+1}}=1$

$\left(\sqrt[5]{\dfrac{2x-1}{x+1}}\right)^5=(1)^5$

$\dfrac{2x-1}{x+1}=1$

$2x-1=x+1$

$2x-x=1+1\Rightarrow x=2$

معادلات قیمت مطلقه یک مجهوله درجه اول

جهت حل این نوع معادلات با استفاده از تعریف قیمت مطلقـه مـی‌تـوان قیمت‌های را دریافت نمود که بر اساس آن معادله مذکور را صدق نماید.

مثال: از معادلات ذیل قیمت مجهول مربوطه را دریابید:

مثال‌ها:

معادلات ذیل را برای مجهول مورد نظر حل نمایید:

$\langle 1 \rangle: 5x - 2a = d$ برای (x)

$5x = d + 2a /:5$

$x = \dfrac{d + 2a}{5}$

$\langle 2 \rangle: 3my + 9m^2 = 4n^2 + 2ny$ برای (y)

$3my - 2ny = 4n^2 - 9m^2$

$(3m - 2n)y = 4n^2 - 9m^2 /:(3m - 2n)$ و $m \neq \dfrac{2}{3}n$

$y = \dfrac{-(9m^2 - 4n^2)}{3m - 2n}$

$y = \dfrac{-(3m - 2n)(3m + 2n)}{3m - 2n}$

$y = -(3m + 2n)$

$y = -3m - 2n$

$\langle 3 \rangle: 5p = \sqrt{t^2 - 4z^2} - 1$ برای (z)

$5p + 1 = \sqrt{t^2 - 4z^2}$

$(5p + 1)^2 = \left(\sqrt{t^2 - 4z^2}\right)^2$

$25p^2 + 10p + 1 = t^2 - 4z^2$

$4z^2 = t^2 - 25p^2 - 10p - 1/:4$

$z^2 = \dfrac{t^2 - 25p^2 - 10p - 1}{4}$

$\sqrt{z^2} = \sqrt{\dfrac{t^2 - 25p^2 - 10p - 1}{4}}$

$z = \dfrac{\sqrt{t^2 - 25p^2 - 10p - 1}}{2}$

1) $|2x + 5| = 3$

$+(2x + 5) = 3$

$2x = 3 - 5$

$2x = -2$

$x = -1$

$-(2x + 5) = 3$

$-2x - 5 = 3$

$-2x = 3 + 5$

$-2x = 8$

$x = -4$

2) $|3x - 18| = 0$

$+(3x - 18) = 0$

$3x = 18$

$x = 6$

$-(3x - 18) = 0$

$-3x + 18 = 0$

$-3x = -18$

$x = 6$

3) $|5x - 4| - 6 = 0$

$|5x - 4| = 6$ و

$+(5x - 4) = 6$

$5x = 6 + 4$

$5x = 10$

$x = 2$

$-5x - 4 = 6$

$-5x + 4 = 6$

$-5x = 6 - 4$

$-5x = 2$

$x = -\dfrac{2}{5}$

معادلات حروفی یک مجهوله درجه اول
Literal of First Degree Equations

معادلات حاوی حروف دیگر بـه معـادلاتی گفتـه مـی‌شـود کـه بـرعلاوه مجهول مربوطه به وسیله یک و یا چندین حروف معـین دیگـر ارائـه گردیـده باشد، که می‌توان با استفاده از خـواص مـساوات، معـادلات مـذکور را بـرای مجهول مورد نظر از جنس حروف دیگر حل نمود.

برای (R_2)

$$\langle 4\rangle : S=\pi(R_1+R_2)\cdot l'$$

$$S=\pi(R_1+R_2)\cdot l' / : \pi l' \text{ و } \pi l' \neq 0$$

$$\frac{S}{\pi\cdot l'}=R_1+R_2 \Rightarrow R_2=\frac{S}{\pi\cdot l'}-R_1$$

$$R_2=\frac{S-R_1\cdot\pi\cdot l'}{\pi\cdot l'}$$

برای (d)

$$\langle 5\rangle : S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] / \cdot\frac{2}{n} \text{ و } n\neq 0$$

$$\frac{2S}{n}=2a+(n-1)d$$

$$\frac{2S}{n}-2a=(n-1)d$$

$$(n-1)d=\frac{2S-2an}{n} \quad /:(n-1) \text{ و } n\neq 1$$

$$d=\frac{2S-2an}{n(n-1)} \Rightarrow d=\frac{2S-2an}{n^2-n}$$

معادلات دو مجهوله درجه اول
The Simultaneous First Degree Equations

شکل عمومی این نوع معادلات $ax+by=c$ بوده، طوریکه c,b,a اعداد ثابت و x و y مجهول‌ها از درجه اول می‌باشند. این نوع معـادلات را بـه نـام معادلات خطی نیز یاد می‌نمایند، زیرا گراف آنها یک خـط مـستقیم را ترسـیم می‌نماید.

مثلاً: $2x-5y=2$ یک معادله دو مجهوله درجه اول را نشان مـی‌دهـد طوریکه: $a=+2$, $b=-5$ و $c=3$ و x و y مجهـول‌هـا از درجـه اول می‌باشند.

قابل یادآوری است این که یک معادله به دو مجهول دارای بی‌نهایت حل می‌باشد. (زیرا یک خط مستقیم از بی‌نهایت نقاط تشکیل گردیده است)

مثال: معادله ذیل را در نظر می‌گیریم:

$$2x-y=6$$

$$x=2\ ,\ y=-2 \Rightarrow 2(2)-(-2)\overset{?}{=}6 \Rightarrow 4+2=6$$

$$x=1\ ,\ y=-4 \Rightarrow 2(1)-(-4)\overset{?}{=}6 \Rightarrow 2+4=6$$

$$x=0\ ,\ y=-6 \Rightarrow 2(0)-(-6)\overset{?}{=}6 \Rightarrow 0+6=6$$

$$x=4\ ,\ y=2 \Rightarrow 2(4)-(2)\overset{?}{=}6 \Rightarrow 8-2=6$$

$$x=10\ ,\ y=14 \Rightarrow 2(10)-(14)\overset{?}{=}6 \Rightarrow 20-14=6$$

$$x=-3\ ,\ y=-12 \Rightarrow 2(-3)-(-12)\overset{?}{=}6 \Rightarrow -6+12=6$$

$$x=3\ ,\ y=0 \Rightarrow 2(3)-0\overset{?}{=}6 \Rightarrow 6-0=6$$

⋮

طوریکه ملاحظه می‌گردد معادله فوق بـه بـی‌نهایـت قیمـت‌هـای x و y دارای حل می‌باشد. بناءً جهت دریافت حـل یگانـه (همزمـان) معادلـه مـذکور سیستم از معـادلات ضـروری مـی‌باشـد، یعنـی بـرای معـادلات دو مجهولـه موجودیت دو معادله، برای معادلات سه مجهوله موجودیت سـه معادلـه، .... لازمی می‌باشد.

سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول
System of Simuitaneous First Degree Equations

شــکل عمــومی سیــستم معــادلات دو مجهولــه درجــه اول

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \cdots (1) \\ a_2x+b_2y=c_2 \cdots (2) \end{cases}$$ بوده، طوریکه c_1, b_2, b_1, a_2, a_1 و c_2 اعداد ثابت، x و y مجهول‌ها از درجه اول می‌باشند. برای این که بدانیم سیستم معادلات فوق دارای حل می‌باشد یا خیر. مناقشه ذیل را در نظر می‌گیریم:

مناقشه

۱- اگر $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ باشد سیستم معادلات مذکور دارای حل مشخص می‌باشد (یعنی خطوط مستقیم آنها یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند).

۲- اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ باشد سیستم معادلات فوق دارای حل مشخص نمی‌باشد، که دو حالت ذیل وجود دارد:

- اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ باشد سیستم معادلات دارای بی‌نهایت حل می‌باشد (یعنی خطوط مستقیم آنها با یکدیگر منطبق می‌باشد).
- اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ باشد سیستم معادلات هیچ حل ندارد. (یعنی خطوط مستقیم آنها با یکدیگر موازی می‌باشند)

مثال‌ها:

حل سیستم معادلات دو مجهوله ذیل را مناقشه نمایید:

$$\langle 1 \rangle : \begin{cases} 12x-5y=10 \cdots (1) \\ 4x+y=2 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a_1}{a_2} = \frac{12}{4} = 3 \\ \frac{b_1}{b_2} = \frac{-5}{+1} = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

بناً سیستم معادلات فوق دارای حل مشخص (یگانه) می‌باشد.

$$\langle 2 \rangle : \begin{cases} -8x+6y=28 \cdots (1) \\ -4x+3y=10 \cdots (2) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a_1}{a_2} = \frac{-8}{-4} = 2 \\ \frac{b_1}{b_2} = \frac{6}{3} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

بناً سیستم معادلات فوق حل مشخص ندارد.

چون $\frac{c_1}{c_2} = \frac{28}{10} = 2.8$ پس در نتیجه $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ است.

بناءً سیستم معادلات فوق هیچ حل ندارد.

$$\langle 3 \rangle : \begin{cases} 3x+2y=7 \cdots (1) \\ 9x+6y=21 \cdots (2) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \\ \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

بناءً سیستم معادلات فوق حل مشخص ندارد.

چون $\frac{c_1}{c_2} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$ پس در نتیجه $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ است.

بناءً سیستم معادلات فوق دارای بی‌نهایت حل می‌باشد.

حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول
Solution of Simultaneaous First Degree Equation

سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول به طریقه‌های مختلف مانند مساوی ساختن ضرایب به وسیله جمع و تفریق (افنا)، مساوات، تعویض، گراف، دیترمینانت و متریکس قابل حل می‌باشد.

اول- حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول به طریقه مساوی ساختن ضرایب (Elimination by Addition and Subtraction)

در این طریقه ضرایب یکی از مجهول‌ها را در نظر گرفته، طوریکه ضریب از معادله اول به معادله دوم و از معادله دوم را به معادله اول ضـرب نمـوده تـا ضرایب آن مجهول باهم مساوی گردد و بعداً از عملیه جمع و یا تفریق (افنـا) یک مجهول از بین رفته و مجهول دومی دریافت می‌گردد و با وضع قیمت آن در یکی از معادلات سیستم مذکور می‌توان، مجهول اولی را نیز بـه سـاده‌گـی دریافت نمود.

مثال‌ها:

سیستم معادلات دو مجهوله ذیل را به طریقه مساوی ساختن ضرایب حل نمایید.

$$\langle 1\rangle:\begin{cases}2x+5y=19\cdots(1)\\3x+y=9\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l}3 & 2x+5y=19\cdots\cdots(1)\\2 & 3x+y=9\cdots\cdots(2)\end{array}$$

$$\begin{aligned}6x+15y&=57\\ \underline{+}6x\underline{+}2y&=\underline{+}18\\ 13y&=39\\ y&=\frac{39}{13}\\ y&=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x+y&=9\cdots(2)\\3x+3&=9\\3x&=9-3\\3x&=6/:3\\x&=\frac{6}{3}\\x&=2\end{aligned}$$

قابل یادآوریست این که، هیچگونه تشویش را به خود راه ندهیـد کـه ضـریب کدام مجهول x و یا y باهم مساوی گردد و قیمت مجهول دریافت شـده در کـدام معادله (1) و یا (2) وضع گردد، زیرا نتیجه یکسان می‌باشد.
همان مجهول را مثلاً می‌توان در مثال فوق ضرایب y را باهم مساوی سازیم.

مثال ۱:

$$\begin{cases}2x+5y=19\cdots(1)\\3x+y=9\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l}1\cdot & 2x+5y=19\cdots(1)\\5\cdot & 3x+y=9\cdots(2)\end{array}$$

$$\begin{aligned}2x+5y&=19\\ \underline{+}15x\underline{+}5y&=\underline{+}45\\ -13x&=-26/:-13\\ x&=\frac{-26}{-13}\\ x&=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x+5y&=19\cdots(1)\\2(2)+5y&=19\\4+5y&=19\\5y&=19-4\\5y&=15/:5\\y&=3\end{aligned}\qquad\begin{aligned}3x+y&=9\cdots(2)\\3(2)+y&=9\\6+y&=9\\y&=9-6\\y&=3\end{aligned}$$

پس در نتیجه $x=2$ و $y=3$ حل یگانه سیستم معادلات فوق می‌باشـد که به جز از همین قیمت‌های دریافت شده به کدام قیمت دیگر x و y صـدق نمی‌نماید، یعنی:

$$2x+5y=19\cdots(1)\Rightarrow 2(2)+5(3)\overset{?}{=}19\Rightarrow 4+15=19$$

$$3x+y=9\cdots\cdots(2)\Rightarrow 3(2)+3\overset{?}{=}9\Rightarrow 6+3=9$$

مثال ۲:

$$5(x+2y)-y=x+59\cdots(1)$$

$$\frac{3y+5x}{3}=\frac{4x+\frac{44}{3}}{2}\cdots\cdots(2)$$

حل: اولاً سیستم معادلات فوق را در شکل عمومی آن درآورده بعداً به حل آن اقدام می‌نماییم:

$$\langle 3\rangle:\begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{15}\cdots\cdots(1)\\ -\frac{3}{x}+\frac{7}{y}=-\frac{12}{5}\cdots(2)\end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l}7\cdot & \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{15}\\ 1\cdot & -\frac{3}{x}+\frac{7}{y}=-\frac{12}{5}\end{array}$$

$$\frac{14}{x}+\frac{7}{y}=\frac{49}{15}$$
$$\mp\frac{3}{x}\pm\frac{7}{y}=\mp\frac{12}{5}$$
$$\frac{14+3}{x}=\frac{49}{15}+\frac{12}{5}$$
$$\frac{17}{x}=\frac{49+36}{15}$$
$$\frac{17}{x}=\frac{85}{15}\Rightarrow\frac{17}{x}=\frac{17}{3}$$
$$17x=51\Rightarrow x=\frac{51}{17}\Rightarrow x=3$$

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{15}\cdots(1)$$
$$\frac{2}{3}+\frac{1}{y}=\frac{7}{15}$$
$$\frac{1}{y}=\frac{7}{15}-\frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{y}=\frac{7-10}{15}$$
$$\frac{1}{y}=\frac{-3}{15}$$
$$\frac{1}{y}=-\frac{1}{5}\Rightarrow y=-5$$

$$5(x+2y)-y=x+59\cdots(1)$$
$$5x+10y-y=x+59$$
$$5x+9y-x=59$$
$$4x+9y=59\cdots(1)$$
$$\frac{3y+5x}{3}=\frac{4x+\frac{44}{3}}{2}\cdots(2)$$
$$6y+10x=12x+44$$
$$6y+10x-12x=44$$
$$-2x+6y=44/:2$$
$$-x+3y=22\cdots 2$$

$$\begin{array}{r|l}1\cdot & 4x+9y=59\cdots(1)\\ 4\cdot & -x+3y=22\cdots(2)\end{array}$$
$$4x+9y=59$$
$$-4x+12y=88$$
$$21y=147$$
$$y=\frac{147}{21}\Rightarrow y=7$$

$$-x+3y=22\cdots(2)$$
$$-x+3(7)=22$$
$$-x+21=22$$
$$-x=22-21$$
$$-x=1/\cdot-1$$
$$x=-1$$

بخاطر داشته باشید که بعضاً می‌توان با ضرب نمودن یک عدد به یک معادله ضرایب یکی از مجهول‌ها در سیستم معادلات مساوی می‌گردد و به ساده‌گی به حل آن پرداخته می‌توانیم، مثلاً در حل مثال (2) می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{array}{r|l}1\cdot & 4x+9y=59\cdots(1)\\ 3\cdot & -x+3y=22\cdots(2)\end{array}$$
$$4x+9y=59$$
$$\mp 3x\pm 9y=\pm 66$$
$$+7x\quad=-7\Rightarrow x=-1$$

$$-x+3y=22\cdots(2)$$
$$-(-1)+3y=22$$
$$+1+3y=22$$
$$3y=21\Rightarrow y=\frac{21}{3}\Rightarrow y=7$$

دوم: حل سیستم معادلات دومجهوله درجه اول به طریقه تعویض

(Solution by Substitution)

در این طریقه قیمت یکی از مجهول‌ها را از یک معادله از جنس دیگرش دریافته و در معادله دومی تعویض می‌نماییم، در این صورت یک معادلـه یـک مجهوله درجه اول به دست می‌آید که با حل آن می‌توان مجهول دومی را نیز دریافت نمود.

مثال‌ها:

سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول ذیل را بـه طریقـه تعـویض حـل نمایید:

$$\langle 1\rangle: \begin{cases} 2x+5y=19\cdots\ (1) \\ 3x+y=9\ \cdots\cdots\ (2) \end{cases}$$

$3x+y=9 \ \cdots\ (2)$

$y=9-3x$

$2x+5y=19 \ \cdots(1)$

$2x+5(9-3x)=19$

$2x+45-15x=19$

$-13x=19-45$

$-13x=-26/:-13$

$x=\dfrac{-26}{-13}\Rightarrow x=+2$

$\because\ y=9-3x$

$y=9-3(+2)$

$y=9-6\Rightarrow y=3$

بازهم مانند حل به طریقه مساوی ساختن ضرایب تشویش نکنیـد. قیمـت هر مجهول را که خواسته باشید از هـر معادلـه بخواهیـد دریابیـد و در معادلـه دیگرش وضع نمایید، نتیجه کاملاً یکسان خواهد بود، مثلاً:

$2x+5y=19\cdots(1)$

$2x=19-5y\ /:2$

$x=\dfrac{19-5y}{2}$

$3x+y=9\cdots(2)$

$3\left(\dfrac{19-5y}{2}\right)+y=9$

$\dfrac{57-15y}{2}+y=9$

$\dfrac{57-15y+2y}{2}=9$

$\dfrac{-13y+57}{2}=9$

$-13y+57=18$

$-13y=18-57$

$-13y=-39\Rightarrow y=\dfrac{-39}{-13}\Rightarrow y=+3$

$\because x=\dfrac{19-5y}{2}$

$x=\dfrac{19-5(3)}{2}$

$x=\dfrac{19-15}{2}\Rightarrow x=\dfrac{4}{2}\Rightarrow x=2$

$$\langle 2\rangle: \begin{cases} 2.5x+2y=-7.2\cdots\ (1) \\ -5x+3.51y=2\cdots\ (2) \end{cases}$$

$2.5x+2y=-7.2\cdots(1)/.10$

$25x+20y=72$

$25x=72-20y$

$x=\dfrac{72-20y}{25}$

$-5x+3.51y=3\cdots(2)\ /\cdot 100$

$-500x+351y=300$

$-500\left(\dfrac{72-20y}{25}\right)+351y=300$

$-20(72-20y)+351y=300$

$-1440+400y+351y=300$

$751y=300+1440$

$751y=1740\Rightarrow y=\dfrac{1740}{751}$

سوم: حل‌سیستم معادلات دومجهوله درجه اول به طریقه مساوات

(Solution by Equality)

در این طریقه یکی از مجهول‌ها را در هردو معادله در نظر گرفته از جـنس مجهول دیگر آن ارائه می‌نماییم، بعداً با استفاده از مساوی بـودن یـک طـرف مساوات، طرف دیگـر آن را مـساوی قـرار داده یکـی از مجهـول‌هـا دریافـت می‌گردد و بعداً با وضع در یکی از معادلات مجهول دومی نیز دریافـت خواهـد گردید.

مثال‌ها:

سیستم معادلات دو مجهوله ذیل را به طریقه مساوات حل نمایید:

$$\langle 1\rangle:\begin{cases}2x+5y=19\cdots\ (1)\\3x+y=9\cdots\cdots\ (2)\end{cases}$$

$$2x+5y=19\cdots(1)$$
$$2x=19-5y\ /:2$$
$$x=\frac{19-5y}{2}\cdots(A)$$
$$3x+y=9\cdots\cdots(2)$$
$$x=\frac{9-y}{3}\cdots\cdots(B)$$

از مقایسه دو رابطه اخیر A و B چون یکطرف مساوات باهم مساوی اند پس طرف دیگر آن نیز باهم مساوی است، پس می‌توان نوشت:

$$\because x=\frac{72-20y}{25}$$
$$x=\frac{72-20(\frac{1740}{751})}{25}$$
$$x=\frac{72-\frac{34800}{751}}{25}$$
$$x=\frac{\frac{54072-34800}{751}}{25}$$
$$x=\frac{\frac{19272}{751}}{25}\Rightarrow x=\frac{19272}{751}\cdot\frac{1}{25}\Rightarrow x=\frac{19272}{18775}$$

$$\langle 3\rangle:\begin{cases}2x+7y=6a-7b\cdots\ (1)\\-3x+y=-9a-b\cdots(2)\end{cases}$$

$$-3x+y=-9a-b\cdots(2)$$
$$y=-9a-b+3x$$
$$2x+7y=6a-7b\cdots()1$$
$$2x+7(-9a-b+3x)=6a-7b$$
$$2x-63a-7b+21x=6a-7b$$
$$23x=6a-7b+63a+7b$$
$$23x=69a\Rightarrow x=\frac{69a}{23}\Rightarrow x=3a$$

$$\because y=-9a-b+3x$$
$$y=-9a-b+3(3a)$$
$$y=-9a-b+9a$$
$$y=-b$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{19-5y}{2}\\ x&=\frac{9-y}{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{19-5y}{2}=\frac{9-y}{3}$$

$$57-15y=18-2y$$
$$-15y+2y=18-57$$
$$-13y=-39$$
$$y=\frac{-39}{-13}\Rightarrow y=+3$$

$$\because x=\frac{9-y}{3}\cdots(B)$$
$$x=\frac{9-3}{3}\Rightarrow x=\frac{6}{3}\Rightarrow x=2$$

$$\langle 2\rangle:\begin{cases}\dfrac{x}{3}-\dfrac{2y}{5}=6\cdots\cdots(1)\\ \dfrac{5x}{12}+\dfrac{3y}{10}=\dfrac{7}{2}\cdots(2)\end{cases}$$

$$\frac{x}{3}-\frac{2y}{5}=6\cdots\cdots(1)$$
$$\frac{x}{3}-\frac{2y}{5}=6/.15$$
$$5x-6y=90$$
$$-6y=90-5x/:-6$$
$$y=\frac{5x-90}{6}\cdots(*)$$

$$\frac{5x}{12}+\frac{3y}{10}=\frac{7}{2}\cdots(2)$$
$$\frac{5x}{12}+\frac{3y}{10}=\frac{7}{2}\Big/\cdot 60$$
$$25x+18y=210$$
$$18y=210-25x/:18$$
$$y=\frac{210-25x}{18}\cdots(**)$$

از مقایسه دو رابطه اخیر نتیجه می‌شود که:

$$\frac{5x-90}{6}=\frac{210-25x}{18}\Big/\cdot 18$$
$$15x-270=210-25x$$
$$15x+25x=210+270$$
$$40x=480$$
$$x=\frac{480}{40}\Rightarrow x=12$$
$$\because y=\frac{5x-90}{6}\cdots(*)$$
$$y=\frac{5(12)-90}{6}$$
$$y=\frac{60-90}{6}\Rightarrow y=-\frac{30}{6}\Rightarrow y=-5$$

$$\langle 3\rangle:\begin{cases}-0.3x+1.4y=4\cdots\cdots(1)\\ \dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{2}=-\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$$-0.3x+1.4y=4\cdots\cdots(1)$$
$$-0.3x+1.4y=4/\cdot 10$$
$$-3x+14y=40$$
$$-3x=-14y+40/:-3$$
$$x=\frac{14y-40}{3}\cdots(*)$$

$$\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=-\frac{1}{2}\cdots\cdots(2)$$
$$\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=-\frac{1}{2}\Big/\cdot 10$$
$$2x-5y=-5$$
$$2x=5y-5/:2$$
$$x=\frac{5y-5}{2}\cdots(**)$$

از مقایسه روابط اخیر می‌توان نوشت:

$$\frac{14y-40}{3}=\frac{5y-5}{2}$$

$$28y-80=15y-15$$

$$28y-15y=80-15$$

$$13y=65\Rightarrow y=\frac{65}{13}\Rightarrow y=5$$

$$\because x=\frac{5y-5}{2}\cdots(**)$$

$$x=\frac{5(5)-5}{2}$$

$$x=\frac{25-5}{2}\Rightarrow x=\frac{20}{2}\Rightarrow x=10$$

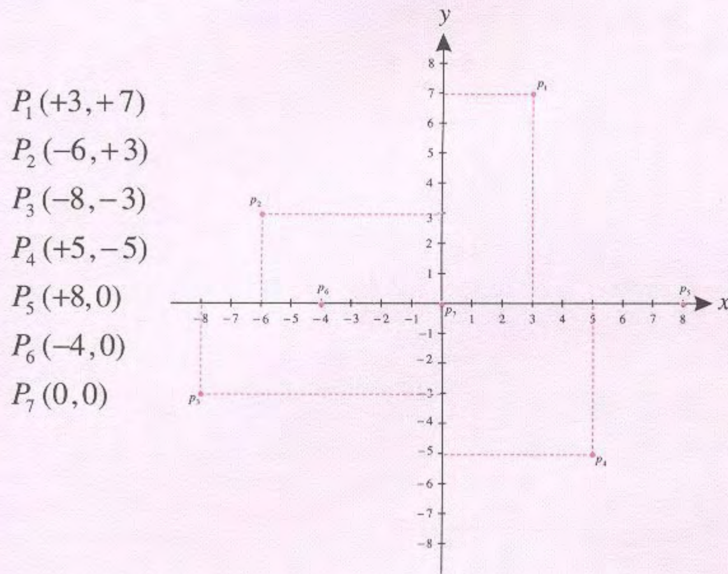
کمیات وضعیه قایم در یک مستوی

دو محور باهم عمود که بروی هرکدام شان جهات مثبت (بـه طـرف راسـت و بالا) و منفی (به طرف چپ و پایین) بـه فاصلـه‌هـای مـساوی در مـستوی تعیـین گردیده و سطح مستوی را به چهار ناحیه تقسیم می‌نماید، به نام محـورات کمیـات وضیعهٔ قایم یاد می‌شود. محور افقی آن را به نام محور x (محور فاصله Absis) و محور عمودی آن را به نـام محـور y (محـور ترتیـب Ordenat) و نقطـه تقـاطع محورات مذکور مبده کمیات وضیعه (0) می‌نامند.

تعیین یک نقطه روی سیستم کمیات وضیعه قایم

جهت تعیین موقعیت یک نقطه روی این سیستم با استفاده از جـوره‌هـای مرتب (Pairs Ordered) یعنی P(x,y) می‌توان مختـصه هـر نقطـه را روی محورات نشانی و از آن خطوط موازی به محور x و y رسم نمـوده کـه نقطـه تقاطع آن‌ها عبارت از نقطه مورد نظر می‌باشد.

مثال: نقاط ذیل را روی سیستم کمیات وضیعه قایم تعیین نمایید:



$P_1(+3,+7)$
$P_2(-6,+3)$
$P_3(-8,-3)$
$P_4(+5,-5)$
$P_5(+8,0)$
$P_6(-4,0)$
$P_7(0,0)$

ترسیم خط مستقیم روی سیستم کمیات وضیعهٔ قایم

جهت ترسیم نمودن خط مستقیم $ax+by=c$ جدول از قیمت‌هـای x و y را طوری در نظر گرفته که برای x قیمت وضع نمـوده و بـرای y قیمـت دریافت می‌گردد، بعداً با در نظرداشت هریک از جـوره‌هـای مرتـب P(x,y) و تعیین آن روی سیستم کمیات وضیعه و اتصال آن نقاط خط مستقیم داده شده ترسیم می‌گردد.

مثال‌ها:

خطوط مستقیم ذیل را روی سیستم‌کمیات وضیعه رسم نمایید.

$\langle 1\rangle : 2x-3y=6$

$$x=0\Rightarrow 2(0)-3y=6\Rightarrow -3y=6\Rightarrow y=-2$$

$$x=3\Rightarrow 2(3)-3y=6\Rightarrow 6-3y=6\Rightarrow -3y=6-6$$

$$-3y=0\Rightarrow y=0$$

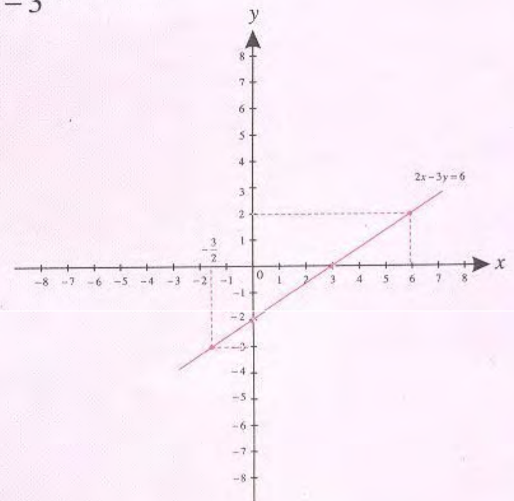
$x=-\frac{3}{2}\Rightarrow 2\left(-\frac{3}{2}\right)-3y=6\Rightarrow -3y=6+3\Rightarrow -3y=9$

$y=\frac{9}{-3}\Rightarrow y=-3$

$x=6\Rightarrow 2(6)-3y=6\Rightarrow 12-3y=6\Rightarrow -3y=6-12$

$-3y=-6\Rightarrow\ y=\frac{-6}{-3}\Rightarrow y=+2$

x	y
0	−2
3	0
$-\frac{3}{2}$	−3
6	+2



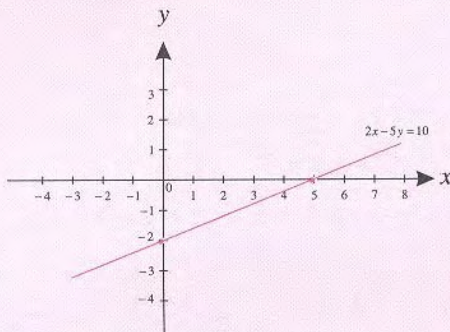
یادداشت: جهت تعین نقاط و ترسیم خط مستقیم کـافی اسـت بـا وضـع نمودن x=0 قیمت y و با وضع نمودن y=0 قیمت x را دریافـت نمـود یعنـی نقاط تقاطع با محورات را دریافته و با اتصال آن می‌توان خـط مـستقیم را بـه ساده گی ترسیم نمود.

$\langle 2\rangle: 2x-5y=10$

$x=0\Rightarrow 2(0)-5y=10\Rightarrow -5y=10\Rightarrow y=-2$

$y=0\Rightarrow 2x-5(0)=10\Rightarrow 2x=10\Rightarrow x=5$

x	y
0	−2
5	0

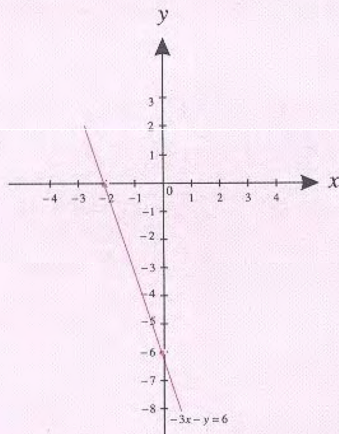


$\langle 3\rangle: -3x-y=+6$

$x=0\Rightarrow -3(0)-y=+6\Rightarrow -y=+6\Rightarrow y=-6$

$y=0\Rightarrow -3x-0=+6\Rightarrow -3x=+6\Rightarrow x=-2$

x	y
0	−6
−2	0



چهارم: حل سیستم معادلات دومجهوله درجه اول به طریقه گراف (Solution by Graphs)

جهت حل سیستم معادلات دومجهولهٔ درجه اول به طریقه گراف، هر یک از خطوط مستقیم سیستم معادلات را روی سیستم کمیات وضیعه قایم ترسیم نموده و نقطه تقاطع ایـن خطـوط مـستقیم عبـارت از حـل همزمـان (یگانـه) سیستم معادلات فوق‌الذکر می‌باشد.

مثال‌ها: سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول ذیل را بـه طریقـه گـراف

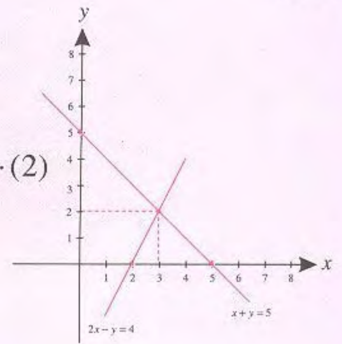
دریابید:

$$\langle 1\rangle : \begin{cases} 2x-y=4\cdots\cdots(1) \\ x+y=5\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$2x-y=4\cdots\cdots(1) \quad x+y=5\cdots(2)$

x	y
0	−4
2	0

x	y
0	5
5	0



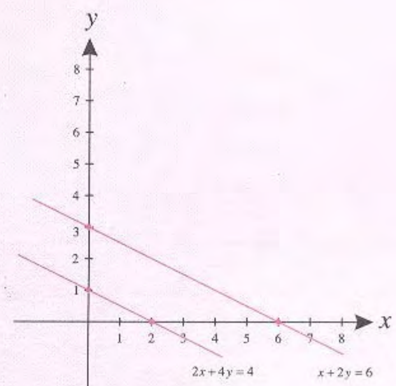
پس در نتیجه x=3 و y=2 حل همزمان سیستم معادلات فوق می‌باشد.

$$\langle 2\rangle : \begin{cases} x+2y=6\cdots\cdots\ (1) \\ 2x+4y=4\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$x+2y=6\cdots\cdots(1) \qquad 2x+4y=4\cdots(2)$

x	y
0	3
6	0

x	y
0	1
2	0



طوریکه ملاحظه می‌گردد خطوط موازی اند و هیچ نقطه مشترک ندارنـد. بناءً سیستم معادلات مذکور هیچ حل ندارد. از جانب دیگر:

$$\begin{cases} x+2y=6\cdots\cdots\ (1) \\ 2x+4y=4\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$$

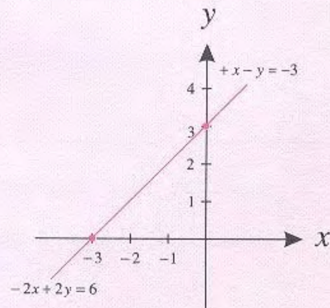
بناءً سیستم معادلات فوق هیچ حل ندارد.

$$\langle 3\rangle : \begin{cases} -2x+2y=6\cdots(1) \\ +x-y=-3\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$-2x+2y=6\cdots(1) \quad +x-y=-3\cdots(2)$

x	y
0	3
−3	0

x	y
0	3
−3	0



طوریکه ملاحظه می‌گردد خطوط مذکور باهم منطبق اند و بی‌نهایت نقاط مشترک دارند، بناءً سیستم معادلات فوق دارای بی نهایت حل می‌باشد.

از جانب دیگر:

$$\begin{cases} -2x+2y=6\cdots\cdots(1) \\ +x-y=-3\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{-2}{+1}=-2\\[2mm]\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{+2}{-1}=-2\\[2mm]\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{6}{-3}=-2\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

بناءً سیستم معادلات فوق بی نهایت حل دارد.

سیستم معادلات سه مجهوله درجه اول
(System of Three Similtaneous First Degree Equations)

شکل عمومی سیستم معادلات سه مجهوله درجه اول:

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\cdots\ (1)\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\cdots(2)\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\cdots\ (3)\end{cases}$$

بـوده طوریکـه a_1، a_2، a_3، b_1، b_2، b_3، c_1، c_2، c_3، d_1، d_2، d_3 اعـداد ثابت x ، y و z مجهول‌ها از درجه اول می‌باشد. می‌توان سیستم معادلات سه مجهولـۀ درجـه اول را ماننـد سیـستم معـادلات دو مجهولـه درجـه اول بـه طریقه‌های مختلف حل نمود، که ساده‌ترین نوع حـل آن بـه طریقـه مـساوی ساختن ضرایب می‌باشد، که ذیلاً تذکار می‌دهیم.

حل سیستم معادلات سه مجهوله درجه اول به طریقه مساوی ساختن ضرایب (Solution of Addition or Subtraction)

جهت حل سیستم معادلات فوق بدین طریقه قیمت یکی از مجهول‌ها را در مرتبه اول بین معادله (1) و (2) و در مرتبه دوم بین معادله (2) و (3) و یا معادله (1) و (3) در اثر ضرب نمودن ضریب همـان مجهـول از معادله اول به معادله دوم و از معادله دوم به معادله اول و بعـد از جمـع و تفریـق نمودن (افنا) می‌توان سیستم معادلات سه مجهولـه را بـه سیـستم معـادلات دو مجهوله تبدیل نمود و با حل آن که قبلاً مطالعـه نمـودیم پرداخـت و در نتیجـه قیمت مجهول‌های x ، y و z را دریافت نمود.

مثال‌ها:

سیستم معادلات سه مجهوله ذیل را حل نمایید.

$$\langle 1\rangle:\begin{cases}2x+3y-z=-12\cdots(1)\\ 3x-y+2z=13\cdots\cdots(2)\\ x+2y+5z=-3\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l}2\cdot & 2x+3y-z=-12\ \cdots(1)\\ 1\cdot & 3x-y+2z=13\cdots(2)\end{array}$$
$$\begin{array}{l}4x+6y-2z=-24\\ 3x-y+2z=13\\ \hline 7x+5y=-11\ \cdots(I)\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}5\cdot & 3x-y+2z=13\cdots(2)\\ 2\cdot & x+2y+5z=-3\cdots(3)\end{array}$$
$$\begin{array}{l}15x-5y+10z=65\\ \pm2x\pm4y\pm10z=\mp6\\ \hline 13x-9y=71\cdots(II)\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}9\cdot & 7x+5y=-11\ \cdots(I)\\ 5\cdot & 13x-9y=71\ \cdots(II)\end{array}$$
$$\begin{array}{l}63x+45y=-99\\ 65x-45y=355\\ \hline 128x=256\end{array}$$

$$x=\frac{256}{128}\Rightarrow x=2$$

$$7x+5y=-11\cdots(I)$$
$$7(2)+5y=-11$$
$$14+5y=-11$$

$$5y=-11-14 \Rightarrow 5y=-25 \Rightarrow y=\frac{-25}{5} \Rightarrow y=-5$$

$$2x+3y-z=-12 \cdots (1)$$

$$2(2)+3(-5)-z=-12$$

$$4-15-z=-12$$

$$-11-z=-12 \Rightarrow -z=-12+11 \Rightarrow -z=-1 \Rightarrow z=1$$

$$\langle 2\rangle : \begin{cases} a+5b=-5 & \cdots (1) \\ 10b-4c=2 & \cdots (2) \\ -a+6c=10 & \cdots (3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} 2\cdot & a+5b = -5 \cdots (1) \\ & 10b-4c = 2 \cdots (2) \\ \hline & 2a+10b = -10 \\ & \pm 10b \mp 4c = \pm 2 \\ \hline & 2a + 4c = -12 \;/:2 \\ & a + 2c = -6 \cdots (I) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -a+6c = 10 \cdots (3) \\ a+2c = -6 \cdots (I) \\ \hline 8c = 4 \end{array}$$

$$c=\frac{4}{8}$$

$$c=\frac{1}{2}$$

$$a+2c=-6 \cdots (I)$$

$$a+2\left(\frac{1}{2}\right)=-6$$

$$a+1=-6 \Rightarrow a=-6-1 \Rightarrow a=-7$$

$$a+5b=-5 \cdots\cdots (1)$$

$$-7+5b=-5$$

$$5b-5+7$$

$$5b=2 \Rightarrow b=\frac{2}{5}$$

$$\langle 3\rangle : \begin{cases} \frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{6}{z}=-9 \cdots (1) \\ \frac{2}{x}-\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=-1 \cdots (2) \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=-5 \cdots (3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} 1\cdot & \frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{6}{z}=-9 \cdot (1) \\ 3\cdot & \frac{2}{x}-\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=-1 \cdot\cdot (2) \\ \hline & \frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{6}{z}=-9 \\ & \frac{6}{x}-\frac{3}{y}+\frac{6}{z}=-3 \\ \hline & \frac{4+6}{x}+\frac{6+6}{z}=-12 \\ & \frac{10}{x}+\frac{12}{z}=12 \cdots (I) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 1\cdot & \frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{6}{z}=-9 \cdot\cdot (1) \\ 3\cdot & \frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=-5 \cdot\cdot (3) \\ \hline & \frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{6}{z}=-9 \\ & \pm\frac{6}{x}\pm\frac{3}{y}\pm\frac{6}{z}=\mp 15 \\ \hline & \frac{4-6}{x} = 6 \\ & \frac{-2}{x}=6 \Rightarrow 6x=-2 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\frac{10}{x}+\frac{12}{z}=-12 \cdots (I)$$

$$\frac{10}{-\frac{1}{3}}+\frac{12}{z}=-12$$

$$-30+\frac{12}{z}=-12$$

$$\frac{12}{z}=-12+30 \Rightarrow \frac{12}{z}=18 \Rightarrow 18z=12 \Rightarrow z=\frac{12}{18} \Rightarrow z=\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=-1\cdots(3)$$

$$\frac{2}{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{y}+\frac{2}{\frac{2}{3}}=-1$$

$$-6+\frac{1}{y}+3=-1$$

$$-3+\frac{1}{y}=-1\Rightarrow\frac{1}{y}=-1+3\Rightarrow\frac{1}{y}=2\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

متریکس‌ها (Matrixes)

ردیف از اشیا، اعداد یا اعداد با حروف که بـه شـکل سـطری و سـتونی در یک جدول مستطیلی ترتیب گردیده باشد متریکس (Matrix) نامیده می‌شود. که نظریه متریکس‌ها اولاً توسـط Arther Kelly در سـال 1858 بـه وجـود آمده است.

متریکس‌ها را عموماً به حروف A، B، C، D.... نشان می‌دهند و هر عنصر جدول مستطیلی شکل را عنصر متریکس نامیده و به حروف ماننـد a، b، c.... نشان می‌دهند. مانند متریکس‌های ذیل:

$$A=(5)\ ,\ B=(n,t)\ ,\ C=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\ \ldots\ldots$$

ردیف عناصری که در یک متریکس به شـکل افقـی ترتیـب یافتـه باشـد سطرهای متریکس و ردیف عناصری که به شکل عمودی ترتیب یافتـه باشـد ستون‌های متریکس یاد می‌گردد.

ترتیب متریکس (Order of Matrix)

هرگاه تعداد سطرهای یک متریکس m و تعـداد سـتون‌هـای آن n باشـد متریکس $(m\times n)$ نامیده می‌شود که در اینجا (x) علامه ضرب نبوده بلکـه متریکس m در n خوانده می‌شود. مثلاً متریکس:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ 7 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

دارای دو سطر و سه ستون می‌باشد و به شکل (2×3) ارائه می‌گردد.

هرگاه یک عنصر مانند a در سطر (i)ام و ستون (j)ام یک متریکس جابجـا گردیده باشد. به شکل (a_{ij}) نمایش داده مـی‌شـود طوریکـه $i=1,2,3....$ و $j=1,2,3,4,.....$ شامل اعداد طبیعی اند، مثلاً متـریکس A بـه طـور عمـوم چنین نمایش داده می‌شود. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ 7 & 1 & 4\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$$

انواع متریکس‌ها (Types of Matrix)

۱- متریکس سطری (Row Matrix): متریکس که تنها و تنهـا دارای یک سطر باشد، متریکس سطری نامیده می‌شود، مانند متریکس‌هـای ذیل:

$$A=(\frac{2}{5})_{1\times1}\quad B=(3\quad 7)_{1\times2}\quad C=(2\quad 5\quad 8\quad -1\quad 0)_{1\times5}$$

۲- متریکس ستونی (Column Matrix): متـریکس کـه تنهـا و تنهـا دارای یک سـتون باشـد، متـریکس سـتونی نامیـده مـی‌شـود، ماننـد متریکس‌های ذیل:

$$A=(5)_{1\times1}\qquad B=\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}_{2\times1}\qquad C=\begin{pmatrix}4\\3\\-2\\5\end{pmatrix}_{4\times1}$$

۳- متریکس صفری (Nall Matrix): متـریکس کـه تمـام عناصـر آن صفرها باشد، متریکس صفری نامیده می‌شود. که متریکس صـفری را به نام متریکس عینیت جمعی نیز یاد می‌کنند، مانند:

$$A=(0)_{1\times1} \qquad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}_{2\times3}$$

٤- متـریکس مربعـی (Square Matrix): هرگـاه در یـک متـریکس $m\times n$ تعداد سطرها و ستون‌ها باهم مساوی باشد یعنـی $(m=n)$ متریکس مذکور مربعی نامیده می‌شود، مانند:

$$A=(2)_{1\times1} \qquad B=\begin{pmatrix}2&5\\-1&4\end{pmatrix}_{2\times2} \qquad C=\begin{pmatrix}3&5&-1\\1&2&3\\0&3&-2\end{pmatrix}_{3\times3}$$

هـــر متریکس مربعی دارای دو قطر مـی‌باشـد. یکـی قطـر اصلـــی Mean diagonal و دومـی قطـر فرعـی Minor diagonal یـاد می‌گردد، مثلاً در متریکس ذیل:

$$A=\begin{pmatrix}2&2&4\\5&3&-1\\-3&0&7\end{pmatrix}$$

عناصر (2، 3 و 7) قطر اصلی و عناصر (3-، 3 و 4) قطر فرعی نامیـده می‌شود.

٥- متــریکس مــستطیلی (Rectangular Matrix): متـریکس کـه سطرها و ستون‌های آن باهم مـساوی نباشـند $(m\neq n)$ متـریکس مستطیلی نامیده می‌شود، مانند:

$$A=(2\quad 5)_{1\times2} \qquad B=\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}_{3\times1} \qquad C=\begin{pmatrix}2&5\\3&8\\1&-5\end{pmatrix}_{3\times2}$$

٦- متریکس قطری (Diagonal Matrix): متـریکس کـه بـه جـز از عناصر قطر اصلی آن دیگر عناصر آن صفرها باشد، متـریکس قطـری نامیده می‌شود، مانند:

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&5&0\\0&0&-7\end{pmatrix}$$

۷- متریکس اسکالر (Scalar Matrix): متریکس قطـری کـه عناصـر قطر اصلی آن باهم مساوی باشند، متریکس اسکالر نامیـده مـی‌شـود، مانند:

$$A=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}k&0&0&\cdots&0\\0&k&0&\cdots&0\\0&0&k&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\\0&0&0&\cdots&k\end{pmatrix}$$

۸- متریکس واحد (Unite Matrix): متـریکس قطـری یـا متـریکس اسکالر، که عناصر قطر اصلی آن عدد یک باشد، متریکس واحد نامیده می‌شود و به I نمایش داده می‌شود.

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

۹- متریکس مثلثی (Triangular Matrix): هرگاه تمام عناصر فوقانی یا تحتانی قطر اصلی یک متریکس مربعی صفر باشد. متریکس مثلثی نامیده می‌شود، مانند:

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\3&1&0\\1&2&5\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&3&4\\0&0&2\end{pmatrix}$$

یادداشت: هرگاه عناصر یک متریکس متناظراً، متضاد عنـصر متـریکس دیگر باشد. به نام متریکس‌های متقابل (متضاد) یا معکـوس جمعـی یکـدیگر (Additive inverse) یاد می‌شوند، مانند متریکس‌های ذیل:

$$A=\begin{pmatrix}+5&-1\\-3&+2\end{pmatrix}_{2\times2} \Rightarrow -A=\begin{pmatrix}-5&+1\\+3&-2\end{pmatrix}_{2\times2}$$

$$B=\begin{pmatrix}+3&-5\\+1&+7\\-2&0\end{pmatrix}_{3\times2} \Rightarrow -B=\begin{pmatrix}-3&+5\\-1&-7\\+2&0\end{pmatrix}$$

عملیات بالای متریکس‌ها (Operation on Matrices)

اول: عملیــه جمــع متــریکس‌هــا (Addition Of Matrices):

متریکس‌های که دارای ترتیب‌های مساوی باشند، باهم جمع گردیـده یعنـی هرگاه $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{m\times n}$ باشد پس:

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}$$
$$\Rightarrow (a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(C_{ij})_{m\times n}$$

مثال‌ها:

متریکس‌های ذیل را باهم جمع نمایید:

1) $A=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}_{2\times1}$, $B=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}_{2\times1} \Rightarrow C=A+B$

$$=\begin{pmatrix}2+4\\5-1\end{pmatrix}_{2\times1} \Rightarrow C=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}_{2\times1}$$

2) $A=\begin{pmatrix}5&-1\\7&+3\end{pmatrix}_{2\times2}$ $\quad B=\begin{pmatrix}-4&3\\-2&-1\end{pmatrix}_{2\times2}$

$$\Rightarrow C=A+B=\begin{pmatrix}5&-1\\7&+3\end{pmatrix}_{2\times2}+\begin{pmatrix}-4&3\\-2&-1\end{pmatrix}_{2\times2}$$

$$=\begin{pmatrix}5-4&-1+3\\7-2&+3-1\end{pmatrix}_{2\times2} \Rightarrow C=\begin{pmatrix}+1&+2\\+5&+2\end{pmatrix}_{2\times2}$$

3) $A=\begin{pmatrix}2&-3&5\\5&-1&0\end{pmatrix}_{2\times3}$ و $B=\begin{pmatrix}+4&-1&0\\-7&+3&-10\end{pmatrix}_{2\times3}$

$$C=A+B=\begin{pmatrix}2+4&-3-1&5+0\\5-7&-1+3&0-10\end{pmatrix}_{2\times3}=\begin{pmatrix}6&-4&5\\-2&2&-10\end{pmatrix}_{2\times3}$$

4) $A=\begin{pmatrix}2&3\\5&-2\\-1&-5\end{pmatrix}_{3\times2}$, $B=\begin{pmatrix}3&2\\-1&+5\\0&+4\end{pmatrix}_{3\times2}$, $C=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&0\\2&-7\end{pmatrix}_{3\times2}$

$$D=A+B+C=\begin{pmatrix}2&3\\5&-2\\-1&-5\end{pmatrix}_{3\times2}+\begin{pmatrix}3&2\\-1&+5\\0&+4\end{pmatrix}_{3\times2}+\begin{pmatrix}2&-1\\-3&0\\2&-7\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2+3+2&3+2-1\\5-1-3&-2+5+0\\-1+0+2&-5+4-7\end{pmatrix}_{3\times2}=\begin{pmatrix}7&4\\1&3\\1&-8\end{pmatrix}_{3\times2}$$

دوم- عملیه تفریق متریکس‌ها (Subtraction Of Matrices):

مانند عملیه جمع عملیه تفریق نیـز بـالای متـریکس‌هـای کـه دارای ترتیـب‌هـای مــساوی باشــند. امکــان‌پــذیر مــی‌باشــد. یعنــی هرگــاه $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{m\times n}$.

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=C_{m\times n}$$
$$\Rightarrow (a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=(C_{ij})_{m\times n}$$

مثال‌ها:

متریکس‌های ذیل را تفریق نمایید.

$$1)\ A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & -1\end{pmatrix}_{2\times2} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 7\end{pmatrix}_{2\times2}$$

$$A_{2\times2}-B_{2\times2}=C_{2\times2}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & -1\end{pmatrix}_{2\times2}-\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 7\end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix}3-(-1) & 2-3\\ -5-3 & -1-7\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_{2\times2}=\begin{pmatrix}+4 & -1\\ -8 & -8\end{pmatrix}$$

$$2)\ A=\begin{pmatrix}5 & -2 & -7\\ 3 & 0 & -1\\ -4 & +1 & -2\\ 0 & -3 & +8\end{pmatrix}_{4\times3} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ -12 & 0 & -1\\ 3 & 2 & -5\\ -1 & 0 & -5\end{pmatrix}_{4\times3}$$

$$A_{4\times3}-B_{4\times3}=C_{4\times3}$$

$$\begin{pmatrix}5 & -2 & -7\\ 3 & 0 & -1\\ -4 & +1 & -2\\ 0 & -3 & +8\end{pmatrix}_{4\times3}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ -12 & 0 & -1\\ 3 & 2 & -5\\ -1 & 0 & -5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5-2 & -2-0 & -7-5\\ 3+12 & 0-0 & -1+1\\ -4-3 & +1-2 & -2+5\\ 0+1 & -3+0 & +8+5\end{pmatrix}_{4\times3}\Rightarrow C_{4\times3}=\begin{pmatrix}+3 & -2 & -12\\ +15 & 0 & 0\\ -7 & -1 & +3\\ +1 & -3 & +13\end{pmatrix}_{4\times3}$$

خواص جمع و تفریق متریکس‌ها

۱- عملیه جمع متریکس‌ها خاصیت تبـدیلی را دارد امـا تفریـق خاصـیت تبدیلی را صدق نمی‌کند. یعنی:

$$A_{mxn}+B_{mxn}=B_{mxn}+A_{mxn}$$
$$A_{mxn}-B_{mxn}\neq B_{mxn}-A_{mxn}$$

مثال:

$A=(2\quad 3\quad -5)_{1\times3}$ و $B=(-4\quad 3\quad 0)_{1\times3}$

$$A_{1\times3}+B_{1\times3}=(2\quad 3\quad -5)+(-4\quad 3\quad 0)=(-2\quad 6\quad -5)$$
$$B_{1\times3}+A_{1\times3}=(-4\quad 3\quad 0)+(2\quad 3\quad -5)=(-2\quad 6\quad -5)$$
$$\Rightarrow A_{1\times3}+B_{1\times3}=B_{1\times3}+A_{1\times3}$$
$$A_{1\times3}-B_{1\times3}=(2\quad 3\quad -5)-(-4\quad 3\quad 0)=(6\quad 0\quad -5)$$
$$B_{1\times3}-A_{1\times3}=(-4\quad 3\quad 0)-(2\quad 3\quad -5)=(-6\quad 0\quad +5)$$
$$\Rightarrow A_{1\times3}-B_{1\times3}\neq B_{1\times3}-A_{1\times3}$$

۲- عملیه جمع و تفریق متریکس‌ها خاصیت اتحادی را صـدق مـی‌کننـد. یعنی:

$$(A_{m\times n}+B_{m\times n})+C_{m\times n}=A_{m\times n}+(B_{m\times n}+C_{m\times n})$$
$$(A_{m\times n}-B_{m\times n})-C_{m\times n}=A_{m\times n}+(-B_{m\times n}-C_{m\times n})$$

مثال: هرگاه $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}_{2\times2}$ ، $B=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}_{2\times2}$ و $C=\begin{pmatrix}2 & 7\\ -10 & 15\end{pmatrix}_{2\times2}$ باشد.

پس داریم که:

$$(A_{2\times2}+B_{2\times2})+C_{2\times2}=\left[\begin{pmatrix}2&-1\\5&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&0\\3&-1\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}2&7\\-10&15\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-1\\8&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&7\\-10&15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6\\-2&17\end{pmatrix}$$

$$A_{2\times2}+(B_{2\times2}+C_{2\times2})=\begin{pmatrix}2&-1\\5&3\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}-3&0\\3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&7\\-10&15\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}2&-1\\5&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&7\\-7&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6\\-2&17\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A_{2\times2}+B_{2\times2})+C_{2\times2}=A_{2\times2}+(B_{2\times2}+C_{2\times2})$$

به همین ترتیب:

$$(A_{2\times2}-B_{2\times2})-C_{2\times2}=\left[\begin{pmatrix}2&-1\\5&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&0\\3&-1\end{pmatrix}\right]-\begin{pmatrix}2&7\\-10&15\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5&-1\\2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&7\\-10&15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-8\\12&-11\end{pmatrix}$$

$$A_{2\times2}+(-B_{2\times2}-C_{2\times2})=\begin{pmatrix}2&-1\\5&3\end{pmatrix}+\left[-\begin{pmatrix}-3&0\\3&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&7\\-10&15\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}2&-1\\5&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}+1&-7\\+7&-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-8\\+12&-11\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A_{2\times2}-B_{2\times2})-C_{2\times2}=A_{2\times2}+(-B_{2\times2}-C_{2\times2})$$

۳- عنصر عینیت در عملیه جمع و تفریق عبارت از متریکس صفری می‌باشد، یعنی:

$$A_{m\times n}+O=A_{m\times n}$$
$$A_{m\times n}-O=A_{m\times n}$$

مثلاً: هرگاه $A=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}_{3\times1}$ و $B=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}_{3\times1}$ باشد.

پس داریم که:

$$\Rightarrow A_{3\times1}+B_{3\times1}=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}_{3\times1}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}2+0\\5+0\\-1+0\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}_{3\times1}$$

$$\Rightarrow A_{3\times1}-B_{3\times1}=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}2-0\\5-0\\-1-0\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}_{3\times1}$$

سوم: عملیه ضرب متریکس‌ها (Multiplication Of Matrices)

الف- ضرب یک عدد حقیقی با متریکس: هرگاه $K\in IR$ باشد پس حاصل‌ضرب عدد K با متریکس A_{mxn} طوریست که عدد K با تمام عنصر متریکس داده شده ضرب گردد، یعنی:

$$K\in IR,\ A=_{m\times n}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{21}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$\Rightarrow K\cdot A_{m\times n}=\begin{pmatrix}ka_{11}&ka_{12}&\cdots&ka_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ka_{m1}&ka_{m2}&\cdots&ka_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n}$$

به طور مثال: اگر $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & 3 & -2\end{pmatrix}$ و $K=3$ باشد حاصل ضرب KA را دریابید:

$$KA=3\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 0 & 3\cdot 1 & 3\cdot 1\\ 3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\cdot 0\\ 3\cdot 5 & 3\cdot 3 & 3\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 6 & 3 & 0\\ 15 & 9 & -6\end{pmatrix}$$

خواص ضرب متریکس در سـکالر (عـدد حقیقـی): اگـر A و B دو متریکس عین ترتیب و K و h دو عدد حقیقی (سکالر) را ارائه نمایند، در ایـن صورت:

1) $K(A+B)=KA+KB$
2) $(K+h)A=KA+hA$
3) $K(hA)=(Kh)A=h(KA)$

مثـال: اگـر $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$ ، $K=5$ و $h=2$ باشد.

پس نشان دهید که:

1) $K(A+B)=KA+KB$
2) $(K+h)A=KA+hA$
3) $K(hA)=(Kh)A$

حل:

1) $K(A+B)=5\left[\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}\right]$

$=5\begin{pmatrix}3 & 1\\ 8 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 5\\ 40 & -10\end{pmatrix}$

$KA+KB=5\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -5\\ 25 & 15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 10\\ 15 & -25\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}15 & 5\\ 40 & -10\end{pmatrix}\Rightarrow K(A+B)=KA+KB$

2) $(K+h)A=(5+2)\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -7\\ 35 & 21\end{pmatrix}$

$KA+hA=5\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -5\\ 25 & 15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -2\\ 10 & 6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}14 & -7\\ 35 & 21\end{pmatrix}\Rightarrow (K+h)A=KA+hA$

3) $K(hA)=5\left[2\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}\right]=5\begin{pmatrix}4 & -2\\ 10 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & -10\\ 50 & 30\end{pmatrix}$

$(Kh)A=(5\cdot 2)\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}=10\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & -10\\ 50 & 30\end{pmatrix}$

$\Rightarrow K(hA)=(Kh)A$

ب- ضرب دو متریکس: حاصل ضرب دو متریکس یک متریکس بـوده بـه شرطی که تعداد عناصر ستون‌های متـریکس اول مـساوی بـه تعـداد عناصـر سطرهای متریکس دوم باشد، یعنی:

$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$

ترتیب اجرای عملیه ضرب طوریست کـه سـطر اول متـریکس اول را بـه تمام عناصر ستون‌های متریکس دوم به نوبت ضرب نموده و آنها را باهم جمع می‌نماییم و به حیث سطر اول متریکس حاصل‌ضرب قـرار مـی‌دهـیم و ایـن عملیه را برای سطر دوم متریکس اول به تمام عناصر سـتون‌هـای متـریکس

دوم به نوبت ضرب نموده و بعد از جمع آنهـا بـه حیـث سـطر دوم متـریکس حاصل‌ضرب قرار داده و این عملیه را الی اخیر ادامه می‌دهیم.

مثال‌ها:

متریکس‌های ذیل را باهم ضرب نمایند:

1) $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 3\\0 & 2 & 5\end{pmatrix}_{2\times3}$ و $B=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}_{3\times1}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 3\\0 & 2 & 5\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}5\cdot4+1\cdot1+3\cdot2\\0\cdot4+2\cdot1+5\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}20+1+6\\0+2+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27\\12\end{pmatrix}_{2\times1}$$

2) $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\2 & 5 & 1\end{pmatrix}_{2\times3}$ و $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 0\\2 & 3\end{pmatrix}_{3\times2}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\2 & 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 0\\2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(4\ 1\ 1)\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} & (4\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\\(2\ 5\ 1)\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} & (2\ 5\ 1)\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot3+1\cdot1+1\cdot2 & 4\cdot1+1\cdot0+1\cdot3\\2\cdot3+5\cdot1+1\cdot2 & 2\cdot3+5\cdot1+1\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+1+2 & 4+0+3\\6+5+2 & 6+5+2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}15 & 7\\13 & 13\end{pmatrix}_{2\times2}$$

3) $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\1 & 7\end{pmatrix}_{2\times2}$ و $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\1 & 6 & 4\end{pmatrix}_{2\times3}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 5\\1 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\1 & 6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot2+5\cdot1 & 3\cdot2+5\cdot6 & 3\cdot5+5\cdot4\\1\cdot2+7\cdot1 & 1\cdot2+7\cdot6 & 1\cdot5+7\cdot4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6+5 & 6+30 & 15+20\\2+7 & 2+42 & 5+28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 36 & 35\\9 & 44 & 33\end{pmatrix}_{2\times3}$$

خواص ضرب متریکس‌ها

به صورت عمـوم متـریکس‌هـا در عملیـه ضـرب دارای خاصـیت تبـدیلی نمی‌باشند، یعنی:

$A_{m\times n}.B_{n\times p}=C_{m\times p}$

$B_{n\times p}.A_{m\times n}\neq C_{n\times n}$

زیرا شرط عملیه ضرب را صدق نمی‌کند (تعداد عناصـر سـتون متـریکس اول مساوی به تعداد عناصر سطر متریکس دوم نمی‌باشد).

اما برای متریکس‌های مناسب (شرط عملیه ضرب را صدق نماینـد) دارای خواص الجبری ذیل می‌باشند:

۱. خاصیت اتحادی $(A\cdot B)C=A(B\cdot C)$

۲. خاصیت توزیعی $A(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

$(B+C)A=B\cdot A+C\cdot A$

۳. در حالیکه $K\in IR$ باشد $K(A\cdot B)=(KA)B=A(KB)$

۴. در حالیکه I متریکس واحد را نشان می‌دهد: $I\cdot A=A\cdot I=A$

ترانسپوز متریکس (Transpose of Matrix)

هرگاه جای سطرها و ستون‌های یک متریکس $A_{m\times n}$ با یکـدیگر تبـدیل گردد، متریکس جدید $A_{n\times m}$ به وجود می‌آید، که به نام ترانسپوز متریکس یاد گردیده و به A^T نشان داده می‌شود.

مثال‌ها:

ترانسپوز متریکس‌های ذیل را دریابید:

1) $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}_{2\times3} \qquad \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}_{3\times2}$

2) $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 1 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}_{3\times4} \qquad \Rightarrow B^T=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 3\\ 0 & 5 & 4\end{pmatrix}_{4\times3}$

به خاطر داشته باشید که هرگاه یک متریکس با متریکس ترانسـپوز خـود مساوی باشد، به نام متریکس متناظر Symmetric Matrix یاد می‌گردد.

مثال: متریکس $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ یک متریکس متناظر است، زیرا:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow A=A^T$$

همچنان متریکس $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 5 & 7 & 3\\ 2 & 3 & 9\end{pmatrix}$ یک متریکس متناظر است، زیرا:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 5 & 7 & 3\\ 2 & 3 & 9\end{pmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 5 & 7 & 3\\ 2 & 3 & 9\end{pmatrix}\Rightarrow B=B^T$$

خواص ترانسپوز متریکس

هرگاه A و B دو متریکس مناسب و K یک عدد حقیقـی (سـکالر) باشـد ترانسپوز متریکس‌ها دارای خواص ذیل می‌باشند:

1) $(A^T)^T=A$

2) $(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$

3) $(A.B)^T=B^T.A^T$

4) $(KA)^T=KA^T$

مثال‌ها:

هرگـاه $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ و $K=5$ داده شـده باشـد خواص ترانسپوز متریکس‌ها را بالای آنها به اثبات برسانید.

1) $(A^T)^T=A$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow (A^T)^T=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow (A^T)^T=A$$

2) $(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$

$$\Rightarrow A+B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 4 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow (A+B)^T=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 7 & 6\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T+B^T=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 7 & 6\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+B)^T=A^T+B^T$$

به همین ترتیب برای عملیه تفریق نیز صحت دارد.

3) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$

$$\Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+9&8+3\\1+15&4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&11\\16&9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A\cdot B)^T=\begin{pmatrix}11&16\\11&9\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&4\\3&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{pmatrix}1&3\\4&1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}$$

$$B^T\cdot A^T=\begin{pmatrix}1&3\\4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+9&1+15\\8+3&4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&16\\11&9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$$

4) $(KA)^T=K\cdot A^T$

$$\Rightarrow KA=5\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&15\\5&25\end{pmatrix}\Rightarrow (KA)^T=\begin{pmatrix}10&5\\15&25\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}\Rightarrow KA^T=5\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&5\\15&25\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (KA)^T=KA^T$$

دیترمینانت یک متریکس (Determinant Of a Matrix)

اگر A یک متریکس مربعی به یک عدد حقیقی منسوب گردد، به نام دیترمینانت متریکس A یاد گردیده و به شکل det A ویا $|A|$ نمایش داده می‌شود.

محاسبه دیترمینانت متریکس 2×2:

دیترمینانت متریکس $A=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{pmatrix}$ قرار ذیل محاسبه می‌گردد:

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-b_1a_2$$

مثال‌ها:

دیترمینانت متریکس‌های ذیل را محاسبه نمایید:

1) $A=\begin{pmatrix}5&2\\4&3\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}5&2\\4&3\end{vmatrix}=5\cdot3-4\cdot2=15-8=7\Rightarrow |A|=7$$

2) $B=\begin{pmatrix}4&-5\\-1&-3\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow |B|=\begin{vmatrix}4&-5\\-1&-3\end{vmatrix}=(4)(-3)-(-1)(-5)=-12-5=-17$$

$$\Rightarrow |B|=-17$$

3) $C=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&-\frac{8}{5}\\5&\sqrt{8}\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow |C|=\begin{vmatrix}\sqrt{2}&-\frac{8}{5}\\5&\sqrt{8}\end{vmatrix}=(\sqrt{2})(\sqrt{8})-(5)(-\frac{8}{5})$$

$$=\sqrt{16}+8=4+8=12$$

محاسبه دیترمینانت متریکس 3×3:

ساده‌ترین طریقه محاسبه دیترمینانت متریکس 3×3 طوریست که اولاً ستون‌های اول و دوم دیترمینانت مذکور را به ترتیب به طرف راست آن انتقال داده تا یک جدول 5×3 به دست آید، ثانیاً سه قطر متناقص با اشاره مثبت و

سه قطر متزاید به اشاره منفی را مطابق شکل ذیل محاسبه می‌نماییم که ایـن طریقه را به نام طرح ساروس می‌نامند، یعنی:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow |A| = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - c_1 b_2 a_3 - c_2 b_3 a_1 - c_3 b_1 a_2$$

مثال‌ها:

دیترمینانت متریکس‌های 3×3 ذیل را محاسبه نمایید:

$$1)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 2 & 4 \end{matrix} = 7+12+40-4-8-105$$

$$=59-117=-58 \Rightarrow |A|=-58$$

$$2)\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -4 \\ 3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |B|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -4 \\ 3 & -5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -5 & 8 & 3 & -5 \end{matrix}$$

$$=144-12+0-0-40-0$$

$$=144-52=92 \Rightarrow |B|=92$$

خواص دیترمینانت

۱- هرگاه تمام عناصر یک سـطر یـا سـتون دیترمینانـت یـک متـریکس مساوی به صفر باشد، در آنصورت دیترمینانت متریکس مذکور مساوی به صفر است، مثلاً:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0 \quad \text{و یا} \quad |B|=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

۲- هرگاه دو سطر یا دو ستون دیترمینانت یک متریکس باهم مـساوی و یا متناسب باشند در آن صورت دیترمینانت مـذکور مـساوی بـه صـفر می‌باشد.

مثال:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}=0$$

و یا در صورتیکه: $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{d_1}{d_2}$

پس:

$$|B|=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}=0$$

۳- اگر عناصر یک سطر یا ستون دیترمینانت یـک متـریکس مـضربی از عناصر سطر یا ستون دیگـری خـود باشـند در آنـصورت دیترمینانـت متریکس مذکور مساوی به صفر است.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0 \quad \text{و یا} \quad |B|=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & ka_2 \\ b_1 & b_2 & kb_2 \\ c_1 & c_2 & kc_2 \end{vmatrix}=0$$

۴- دیترمینانت یک متریکس با دیترمینانت ترانسپوز همـان متـریکس بـا هم مساوی اند، یعنی: $|A|=|A^T|$

مثال:

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}=5\cdot1-7\cdot2=5-14=-9$$

$$\Rightarrow |A|=|A^T|$$

$$|A^T|=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=5\cdot1-2\cdot7=5-14=-9$$

۵- دیترمینانت متریکس مربعـی $n\times n$ کـه تمـام عناصـر آن بـه عـدد حقیقی K ضرب شده باشد، مساوی است به:

$$|KA|_{n\times n}=K^n|A|_{n\times n}$$

مثال: در صورتیکه $k=2$ و $A=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}_{3\times3}$ باشد.

پس داریم که:

$$\Rightarrow |K\cdot A|=\begin{vmatrix} 2\cdot5 & 2\cdot3 & 2\cdot7 \\ 2\cdot1 & 2\cdot4 & 2\cdot1 \\ 2\cdot2 & 2\cdot3 & 2\cdot5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10 & 6 & 14 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 6 & 10 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{matrix} 10 & 6 & 14 & 10 & 6 \\ 2 & 8 & 2 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 10 & 4 & 6 \end{matrix}=800+48+168-448-120-120$$

$$=1016-688=328$$

$$\Rightarrow K^n\cdot|A|=2^3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=(8)\cdot\begin{matrix} 5 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$=8(100+6+21-56-15-15)=8(127-86)=8(41)=328$$

$$\Rightarrow |KA|_{n\times n}=K^n\cdot|A|_{n\times n}$$

۶- هرگاه در یک دیترمینانت متریکس فقـط موقعیـت دو سـطر و یـا دو ستون آن با همدیگر عوض گردد، علامه دیترمینانت تغییر مـی‌نمایـد.

یعنی در دیترمینانت 3×3 ذیل داریم که:

$$A=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\Rightarrow -A=\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}\Rightarrow -A=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

مثال: در دیترمینانت ذیل داریم که: $A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

$$=\begin{matrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{matrix}=8+0+0-2-0-60=8-62=-54$$

اگر جای سطر اول و دوم این دیترمینانت تبدیل گردد، پس داریم که:

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}=\begin{matrix} 5 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{matrix}=60+2+0-0-8$$

$$=62-8=+54$$

و اگر جای ستون اول و سوم این دیترمینانت تبدیل گردد، پس داریم که:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{matrix} = 2+60+0-8-0-3$$

$$= 62-8 = +54$$

معکــوس ضــربی متـــــریکس 2×2 (Multiplicative Inverse of Matrix 2x2)

متریکس مربعی $A_{2\times2} \neq 0$ را در نظر گرفته، اگر متریکس مربعی B وجود داشته باشد، طوریکه حاصل‌ضرب آنها یک متریکس واحد گردد، یعنی:

$$A.B = B.A = I$$

در این صورت متریکس B را به نام معکوس ضربی متریکس می‌گوینـد و به شکل A^{-1} نمایش داده می‌شود، بنابر این می‌توان چنین نوشت:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

مثـال: معکـوس ضـربی متـریکس $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ عبـارت از متـریکس $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ می‌باشد، زیرا:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

متوصلهٔ متریکس (2×2 Ad joint of 2×2 Matrix)

هرگاه در متریکس مربعی 2x2 موقعیت عناصر قطـر اصـلی آن تبـدیل و اشاره (علامه) عناصر قطر فرعی آن تغییر نماید، متریکس حاصـله را متوصـله می‌نامند، یعنی:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\, A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

مثلاً متوصله متریکس B را دریابید:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\, B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

دریافت معکوس ضربی متریکس 2×2:

در صورتیکه A یک متریکس 2×2 و دیترمینانت ایـن متـریکس $|A| \neq 0$ باشد پس معکوس ضربی متریکس 2×2 از رابطه ذیل به دست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj\, A \quad \text{و} \quad |A| \neq 0$$

مثال‌ها:

معکوس ضربی متریکس‌های 2x2 ذیل را دریابید:

مثال اول:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AdjB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot Adj\, B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B \cdot B^{-1} = I_n$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -2+2 \\ 6-6 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول به کمک معکوس متریکس:

بـــا در نظرداشـــت سیـــستم معـــادلات دو مجهولـــه درجـــه اول $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ متریکس ضرایب مجهول‌ها و متریکس اعـداد ثابـت را می‌توان چنین نوشت:

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

اگـر $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ باشـد در صـورتیکه $A \neq 0$ باشد پس داریم که:

$$A\,X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A\,X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

مثال‌ها:

سیستم معادلات دو مجهوله ذیل را با استفاده از معکوس ضربی متریکس حل نمایید:

مثال اول:

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow B=\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Adj\ A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, |A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (2)(-1)-(1)(1)$$

$$=-2-1=-3$$

مثال دوم:

$$M=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$Adj\ M=\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = (4)(-5)-(-3)(-1)=-20-3=-23$$

$$\Rightarrow M^{-1}=\frac{1}{|M|} \cdot Adj\ M = \frac{1}{-23}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{23} & -\frac{1}{23} \\ -\frac{3}{23} & -\frac{4}{23} \end{pmatrix}$$

مثال سوم:

$$D=\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$Adj\ D=\begin{pmatrix} -5 & -9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|D|=\begin{vmatrix} -5 & -9 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (-5)(-4)-(-2)(-9)=+20-18=+2$$

$$\Rightarrow D^{-1}=\frac{1}{|D|} \cdot Adj\ D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & -9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj\ A=\frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$A\cdot X=B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{1}{32} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}(7)+\frac{1}{3}(-1)\\ \frac{1}{3}(7)+(-\frac{2}{3})(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}-\frac{1}{3}\\ \frac{7}{3}+\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{7-1}{3}\\ \frac{7+2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x=2\\ y=3\end{matrix}$$

مثال دوم:

$$\begin{cases}2x+3y=7\\ 3x+4y=10\end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}7\\ 10\end{pmatrix}$$

$$Adj\ A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix},\ |A|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=(2)(4)-(3)(3)=8-9=-1$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj\ A=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

$$X=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\ 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-4)(7)+(3)(10)\\ (3)(7)+(-2)(10)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-28+30\\ 21-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x=2\\ y=1\end{matrix}$$

مثال سوم:

$$\begin{cases}5x+3y=-7\\ 2x-y=\frac{19}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\Rightarrow B\begin{pmatrix}-7\\ \frac{19}{5}\end{pmatrix}$$

$$Adj\,A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -2 & 5\end{pmatrix},|A|=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=(5)(-1)-(2)(3)=-5-6=-11$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj\ A=\frac{1}{-11}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{11} & +\frac{3}{11}\\ +\frac{2}{11} & -\frac{5}{11}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

$$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{11} & +\frac{3}{11}\\ +\frac{2}{11} & -\frac{5}{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\ \frac{19}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\frac{1}{11})(-7)+(+\frac{3}{11})(\frac{19}{5})\\ (+\frac{2}{11})(-7)+(-\frac{15}{11})(\frac{19}{5})\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{-7}{11}+\frac{57}{55}\\ -\frac{14}{11}-\frac{19}{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-35+57}{55}\\ \frac{-14-19}{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{22}{55}\\ -\frac{33}{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ -3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ -3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ -3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x=\frac{2}{5}\\ y=-3\end{matrix}$$

مثال چهارم:

$$\begin{cases}2x-5y=10\\4x-10y=5\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & -5\\4 & -10\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}2 & -5\\4 & -10\end{vmatrix}=(2)(-10)-(4)(-5)$$

$$=-20+20=0$$

چون $|A|=0$ بناً سیستم معادلات فوق حل مشخص ندارد.

حل سیستم معادلات خطی در متریکس به طریقه حذفی (Gouse)

برای حل سیستم معادلات به این طریقه متریکس ضرایب و مقادیر ثابت را ترتیب نموده و به ترتیب طی چند مرحله با اجرای عملیات جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم، تغییر محل سطرها و یا تغییر محل ستون‌ها با یکدیگر، متریکس مثلثی تحتانی را به وجود آورده بعداً می‌توان مجهول‌ها را به ترتیب از آخر به طرف اول دریافت نمود. به خاطر داشته باشید که r سطرها را نمایش می‌دهد.

مثال: سیستم معادلات ذیل را به طریقه حذفی (Gouse) حل نمایید.

مثال ۱:

$$\begin{cases}2x+y=5.......(1)\\x+3y=10......(2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 1 & : & 5\\1 & 3 & : & 10\end{pmatrix}_{r_2\leftrightarrow r_1}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & : & 10\\2 & 1 & : & 5\end{pmatrix}_{2r_1-r_2\to r_2}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & : & 10\\0 & 5 & : & 15\end{pmatrix}_{\frac{1}{5}r_2\to r_2}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & : & 10\\0 & 1 & : & 3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y=3$$

$$x+3y=10$$

$$x+3(3)=10\Rightarrow x+9=10\Rightarrow x=1$$

مثال ۲:

$$\begin{cases}5x-y=7............(1)\\2x+y=7...........(2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}5 & -1 & : & 7\\2 & 1 & : & 7\end{pmatrix}_{\frac{1}{5}r_1\to r_1}\sim\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{5} & : & \frac{7}{5}\\2 & 1 & : & 7\end{pmatrix}_{2r_1-r_2\to r_2}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{5} & : & \frac{7}{5}\\0 & -\frac{7}{5} & : & -\frac{21}{5}\end{pmatrix}_{-\frac{5}{7}r_2\to r_2}\sim\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{5} & : & \frac{7}{5}\\0 & +1 & : & +3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y=+3$$

$$x-\frac{1}{5}y=\frac{7}{5}\Rightarrow x-\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$$

$$x=\frac{7}{5}+\frac{3}{5}\Rightarrow x=\frac{10}{5}\Rightarrow x=2$$

مثال ۳:

$$\begin{cases}x+2y+z=3..........(1)\\2x-y+z=-2........(2)\\x+y-2z=7...........(3)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & -2 \\ 1 & 1 & -2 & \vdots & 7 \end{pmatrix}_{\substack{2r_1-r_2\to r_2 \\ r_1-r_3\to r_3}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & -4 \end{pmatrix}_{r_2\leftrightarrow r_3}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & -4 \\ 0 & 5 & 1 & \vdots & 8 \end{pmatrix}_{5r_2-r_3\to r_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 14 & \vdots & -28 \end{pmatrix}_{\frac{1}{14}r_3\to r_3}$$

$$\Rightarrow z=-2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \begin{aligned} & y+3z=-4 \Rightarrow y+3(-2)=-4 \\ & y-6=-4 \Rightarrow y=2 \\ & x+2y+z=3 \\ & x+4-2=3 \Rightarrow x=1 \end{aligned}$$

مثال ۴:

$$\begin{cases} x+2y-3z=6 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ x+5y=15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ 3y-z=5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots & 6 \\ 1 & 5 & 0 & \vdots & 15 \\ 0 & 3 & -1 & \vdots & 5 \end{pmatrix}_{r_2\leftrightarrow r_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots & 6 \\ 0 & 3 & -1 & \vdots & 5 \\ 1 & 5 & 0 & \vdots & 15 \end{pmatrix}_{\frac{1}{3}r_2\to r_2}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \vdots & \frac{5}{3} \\ 1 & 5 & 0 & \vdots & 15 \end{pmatrix}_{r_1-r_3\to r_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \vdots & \frac{5}{3} \\ 0 & -3 & -3 & \vdots & 1-9 \end{pmatrix}_{3r_2+r_3\to r_3}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \vdots & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -4 \end{pmatrix}_{-\frac{1}{4}r_3\to r_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \vdots & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z=1$$

$$y-\frac{1}{3}z=\frac{5}{3} \Rightarrow y-\frac{1}{3}=\frac{5}{3} \Rightarrow y=\frac{5}{3}+\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{5+1}{3} \Rightarrow y=2$$

$$x+2y-3z=6 \Rightarrow x+2(2)-3(1)=6 \Rightarrow x+3-3=6 \Rightarrow x=5$$

حل سیستم معادلات خطی به کمک دیترمینانت (طریقه گرامر Crammer's Rule)

در این طریقه ابتدا دیترمینانت اصلی (Δ) را از ضرایب مجهول‌ها تشکیل داده و محاسبه می‌نمایم و زمانی سیستم معادلات فوق دارای حل مشخص می‌باشد که $\Delta \neq 0$ باشد. بعداً n دیترمینانت فرعی مانند Δx، Δy، Δz ..... را طوری تشکیل می‌دهیم که به عوض ستون ضرایب هر مجهول اعداد ثابت معادله را درج نموده و محاسبه می‌نماییم، که برای سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول، دیترمینانت اصلی و فرعی آن قرار ذیل می‌باشد:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ a_2x+b_2y=c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta\neq 0$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\Delta x}{\Delta}, y=\frac{\Delta y}{\Delta}$$

و برای سیستم معادلات سه مجهوله درجه اول، دیترمینانت اصلی و فرعی آن قرار ذیل می‌باشد:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 .... (1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 ....(2) \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 ....(3) \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta\neq 0$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\Delta x}{\Delta}, y=\frac{\Delta y}{\Delta}, z=\frac{\Delta y}{\Delta}$$

مثال‌ها:

سیستم معادلات خطی ذیل را به طریقه دیترمینانت حل نمایند:

1) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3y=10 \end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 3-1\cdot 1=6-1=5\Rightarrow\Delta=5$$

سیستم معادلات فوق حل مشخص دارد. $\Delta\neq 0$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}=5\cdot 3-10\cdot 1=15-10=5$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}=2\cdot 10-1\cdot 5=20-5=15$$

$$\Rightarrow x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{5}{5}=1\Rightarrow x=1$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{15}{5}=3\Rightarrow y=3$$

2) $\begin{cases} 5x-y=7 .... (1) \\ 2x+y=7 ....(2) \end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=5\cdot 1-2\cdot(-1)=5+2=7$$

سیستم معادلات فوق حل مشخص دارد $\Delta\neq 0$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}=7\cdot 1-7\cdot(-1)=7+7=14$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=5\cdot 7-2\cdot 7=35-14=21$$

$$\Rightarrow x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{14}{7}=2\Rightarrow x=2$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{21}{7}=3\Rightarrow y=3$$

3) $\begin{cases} 5x-2y=5 .... (1) \\ 10x=15+4y ....(2) \end{cases}$

$$\Rightarrow 5x-2y=5 .... (1)$$

$$10x-4y=15....(2)$$

$$\Rightarrow\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 10 & -4 \end{vmatrix}=5\cdot(-4)-10\cdot(-2)$$

$$\Delta=-20+20\Rightarrow\Delta=0$$

در نتیجـه سیـستم معـادلات فـوق حـل مـشخص نـدارد و از جـانبی $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$ است. بناءً معادلات فوق هیچ حل ندارد.

$$4)\begin{cases} x+2y+z=3 \ldots\ldots (1) \\ 2x-y+z=-2 \ldots\ldots (2) \\ x+y-2z=7 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}=2+2+2+1-1+8=14$$

چون $\Delta \neq 0$ است بنًا سیستم معادلات فوق دارای حل مشخص می‌باشد.

$$\Delta x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \\ 7 & 1 \end{matrix}$$

$$=6+14-2+7-3-8=27-13=+14$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 7 \end{matrix}$$

$$=4+3+14+2-7+12=35-7=28$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$=-7-4+6+3+2-28=-39+11=-28$$

$$\Rightarrow x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{+14}{14}=+1 \Rightarrow x=+1$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{+28}{14}=+2 \Rightarrow y=+2$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{-28}{14}=-2 \Rightarrow z=-2$$

$$5)\begin{cases} x+2y-3z=6 \ldots\ldots (1) \\ x+5y=15 \ldots\ldots (2) \\ 3y-z=5 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{matrix}$$

$$=-5+0-9-0-0+2=-12$$

چون $\Delta \neq 0$ است پس سیستم معادلات فوق دارای حل مشخص می‌باشد.

$$\Delta x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 15 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & 2 \\ 15 & 5 \\ 5 & 3 \end{matrix}$$

$$=-30+0-135+75-0+30=-60$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 1 & 15 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 6 \\ 1 & 15 \\ 0 & 5 \end{matrix}$$

$$=-15+0-15-0-0+6=-24$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 15 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{matrix}$$

$$=+25+0+18-0-45-10=-12$$

$$\Rightarrow x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-60}{-12}=+5 \Rightarrow x=+5$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-24}{-12}=+2 \Rightarrow y=+2$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{-12}{-12}=+1 \Rightarrow z=+1$$

$$6)\begin{cases} x-2y+5z=3 \quad ....(1) \\ x+4y+5z=1 \quad ....(2) \\ 3x-6y+15z=2 ......(3) \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & -6 & 15 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \\ 3 & -6 \end{matrix} = +60-30-30-60+30+30=0$$

چون $\Delta=0$ است بناً سیستم معادلات فوق دارای حل نمی‌باشد.

مسایل عبارتی یا فکری (Word Problems)

هرگاه در یک مسئله ریاضی رابطه بین معلوم و مجهول بصورت جملات غیر الجبری ارائه گردیده باشد، مسایل عبارتی یا فکری نامیده می‌شود، که می‌توان به استعمال حروف مانند x، y، z،..... و تشخیص مجهول اصلی، مسایل مذکور را در شکل افاده الجبری ارائه نمود و از طریق مساوات افاده‌های مذکور به شکل معادلات الجبری ارائه نموده و با حل آن قیمت مجهول مورد نظر را دریافت نمود.

یادداشت: قبل بر این که بر حل مثال‌ها در این بخش آغاز نماییم، لازم می‌دانیم جهت ارائه اعداد به شکل افاده الجبری، چنین نوشت:

۱- اعداد مسلسل طبیعی: مثلاً 8,9,10,11,12,........

طوریکه ملاحظه می‌گردد، اعداد مسلسل طبیعی به اندازه یک واحد از یکدیگر تفاوت دارند، بناءً می‌توان نوشت:

x عدد اول

x+1 عدد دوم

x+2 عدد سوم

⋮

۲- اعداد مسلسل طبیعی جفت: مثلاً 14,16,18,20,22,......

طوریکه ملاحظه می‌گردد، اعداد مسلسل جفت به اندازه دو واحد از یکدیگر تفاوت دارند، بناءً می‌توان نوشت:

2x عدد اول

2x+2 عدد دوم

2x+4 عدد سوم

2x+6 عدد چهارم

⋮

۳- اعداد مسلسل طبیعی طاق، مانند 37,39,41,43,45,.....

طوریکه ملاحظه می‌گردد که اعداد مسلسل طاق به اندازه دو واحد از یک دیگر تفاوت دارند، بناءً می‌توان نوشت:

2x+1 عدد اول

2x+3 عدد دوم

2x+5 عدد سوم

2x+7 عدد چهارم

⋮

٤- طرز نمایش طبقه‌بندی اعداد: درحالیکه x ، y ، z ،..... ارقام را نشان دهد پس می‌توان نوشت:

x عدد یک رقمی

x+10y عدد دو رقمی

x+10y+100z عدد سه رقمی

⋮

مثال‌ها:

مثال اول: عددی را دریابید که با دوچند خودش جمع و از نـصف خـودش تفریق گردد 20 به دست آید.

حل: x عدد $\Rightarrow x+2x-\frac{x}{2}=20$

$3x-\frac{x}{2}=20/\cdot 2$

$6x-x=40$

$5x=40 \Rightarrow x=\frac{40}{5} \Rightarrow x=8$

مثال دوم: عددی را دریابید که همین عدد با نصفش و نصف نصفش و ثلـثش جمع گردد مساوی به دوچند همان عدد به علاوه سه گردد، عدد کدام است؟

حل: x عدد

$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{3}=2x+3/\cdot 12$

$12x+6x+3x+4x=24x+36$

$25x-24x=36$

$x=36$

مثال سوم: کدام عدد به صورت و مخرج کسر $\frac{7}{13}$ علاوه گـردد تـا کـسر $\frac{2}{3}$ به دست آید؟

حل: x فرضاً عدد مورد نظر

$\Rightarrow \frac{7+x}{13+x}=\frac{2}{3}$

$3(7+x)=2(13+x)$

$21+3x=26+2x$

$3x-2x=26-21$

$x=5$

مثال چهارم: عمر یک پدر 43 سال و عمر پسرش 23 سال است، قبـل از چند سال پدر دو چند پسر عمر داشت؟

حل: x تعداد سال‌های مجهول

$43=$ عمر فعلی پدر $\xrightarrow{x \text{ سال قبل}}$ $43-x=$ عمر پدر

$23=$ عمر فعلی پسر $\xrightarrow{x \text{ سال قبل}}$ $23-x=$ عمر پسر

$\Rightarrow 43-x=2(23-x)$

$43-x=46-2x$

$-x+2x=46-43$

$x=3$

مثال پنجم: سه عدد متعاقب طاق را دریابید که مجموع آنها 99 باشد.

حل:

$2x+1$ عدد اول طاق، $2x+3$ عدد دوم طاق، $2x+5$ عدد سوم طاق

$(2x+1)+(2x+3)+(2x+5)=99$

$6x+9=99$

$6x=99-9$

$6x=90 \Rightarrow x=\frac{90}{6} \Rightarrow x=15$

عدد اول $2x+1=2(15)+1=31$

عدد دوم $2x+3=2(15)+3=33$

عدد سوم $2x+5=2(15)+5=35$

مثال ششم: مجموعه ارقام یک عدد دو رقمی 12 است اگر ترتیـب ارقـام تبدیل گردد، حاصل تفریق آنها 54 می‌گردد، عدد کدام است؟

حل: عدد دورقمی $10y+x$

$x+y=12 \cdots\cdots (1)$

$(10y+x)-(10x+y)=54$

$-9x+9y=54/:9 \Rightarrow -x+y=6 \cdots (2)$

$$\begin{array}{r|l} x+y=12 & x+9=12 \\ -x+y=\ 6 & x=3 \\ \hline 2y=18 & \\ y=\ 9 & \end{array}$$

پس عدد دو رقمی $\Rightarrow 10y+x=10\cdot 9+3=93$

مثال هفتم: اگر چهارچند عدد خورد دو عدد متعاقب مسلسل طبیعی با هفت چند عدد بزرگ آن جمع گردد حاصل جمع آنها 95 می‌گردد، اعداد کدام‌ها اند؟

حل: x عدد خورد مسلسل طبیعی، x+1 عدد بزرگ مسلسل طبیعی

$4x+7(x+1)=95$

$4x+7x+7=95$

$11x=95-7$

$11x=88 \Rightarrow x=8$

$x=8$ عدد خورد و $x+1=8+1=9$ عدد بزرگ

مثال هشتم: عمر سه سال قبل احمد نصف عمر شش سال بعد او است، عمر فعلی وی را دریابید:

حل:

عمر فعلی احمد x

عمر سه سال قبل احمد $x-3$

عمر شش سال بعد احمد $x+6$

$x-3=\frac{1}{2}(x+6)$

$x-3=\frac{1}{2}x+3$

$x-\frac{1}{2}x=3+3$

$\frac{1}{2}x=6/\cdot 2 \Rightarrow x=12$

مثال نهم: عمر یک پدر 24 سال بیشتر از عمر پسرش است. دو سال قبل عمر پدر هفت چند عمر دو سال قبل پسرش بود، عمر پدر و پسر را محاسبه نمایید؟

عمر پدر x ، عمر پسر y

$x=y+24$

$x-y=24 \cdots\cdots (1)$

دو سال قبل

عمر پدر $x-2$ ، عمر پسر $y-2$

$x-2=7(y-2)$

$x-2=7y-14 \Rightarrow x-7y=-12 \cdots (2)$

$$\begin{array}{r l} x-\ y=\ 24 & \cdots(1) \\ \pm x \mp 7y=\mp 12 & \cdots(2) \\ \hline 6y=+36 & \\ y=+\ 6 & \text{عمر پسر} \end{array}$$

$x-y=24 \cdots (1)$

$x-6=24$

$x=24+6$

$x=30$ عمر پدر

مثال دهم: طول ضلع یک مربع x واحد می‌باشد اگر طول ضلع این مربع یک واحد بیشتر گردد، مساحت آن 17 واحد مربع اضافه‌تر می‌شود، محیط

مربع مذکور را دریابید:

حل: x طول ضلع مربع و $A = x^2$ مساحت مربع

$(x+1)^2 = A+17$

$x^2+2x+1 = x^2+17$

$x^2+2x-x^2 = +17-1$

$2x = 16/:2 \Rightarrow x = 8$

واحد $P = 4x \Rightarrow P = 4\cdot 8 \Rightarrow P = 32$ محیط مربع

مثال یازدهم: ارتفاع یک مثلث به اندازه 4 واحد از قاعده آن طویلتر اسـت، اگر با ارتفاع آن 2 واحد اضافه گردد، مـساحت آن 10 واحـد مربـع اضـافه‌تـر می‌گردد، ارتفاع و قاعده آن را دریابید:

حل: a قاعده، h ارتفاع، $\Rightarrow H = 4+a$

مساحت مثلث $A = \frac{1}{2}a\cdot h \Rightarrow A = \frac{1}{2}a(4+a) \Rightarrow A = 2a+\frac{1}{2}a^2$

همچنان $\frac{1}{2}(h+2)\cdot a = A+10$

$\frac{1}{2}(4+a+2)\cdot a = A+10$

$\frac{1}{2}(6+a)\cdot a = A+10$

$3a+\frac{1}{2}a^2 = 2a+\frac{1}{2}a^2+10$

$3a+\frac{1}{2}a^2-2a-\frac{1}{2}a^2 = 10$

واحد $a = 10$

$h = 4+a$

$h = 4+10$

$h = 14$

مثال دوازدهم: دو عراده موتر از یک نقطه در یک وقت بـه جهـت مقابـل یکدیگر شروع به حرکت می‌نمایند. موتر اولی سرعت $50\frac{Km}{h}$ و موتر دومـی دارای سرعت $40\frac{Km}{h}$ می‌باشد، معلوم نمایید بعد از چـه مـدت فاصـله بـین آن‌ها $360Km$ می‌گردد.

حل: $V_1 = 50\frac{Km}{h}$ سرعت موتر اولی، $V_2 = 40\frac{Km}{h}$ سرعت موتر دومی

$\Delta S = 360Km$ تفاوت فاصله $\Rightarrow$ $t = ?$ زمان

$V = \frac{S}{t} \Rightarrow S = V\cdot t$

$S_1 = V_1\cdot t \cdots (1)$

$S_2 = V_2\cdot t \cdots (2)$

$_-S_1 - {}_-S_2 = V_1\cdot t - V_2\cdot t$

$\Delta S = (V_1 - V_2)\cdot t$

$360Km = \left(50\,{}^{Km}/_{h} - 40\,{}^{Km}/_{h}\right)\cdot t$

$360Km = 10\frac{Km}{h}\cdot t$

$t = \frac{360Km}{10\,{}^{Km}/_{h}} \Rightarrow t = 36h$

مثال سیزدهم: دو موتر در یک وقت از شهر A به طرف شـهر B حرکـت می‌نماید، سرعت مـوتر اول 80 کیلـومتر در سـاعت و سـرعت مـوتر دوم 60 کیلومتر در ساعت می‌باشد، اگر موتر اولی بـه سـاعت 5 بجـه و چهـل و پـنج دقیقه و موتر دوم به ساعت شش بجه و پانزده دقیقه عصر به شـهر B برسـند مسافه بین شهرهای A و B چند کیلومتر خواهد بود.

حل: $V_1 = 80\frac{Km}{h}$ سرعت موتر اولی، $V_2 = 60\frac{Km}{h}$ سرعت موتر دومی

$6:15 - 5:45 = 30\min = \frac{1}{2}h$ تفاوت زمان بین رسیدن موتر اول و دوم

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{1}{2}$$

$S = ?$ فاصله بین شهر A و B

$$\left.\begin{aligned} S &= V_1 \cdot t_1 \cdots\cdots (1) \\ S &= V_2 \cdot t_2 \cdots (2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_1 \cdot t_1 = V_2 \cdot t_2$$

$$80 \cdot t_1 = 60\left(t_1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$80 \cdot t_1 = 60t_1 + 30$$

$$80t_1 - 60t_1 = 30$$

$$20t_1 = 30 \Rightarrow t_1 = \frac{30}{20} \Rightarrow t_1 = 1.5h$$

$$\Rightarrow S = V_1 \cdot t_1$$

$$S = 80\frac{Km}{h} \cdot 1.5h = 120Km \Rightarrow S = 120Km$$

مثال چهاردهم: شخصی به مبلغ 24180 افغانی دو توپ تکه را خریداری نمود که یک توپ آن فی متر 66 متر افغانی و توپ دیگر فی متـر 60 افغـانی ارزش داشت و مقدار تکه توپ دومی 25 متر از توپ اولی بیشتر است، معلـوم نمایید هر توپ شامل چند متر تکه خواهد بود؟

حل: x تعداد متر توپ اولی و y تعداد متر توپ دومی

$$y = 25 + x$$

$$-x + y = 25 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$66x + 60y = 24180 / :6$$

$$x = 180 \text{ متر}$$

$$-x + y = 25 \quad \cdots\cdots (1)$$

$$-x + 205 = 25$$

$$-x = 25 - 205$$

$$-x = -180 / \cdot -1$$

$$11x + 10y = 4030 \cdots (2)$$

$$11 \cdot \left| \begin{aligned} -x + \quad y &= 25 \\ 11x + 10y &= 4030 \end{aligned} \right.$$

$$-11x + 11y = 275$$

$$11x + 10y = 4030$$

$$21y = 4305$$

$$y = \frac{4305}{21}$$

$$y = 205 \text{ متر}$$

مثال پانزدهم: A یک کار را در 12 روز، و یکجا به همـرای B آن را در 4 روز انجام می‌دهد، B به تنهایی همان کار را در چند روز انجام خواهد داد؟

حل:

A	B	A+B
12 روز	x روز	4 روز

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{3-1}{12}$$ کار یک روزه آنها

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 6 \text{ روز}$$

مثال شانزدهم: نل A یک حوض را در 20 ساعت پر می‌کند، نل B همان حوض را در 15 ساعت پر می‌کند، اما نل C که پایین حوض قـرار دارد، آن را در 30 ساعت تخلیه می‌کند، هرگاه هر سه نل همزمان باز باشد حوض مذکور در چند ساعت پر خواهد شد؟

حل:

نل A	نل B	نل C	A+B-C
20 ساعت	15 ساعت	30 ساعت	x ساعت

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{15} - \frac{1}{30} = \frac{1}{x}$$ کار یک ساعته آن‌ها

$$\frac{3+4-2}{60}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{5}{60}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{1}{12}=\frac{1}{x}$$

$x=12$ ساعت

مثال هفدهم: مبلغ 400 افغانی را بین A، B وC طوری تقسیم نمایید که حصه C هفتاد افغانی از دوچند حصه A زیادتر و 40 افغانی کمتر از سه چند حصه B باشد؟

حل:

x حصه نفر A
y حصه نفر B
z حصه نفر C

$$\begin{cases} x+y+z=400\cdots(1)\\ z=2x+70\cdots(2)\\ z=3y-40\cdots(3)\end{cases}$$

از مقایسه رابطه (2) و (3) می‌توان نوشت: $2x+70=3y-40$

$2x-3y=-110\cdots(*)$

همچنان با وضع نمودن قیمت z از معادله (2) در معادله (1) داریم که:

$x+y+2x+70=400\Rightarrow 3x+y=330\cdots(**)$

$$\begin{array}{r|l} & 2x-3y=-110\ \cdots(*)\\ 3\cdot & 3x+y=330\cdots(**)\\ \hline & 2x-3y=-110\\ & 9x+3y=990\\ \hline & 11x=880\end{array}$$

$x=\frac{880}{11}$

$x=80$ حصه نفر A

$3x+y=330$

$3(80)+y=330$

$y=330-240$

$y=90$ حصه نفر B

$z=2x+70$

$z=2(80)+70$

$z=160+70$

$z=230$ حصه نفر C

معادلات نمایی (Exponential Equations)

به معادلاتی گفته می‌شود که مجهول به حیث نما (طاقت نما) قرار گیرد، که می‌توان جهت دریافت مجهول از نما، قاعده‌ها را در اطراف مساوات مساوی ساخته تا نماها باهم مساوی گردند.

مثال‌ها: از معادلات نمایی ذیل قیمت مجهول مربوطه را دریابید:

$\langle 1\rangle: 5^{2x-1}-125=0$

$5^{2x-1}=125$

$5^{2x-1}=5^3$

$2x-1=3$

$2x=4$

$x=2$

$\langle 2\rangle: 7^{3x+7}\cdot 49=1$

$7^{3x+7}\cdot 7^2=1$

$7^{3x+7+2}=7^0$

$7^{3x+9}=7^0$

$3x+9=0$

$3x=-9\Rightarrow x=-3$

$\langle 3\rangle: \left(\frac{4}{5}\right)^{3x-1}-\left(1\frac{9}{16}\right)^{x-2}=0$

$\left(\frac{4}{5}\right)^{3x-1}=\left(\frac{25}{16}\right)^{x-2}$

$\left(\frac{4}{5}\right)^{3x-1}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-2(x-2)}\Rightarrow\left(\frac{4}{5}\right)^{3x-1}=\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^2\right\}^{x-2}$

$3x-1=-2x+4$

$3x+2x=4+1\Rightarrow 5x=5$

$x=1$

$\langle 4\rangle: 4^{2-x}\cdot 8^x=\frac{1}{32}$

$(2^2)^{2-x}\cdot(2^3)^x=\frac{1}{2^5}$

$(2)^{4-2x}\cdot(2)^{3x}=\frac{1}{2^5}$

$(2)^{4-2x+3x}=(2)^{-5}$

$x+4=-5$

$x=-5-4\Rightarrow x=-9$

$\langle 5\rangle: 7^x-4^x=0$

$7^x=4^x/:4^x$

$\frac{7^x}{4^x}=1$

$\left(\frac{7}{4}\right)^x=\left(\frac{7}{4}\right)^0$

$x=0$

$\langle 6\rangle: (\sqrt[7]{4})^{2x-5}=(\sqrt[3]{16})^{x-1}$

$(4)^{\frac{2x-5}{7}}=(\sqrt[3]{4^2})^{x-1}$

$(4)^{\frac{2x-5}{7}}=(4)^{\frac{2x-2}{3}}$

$\frac{2x-5}{7}=\frac{2x-2}{3}$

$14x-14=6x-15$

$14x-6x=-15+14$

$8x=-1$

$x=-\frac{1}{8}$

$\langle 7\rangle: 3^{x+1}-3^x-54=0$

$3^x\cdot 3^1-3^x=54$

$3^x(3-1)=54$

$3^x(2)=54$

$3^x=\frac{54}{2}$

$3^x=27$

$3^x=3^3\Rightarrow x=3$

$\langle 8\rangle: 5^{2-x}+5^{-x+1}=\frac{6}{625}$

$\frac{5^2}{5^x}+\frac{5^1}{5^x}=\frac{6}{625}$

$\frac{25+5}{5^x}=\frac{6}{625}$

$\frac{30}{5^x}=\frac{6}{625}$

$6\cdot 5^x=30\cdot 625/:6$

$5^x=\frac{30\cdot 625}{6}$

$5^x=5^1\cdot 5^4\Rightarrow 5^x=5^5$

$x=5$

$\langle 9 \rangle : \begin{cases} 2^{5x-1} = 4^{-y+5} \cdots\cdots (1) \\ 3^{3x-1} - 9^{y+1} = 0 \cdots\cdots (2) \end{cases}$

$2^{5x-1} = 4^{-y+5} \cdots\cdots (1)$

$(2)^{5x-1} = (2^2)^{-y+5}$

$(2)^{5x-1} = (2)^{-2y+10}$

$5x - 1 = -2y + 10$

$5x + 2y = 11 \cdots\cdots (1)$

$3^{3x-1} - 9^{y+1} = 0 \cdots\cdots (2)$

$(3)^{3x-1} = (9)^{y+1}$

$(3)^{3x-1} = (3^2)^{y+1}$

$(3)^{3x-1} = (3)^{2y+2}$

$3x - 1 = 2y + 2$

$3x - 2y = 2 + 1$

$3x - 2y = 3 \cdots\cdots (2)$

$5x + 2y = 11 \cdots (1)$

$3x - 2y = 3 \cdots (2)$

$8x = 14$

$x = \frac{7}{4}$

$5x + 2y = 11 \cdots\cdots (1)$

$5\left(\frac{7}{4}\right) + 2y = 11$

$2y = 11 - \frac{35}{4}$

$2y = \frac{44-35}{4} \Rightarrow 2y = \frac{9}{4} \Rightarrow y = \frac{9}{8}$

$\langle 10 \rangle : 4^{2x} - 4^x - 2 = 0$

$(4^x)^2 - 4^x - 2 = 0$

اگر عوض $y = 4^x$ وضع گردد، پس داریم که:

$y^2 - y - 2 = 0$

$(y-2)(y+1) = 0$

$y - 2 = 0 \,,\, y + 1 = 0$

$y = 2 \qquad y = -1$

$y = 2 \cdots (1)$

$4^x = 2$

$(2^2)^x = 2 \Rightarrow 2^{2x} = 2$

$2x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$

$y = -1 \cdots\cdots 2$

امکان ندارد $4^x = -1$

تجزیه کسور قسمی (Partial Fractions)

هدف از تجزیه کسور قسمی عبارت از تبدیل نمودن یک کسر الجبری به چندین عوامل جمعی آن می‌باشد مثال می‌خواهیم کسور ذیل را جمع نماییم.

$$\frac{2}{x+5} + \frac{5}{x-1} = \frac{2(x-1) + 5(x+5)}{(x+5)(x-1)}$$

$$= \frac{2x - 2 + 5x + 25}{x^2 - x + 5x - 5} = \frac{7x+23}{x^2+4x-5}$$

پس حالا چطور می‌توان کسر مذکور را دوباره به عوامل جمعی آن تجزیه نمود. یعنی:

$$\Rightarrow \frac{7x+23}{x^2+4x-5} = \frac{2}{x+5} + \frac{5}{x-1}$$

که این هدف اساسی تجزیه کسور به شکل قسمی می‌باشد.

بناءً برای رسیدن به این هدف کسرهای الجبری $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را در نظر گرفته نظر به درجه پولینوم‌های $P(x)$ و $Q(x)$ دو حالت ذیل وجود دارد:

حالت اول: اگر درجه پولینوم P(x) کوچکتر از درجه پولینوم Q(x) باشد فقط کوشش نمایید تا مخرج کسر یعنی Q(x) به عوامل ضربی خویش تجزیه

گردد ، که سه امکان ذیل وجود دارد:

۱- اگر عوامل ضربی Q(x) در شکل بینوم‌های درجه اول باشـد، صـورت کسور قسمی را اعداد ثابت A، B، C، .... در نظر می‌گیریم.

مثال:
$$\frac{7x+5}{x^2-3x-4}=\frac{7x+5}{(x+1)(x-4)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-4}$$

۲- هرگاه عوامل ضربی Q(x) در شکل آنعده ترینوم‌های درجه دوم قـرار گیرد که نتوانند به شکل بینوم‌های درجه اول تجزیـه گردنـد، در ایـن حالت صورت کسور قسمی را به شکل افاده‌های Ax+B، Cx+D...... در نظر می‌گیریم. مثال:

$$\frac{3x^2-5x+4}{(x-5)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-5}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

ویا
$$\frac{x^3-x-1}{x^4+4x^2+3}=\frac{x^3-x-1}{(x^2+1)(x^2+3)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+3}$$

۳- هرگاه عوامل ضربی Q(x) در شکل $(x-a)^n$ قرار گیـرد، مخـرج‌هـای کسور در شکل $(x-a)^1,(x-a)^2,(x-a)^3,....,(x-a)^n$ در نظـر گرفته می‌شود و صورت کسور در شکل اعداد تامماننـد A، B، C، .... در نظر گرفته خواهد شد.

مثال:
$$\frac{2x+4}{x^2-6x+9}=\frac{2x+4}{(x-3)^2}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x-3)^2}$$

ویا
$$\frac{x^2-3x+1}{x^3+3x^2+3x+1}=\frac{x^2-3x+1}{(x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}$$

حالت دوم: هرگاه درجه پولینوم P(x) بزرگتر یا مساوی به درجه پولینـوم Q(x) باشد یعنی کسر در شکل غیر واقعی قرارداشته باشد. با استفاده از عملیه تقسیم صورت بالای مخرج می‌توان آن‌را در شکل کسر عدد صحیح‌دار تبدیل نموده و کسر باقیمانده را مانند حالت اول تجزیه خواهیم نمود.

مثال:
$$\frac{2x^2+5x-1}{x^2+x-6}=$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+5x-1 & x^2+x-6 \\ \hline \pm 2x^2 \pm 2x \pm 12 & 2 \\ \hline 3x+11 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2+5x-1}{x^2+x-6}=2+\frac{3x+11}{x^2+x-6}$$

و همچنان:
$$\frac{5x^3+2x+5}{x^2+3x-4}$$

$$\begin{array}{r|l} 5x^3+0x^2+2x+5 & x^2+3x-4 \\ \hline \pm 5x^3 \pm 15x^2 \mp 20x & 5x-15 \\ \hline -15x^2+22x+5 & \\ \mp 15x^2 \mp 45x \pm 60 & \\ \hline 67x-55 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{5x^3+2x+5}{x^2+3x-4}=(5x-15)+\frac{67x-55}{x^2+3x-4}$$

بعد از در نظر گرفتن یک کسر به چندین کسر جهت دریافت قیمت‌هـای ثابت A، B، C، .... با کمک مخرج مشترک گـرفتن یعنـی عملیـه جمـع و تفریق کـسور تجزیـه شـده و مطابقـت آن بـه کـسر اولـی $\frac{P(x)}{Q(x)}$ سیـستم معادلات را تشکیل داده که با حل آن می‌توان یک کسر را بـه چنـدین کـسر تجزیه نمود.

مثال‌ها:

کسرهای ذیل را به شکل قسمی آن تجزیه نمایید.

$\langle 1 \rangle : \dfrac{7x+23}{x^2+4x-5} = ?$

$$\frac{7x+23}{x^2+4x-5} = \frac{7x+23}{(x+5)(x-1)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-1}$$

$$\frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+5)}{(x+5)(x-1)} = \frac{Ax-A+Bx+5B}{x^2-x+5x-5}$$

$$\Rightarrow \frac{7x+23}{x^2+4x-5} = \frac{(A+B)x-A+5B}{x^2+4x-5}$$

$A+B=7$ .... (1)

$-A+5B=23$ ....(2)

$6B=30/:6 \Rightarrow B=5$

$A+B=7$ ....(1)

$A+5=7 \Rightarrow A=7-5 \Rightarrow A=2$

$$\Rightarrow \frac{7x+23}{x^2+4x-5} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{7x+23}{x^2+4x-5} = \frac{2}{x+5} + \frac{5}{x-1}$$

$\langle 2 \rangle : \dfrac{4x^2-24x-8}{x^3-4x} = ?$

$$\frac{4x^2-24x-8}{x^3-4x} = \frac{4x^2-24x-8}{x(x^2-4)} = \frac{4x^2-24x-8}{x(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x^2-4)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{Ax^2-4A+Bx^2+2Bx+Cx^2-2Cx}{x(x^2-4)}$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2+(2B-2C)x-4A}{x^3-4x}$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2-24x-8}{x^3-4x} = \frac{(A+B+C)x^2+(2B-2C)x-4A}{x^3-4x}$$

$A+B+C=4 \cdots\cdots(1)$
$2B-2C=-24 \cdots\cdots(2)$
$-4A=-8 \cdots\cdots\cdots(3)$

$A=2$

$A+B+C=4 \cdots\cdots 1$

$2+B+C=4 \Rightarrow B+C=4-2 \Rightarrow B+C=2 \cdots\cdots *$

$2B-2C=-24 \cdots (2)$ $\qquad \Rightarrow B+C=2 \cdots *$

$2 \cdot |\, B+C=2 \cdots\cdots\cdots (*)$ $\qquad -5+C=2$

$2B-2C=-24$ $\qquad C=2+5$

$2B+2C=4$ $\qquad C=7$

$4B=-20/:4$

$B=-5$

$$\Rightarrow \frac{4x^2-24x-8}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2-24x-8}{x^3-4x} = \frac{2}{x} - \frac{5}{x-2} + \frac{7}{x+2}$$

$\langle 3 \rangle : \dfrac{2x^3+6x^2+2x+16}{x^4+4x^2+3} = ?$

$$\frac{2x^3+6x^2+2x+16}{x^4+4x^2+3} = \frac{2x^3+6x^2+2x+16}{(x^2+1)(x^2+3)}$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$\langle 4 \rangle: \dfrac{5x-1}{2x^3+5x^2+4x+10} = ?$

$$\frac{5x-1}{2x^3+5x^2+4x+10} = \frac{5x-1}{x^2(2x+5)+2(2x+5)}$$

$$= \frac{5x-1}{(2x+5)(x^2+2)} = \frac{A}{2x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$= \frac{A}{2x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+2} = \frac{A(x^2+2)+(2x+5)(Bx+C)}{(2x+5)(x^2+2)}$$

$$= \frac{Ax^2+2A+2Bx^2+2Cx+5Bx+5C}{2x^3+4x+5x^2+10}$$

$$= \frac{(A+2B)x^2+(5B+2C)x+2A+5C}{2x^3+5x^2+4x+10}$$

$$\Rightarrow \frac{0x^2+5x-1}{2x^3+5x^2+4x+10}$$

$$= \frac{(A+2B)x^2+(5B+2C)x+2A+5C}{2x^3+5x^2+4x+10}$$

$$\left.\begin{array}{ll} A+2B=0 & \cdots\cdots\cdots (1) \\ 5B+2C=5 & \cdots\cdots\cdots (2) \\ 2A+5C=-1 & \cdots\cdots\cdots (3) \end{array}\right\}$$

$$2\left| \begin{array}{ll} A+2B=0 & \cdots\cdots\cdots (1) \\ 2A+5C=-1 & \cdots\cdots (3) \end{array}\right.$$

$$2A+4B=0$$

$$\underline{-2A \pm 5C = \mp 1}$$

$$\begin{array}{l|ll} 2\cdot & 4B \; -5C=+1 & \cdots\cdots (*) \\ 5\cdot & 5B \; +2C=5 & \cdots\cdots (2) \end{array}$$

$$8B-10C=2$$

$$25B+10C=25$$

$$33B=27 \Rightarrow B=\frac{27}{33} \Rightarrow B=\frac{9}{11}$$

$$\Rightarrow \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+3} = \frac{(Ax+B)(x^2+3)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+3)}$$

$$= \frac{Ax^3+3Ax+Bx^2+3B+Cx^3+Cx+Dx^2+D}{x^4+3x^2+x^2+3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^3+6x^2+2x+16}{x^4+4x^2+3}$$

$$= \frac{(A+C)x^3+(B+D)2+(3A+C)x+3B+D}{x^4+4x^2+3}$$

$A+C=2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$B+D=6 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

$3A+C=2 \cdots\cdots\cdots (3)$

$3B+D=16 \cdots\cdots\cdots (4)$

$\Rightarrow A+C = \; 2 \cdots\cdots (1)$

$\underline{\pm 3A \pm C = \pm \; 2 \cdots\cdots (3)}$

$-2A = 0 \Rightarrow A = \dfrac{0}{-2} \Rightarrow A=0$

$A+C = \; 2 \Rightarrow 0+C=2 \Rightarrow C=2$

$B+D = \; 6 \cdots\cdots\cdots (2)$

$\underline{\pm 3B \pm D = \pm 16 \cdots\cdots\cdots (4)}$

$-2B \; = -10 \Rightarrow B = \dfrac{-10}{-2} \Rightarrow B=5$

$B+D=6 \cdots\cdots (2) \Rightarrow 5+D=6 \Rightarrow D=6-5 \Rightarrow D=1$

$$\Rightarrow \frac{2x^3+6x^2+2x+16}{x^4+4x^2+3} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$\frac{2x^3+6x^2+2x+16}{x^4+4x^2+3} = \frac{0x+5}{x^2+1} + \frac{2x+1}{x^2+3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^3+6x^2+2x+16}{x^4+4x^2+3} = \frac{5}{x^2+1} + \frac{2x+1}{x^2+3}$$

$\langle 6 \rangle : \dfrac{x^2+5}{x^3+6x^2+12x+8} = ?$

$$\frac{x^2+5}{x^3+6x^2+12x+8} = \frac{x^2+5}{x^3+8+6x^2+12x}$$

$$= \frac{x^2+5}{(x+2)(x^2-2x+4)+6x(x+2)}$$

$$= \frac{x^2+5}{(x+2)(x^2-2x+4+6x)}$$

$$= \frac{x^2+5}{(x+2)(x^2+4x+4)} = \frac{x^2+5}{(x+2)(x+2)^2} = \frac{x^2+5}{(x+2)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+5}{x^3+6x^2+12x+8} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3} = \frac{A(x+2)^2+B(x+2)+C}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{A(x^2+4x+4)+Bx+2B+C}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{Ax^2+4Ax+4A+Bx+2B+C}{(x+2)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+0x+5}{x^3+6x^2+12x+8}$$

$$= \frac{Ax^2+(4A+B)x+4A+2B+C}{(x+2)^3}$$

$A = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$4A + B = 0 \cdots\cdots\cdots (2) \Rightarrow 4(1) + B = 0 \Rightarrow B = -4$

$4A + 2B + C = 5 \cdots (3) \Rightarrow 4(1) + 2(-4) + C$

$= 5 \Rightarrow C = 5 + 4 \Rightarrow C = 9$

$A + 2B = 0 \cdots\cdots (1)$

$$A + 2\left(\frac{9}{11}\right) = 0 \Rightarrow A = -\frac{18}{11}$$

$5B + 2C = 5 \cdots (2)$

$$5\left(\frac{9}{11}\right) + 2C = 5 \Rightarrow 2C = 5 - \frac{45}{11} \Rightarrow 2C = \frac{10}{11}$$

$$C = \frac{10}{2 \cdot 11} \Rightarrow C = \frac{5}{11}$$

$$\Rightarrow \frac{5x-1}{2x^3+5x^2+4x+10} = \frac{A}{2x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$\frac{5x-1}{2x^3+5x^2+4x+10} = \frac{-\frac{18}{11}}{2x+5} + \frac{\frac{9}{11}x+\frac{5}{11}}{x^2+2}$$

$$\frac{5x-1}{2x^3+5x^2+4x+10} = \frac{-18}{22x+55} + \frac{9x+5}{11x^2+22}$$

$\langle 5 \rangle : \dfrac{2x}{x^2-8x+16} = ?$

$$\frac{2x}{x^2-8x+16} = \frac{2x}{(x-4)^2} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} = \frac{A(x-4)+B}{(x-4)^2} = \frac{Ax-4A+B}{(x-4)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{x^2-8x+16} = \frac{Ax-4A+B}{(x-4)^2}$$

$A = 2 \cdots\cdots\cdots (1)$

$-4A + B = 0 \cdots (2) \Rightarrow -4(2) + B = 0 \Rightarrow -8 + B = 0$

$\Rightarrow B = 8$

$$\Rightarrow \frac{2x}{x^2-8x+16} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2}$$

$$\frac{2x}{x^2-8x+16} = \frac{2}{x-4} + \frac{8}{(x-4)^2}$$

$$A+B=11\cdots\cdots(1)$$

$$A+\frac{4}{5}=11$$

$$A=11-\frac{4}{5}\Rightarrow A=\frac{51}{5}$$

$$\Rightarrow\frac{2x^2+5x-1}{x^2-3x-4}=2+\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+1}$$

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^2-3x-4}=2+\frac{\frac{51}{5}}{x-4}+\frac{\frac{4}{5}}{x+1}$$

$$\Rightarrow\frac{2x^2+5x-1}{x^2-3x-4}=2+\frac{51}{5x-20}+\frac{4}{5x+5}$$

$\langle 8\rangle$: $\frac{8x^3-6x+7}{2x^2-5x-3}=?$

$$\begin{array}{r|l} 8x^3+0x^2-6x+7 & 2x^2-5x-3 \\ \cline{2-2} \pm8x^3\mp20x^2\mp12x & 4x+10 \\ \hline +20x^2+6x+7 & \\ \pm20x^2\mp50x\mp30 & \\ \hline +56x+37 & \end{array}$$

$$\Rightarrow\frac{8x^3-6x+7}{2x^2-5x-3}=(4x+10)+\frac{56x+37}{2x^2-5x-3}$$

$$=(4x+10)+\frac{56x+37}{(2x+1)(x-3)}$$

$$=4x+10+\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x-3}$$

$$\Rightarrow(4x+10)+\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-3}=(4x+10)+\frac{A(x-3)+B(2x+1)}{(2x+1)(x-3)}$$

$$=(4x+10)+\frac{Ax-3A+2Bx+B}{2x^2-5x-3}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2+5}{x^3+6x^2+12x+8}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{(x+2)^3}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2+5}{x^3+6x^2+12x+8}=\frac{1}{x+2}-\frac{4}{(x+2)^2}+\frac{9}{(x+2)^3}$$

$\langle 7\rangle$: $\frac{2x^2+5x-1}{x^2-3x-4}=?$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+5x-1 & x^2-3x-4 \\ \cline{2-2} \pm2x^2\mp6x\mp8 & 2 \\ \hline +11x+7 & \end{array}$$

$$\Rightarrow\frac{2x^2+5x-1}{x^2-3x-4}=2+\frac{11x+7}{x^2-3x-4}=2+\frac{11x+7}{(x-4)(x+1)}$$

$$=2+\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+1}$$

$$\Rightarrow2+\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+1}=2+\frac{A(x+1)+B(x-4)}{(x-4)(x+1)}$$

$$=2+\frac{Ax+A+Bx-4B}{x^2-3x-4}$$

$$\Rightarrow\frac{2x^2+5x-1}{x^2-3x-4}=2+\frac{11x+7}{x^2-3x-4}$$

$$=2+\frac{(A+B)x+A-4B}{x^2-3x-4}$$

$$\begin{array}{l} A+B=11\cdots\cdots(1) \\ \underline{\pm A\pm4B=\pm7\cdots\cdots(2)} \\ 5B=4 \end{array}$$

$$B=+\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow (4x+10)+\frac{56x+37}{2x^2-5x-3}=(4x+10)+\frac{(A+2B)x-3A+B}{2x^2-5x-3}$$

$$3\cdot\begin{vmatrix} A+2B=56\cdots\cdots(1) \\ -3A+B=37\cdots(2)\end{vmatrix}$$

$$3A+6B=168$$

$$-3A+\ \ B\ =\ 37$$

$$7B=205$$

$$B=\frac{205}{7}$$

$$A+2B=56\cdots\cdots(1)$$

$$A+2\left(\frac{205}{7}\right)=56$$

$$A+\frac{410}{7}=56$$

$$A=56-\frac{410}{7}$$

$$A=\frac{392-410}{7}\Rightarrow A=\frac{-18}{7}$$

$$\Rightarrow\frac{8x^3-6x+7}{2x^2-5x-3}=(4x+10)+\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-3}$$

$$\frac{8x^3-6x+7}{2x^2-5x-3}=(4x+10)-\frac{\frac{18}{7}}{2x+1}+\frac{\frac{205}{7}}{x-3}$$

$$\frac{8x^3-6x+7}{2x^2-5x-3}=(4x+10)-\frac{18}{14x+7}+\frac{205}{7x-21}$$

مطالعه اشاره بینوم‌ها (Sign of Binomials)

شکل عمومی یک بینوم (دو حده) $y=ax+b$ بوده و هدف اینست که این دو حده به کدام قیمت‌های حرف (متحول) مربوطه دارای اشـاره مثبـت و برای کدام قیمت‌های آن دارای اشاره منفی خواهد بود.

برای این منظور بینوم مذکور را مساوی به صفر قرار می‌دهیم تا دریابیم بینـوم مذکور به کدام قیمت حرف (متحول) مربوط خویش بی‌اشاره می‌گردد، یعنی:

$y=ax+b$

$y=0$ (بی‌اشاره گردد)

$$ax+b=0\Rightarrow ax=-b\Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

پس در نتیجه دریافت گردید که بینوم فوق‌الذکر به قیمت $x=-\frac{b}{a}$ بی اشاره است.

حالا جهت تعیین اشاره مثبت و منفی در مجاورت جـذر بینـوم یعنـی قیمت‌های بزرگتر از جذر و کوچکتر از جذر با اسـتفاده از مطالعـه اشـاره (a) دو حالت ذیل وجود دارد.

۱: هرگاه a یک عدد مثبت باشد (a>0)

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$y=ax+b$		$-$	0	$+$	

۲: هرگاه a یک عدد منفی باشد (a<0)

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$y=ax+b$		$-$	0	$+$	

مثال‌ها:

اشاره بینوم‌های ذیل را مطالعه نمایید.

مثال اول: بینوم $y=2x-10$ به کدام قیمت‌هـای x دارای اشـاره مثبت و به کدام قیمت‌های x دارای اشاره منفی می‌باشد؟

$y=2x-10$

$y=0$ بی‌اشاره

$2x-10=0$

$2x=10$

$x=5$

x	$-\infty\cdots+2+3+4$	$+5$	$+6+7+8\cdots+\infty$
$y=2x-10$	$-$	0	$+$

در نتیجه بینوم مذکور به قیمت‌های $x < +5$ دارای اشاره منفی و به قیمت‌های $x > +5$ دارای اشاره مثبت می‌باشد.

صحت مسئله را امتحان می‌نماییم:

$x < +5$

$x = +1 \quad \Rightarrow y = 2x - 10 \Rightarrow y$
$= 2(+1) - 10 \Rightarrow y = 2 - 10 \Rightarrow y = -8$

بینوم مذکور اشاره منفی دارد.

$x > +5$

$x = +6 \quad \Rightarrow y = 2x - 10 \Rightarrow y$
$= 2(+6) - 10 \Rightarrow y = 12 - 10 \Rightarrow y = +2$

بینوم مذکور اشاره مثبت دارد.

مثال دوم: بینوم $y = -3x - 21$ به کدام قیمت‌های x دارای اشاره منفی و به کدام قیمت‌های x دارای اشاره مثبت می‌باشد؟

$y = -3x - 21$

$y = 0$ بی اشاره

$-3x - 21 = 0$
$-3x = 21$
$x = -7$

x	$-\infty \cdots -9 -8$	-7	$-6 -5 -4 \cdots +\infty$
$y=-3x-21$	$+$	0	$-$
	$x < -7$		$x > -7$

بناءً بینوم مذکور به قیمت‌های $x < -7$ دارای اشاره مثبت و به قیمت‌های $x > -7$ دارای اشاره منفی می‌باشد.

مثال سوم: بینوم‌های $y = (8x - 24)(x + 1)$ به کدام قیمت‌های x دارای اشاره مثبت می‌باشد؟

حل: چون حاصل‌ضرب بینوم های مذکور به شکل افاده درجه دوم قرار می‌گیرد بناً هرکدام آن را بطور جداگانه مورد مطالعه قرار داده توسط یک جدول اشاره آن‌ها را توحید خواهیم نمود.

$8x - 24 = 0$
$8x = 24$
$x = 3$

$x + 1 = 0$
$x = -1$

x	$-\infty \cdots -3 -2$	-1	$0 \ 1 \ 2$	3	$4 \ 5 \cdots +\infty$
$8x-24$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
N	$+$		$-$		$+$
	$x < -1$				$x > 3$

مثال چهارم: بینوم‌های $y = \frac{2x+7}{12-6x}$ به کدام قیمت‌های x دارای اشاره مثبت می‌باشد؟

$2x + 7 = 0$
$2x = -7$
$x = -3.5$

$-6x = -12$
$x = 2$
$12 - 6x = 0$
$-6x = -12 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty \ldots\ldots -3.5$			$2 \ldots\ldots +\infty$
$2x+7$	$-$	0	$+$	$+$
$12-6x$	$+$		$+$ 0	$-$
N	$-$		$+$ ($-3.5 < x < 2$)	$-$

مثال پنجم: بینوم‌های $y = \frac{(5x+12)(12-2x)}{7x-63}$ به کدام قیمت‌های x دارای اشاره منفی می‌باشند؟

$5x + 12 = 0$
$5x = -12$
$x = -2.4$

$12 - 2x = 0$
$-2x = -12$
$x = +6$

$7x - 63 = 0$
$7x = 63$
$x = 9$

x	$-\infty.......-2.4$		$+6$		$9.........+\infty$
$5x+12$	$-$	O $+$		$+$	$+$
$12-2x$	$+$	$+$	O $-$		$-$
$7x-63$	$-$	$-$	$-$	O	$+$
N	$+$	$-$	$+$		$-$

$$-2,4 < x < +6 \qquad x > 9$$

در نتیجه بینوم‌های فوق به قیمت‌های $-2.4 < x < +6$ و $x > 9$ دارای اشاره منفی می‌باشد.

نامساوات (Inequality)

اگر دو حد یا دو مقدار و یا دو افاده الجبری مانند A و B را بنابر قیمت‌های مختلف حروف (متحول‌ها) مطالعه نماییم، سه‌حالت ذیل وجود دارد:

$\langle 1 \rangle : A = B$

$\langle 2 \rangle : A > B$

$\langle 3 \rangle : A < B$

که حالت اول را به نام مساوات و دو حالت اخیر را به نام غیرمساوی یا غیرتساوی و یا نامساوات یاد می‌نمایند.

مثال: مساحت دو صنف درسی یا تعداد چوکی‌های دو صنف درسی A و B را در نظر بگیرید. از همین سه حالت فوق خارج نمی‌باشد.

خواص نامساوی‌ها (Properties of Inequality)

۱- اگر به اطراف یک نامساوی یک عدد مانند C را جمع و یا تفریق نماییم در نامساوی کدام تغییر رونما نمی‌گردد، یعنی:

اگر $a < b$ باشد ویا اگر $a > b$ باشد.

پس $a+c < b+c$ پس $a+c > b+c$

و $a-c < b-c$ می‌باشد و $a-c > b-c$ می‌باشد.

مثال:

$7 < 10$ همچنان: $15 > 10$

$C = 5 \Rightarrow 7+5 < 10+5$ $\qquad$ $C = 5 \Rightarrow 15+5 > 10+5$

$12 < 15$ $\qquad$ $20 > 15$

$C = 5 \Rightarrow 7-5 < 10-5$ $\qquad$ $C = 5 \Rightarrow 15-5 > 10-5$

$2 < 5$ $\qquad$ $10 > 5$

۲- اگر به اطراف یک نامساوی یک مثبت مانند (C>0) را ضرب و یا تقسیم نماییم در نامساوی کدام تغییری رونما نمی‌گردد، یعنی:

اگر $a < b$ باشد ویا اگر $a > b$ باشد.

پس $a \cdot c < b \cdot c$ پس $a \cdot c > b \cdot c$

و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ می‌باشد و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ می‌باشد.

مثال:

$2 < 6$ همچنان $4 > 2$

$C = +2 \Rightarrow 2 \cdot (+2) < 6 \cdot (+2)$ $\qquad$ $C = +2 \Rightarrow 4 \cdot (+2) > 2 \cdot (+2)$

$+4 < +12$ $\qquad$ $+8 > +4$

$C = +2 \Rightarrow \frac{2}{+2} < \frac{6}{+2}$ $\qquad$ $C = +2 \Rightarrow \frac{4}{+2} > \frac{2}{+2}$

$+1 < +3$ $\qquad$ $+2 > +1$

۳- اگر به اطراف یک نامساوات یک عدد منفی مانند (C<0) را ضرب و یا تقسیم نماییم علامه (جهت) نامساوی تغییر می‌نماید

یعنی:

اگر $a<b$ باشد ویا اگر $a>b$ باشد.

پس $a\cdot c>b\cdot c$ پس $a\cdot c<b\cdot c$

و $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ می‌باشد. و $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ می‌باشد.

مثال:

$6<9$ همچنان $12>9$

$C=-3\Rightarrow 6\cdot(-3)>9\cdot(-3)$ $\quad$ $C=-3\Rightarrow 12\cdot(-3)<9\cdot(-3)$

$-18>-27$ $\quad$ $-36<-27$

$C=-3\Rightarrow\frac{6}{-3}>\frac{9}{-3}$ $\quad$ $C=-3\Rightarrow\frac{12}{-3}<\frac{9}{-3}$

$-2>-3$ $\quad$ $-4<-3$

۴- اگر اطراف یک نا مساوی را معکوس نمائیم علامه (جهت) نا مساوی تغیر می نماید.

اگر $a>b$ باشد ویا اگر $a<b$ باشد

پس $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ می‌گردد پس $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ می‌گردد

مثال:

$4<2$ همچنان: $\frac{5}{4}<\frac{8}{5}$

$\frac{4}{5}>\frac{5}{8}$ $\quad$ $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$

$0.25<0.5$ یا $\quad$ $0.8>0.625$ یا

ساحهٔ حل نامساوی‌های یک مجهولهٔ درجه اول

هدف از ساحهٔ حل نامساوی‌هـای یـک مجهولـهٔ درجـه اول یـافتن آن قیمت‌های از مجهول در یک سـاحه اسـت کـه بـه اسـاس آن نامسـاوی را صدق نماید. این ست به نام ست حله نامساوی یا انتروال حل نامسـاوی یـاد می‌گردد. بدینترتیب می‌توان سـت حلـه نامسـاوی را بـا اسـتفاده از خـواص نامساوی‌ها تعیین نمود.

مثال‌ها:

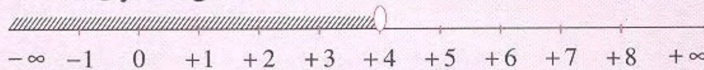
ست حله نامساوی‌های ذیل را تعیین نمایید.

$\langle 1\rangle: 5x-3<2x+9$

$5x-2x<9+3$

$3x<12/:3\Rightarrow x<4$ و یا $A=\{x/x\in IR, x<4\}$

ساحه حل نامساوی



$\langle 2\rangle: 7(2x-1)\le 5(3x-2)$

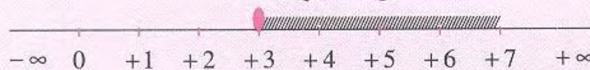
$14x-7\le 15x-10$

$14x-15x\le -10+7$

$-x\le -3/\cdot -1\Rightarrow x\ge 3$

ویا $A=\{x/x\in IR, x\ge 3\}$

ساحه حل نامساوی



$\langle 3 \rangle : \frac{3x}{2} - \frac{x}{3} + 1 > x - \frac{5}{6}$

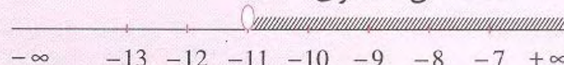
$\frac{3x}{2} - \frac{x}{3} + 1 > x - \frac{5}{6} \,/\cdot 6$

$9x - 2x + 6 > 6x - 5$

$7x - 6x > -5 - 6$

$x > -11$ ویا $A = \{x / x \in IR, x > -11\}$

ساحه حل نامساوی



$\langle 4 \rangle : (5x+15)(7-x) \le 0$

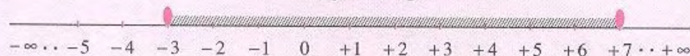
حل: در این حالت اگر قوس فوق را ضرب نماییم نامساوی در شکل درجه دوم قرار گرفته که تا فعلاً مطالعه ننموده ایم بناً اولاً با استفاده از مطالعه اشاره بینومها اشاره آنها را مطالعه نموده، بعداً با در نظرداشت علامه نامساوی ساحه حل آن را تعیین خواهیم نمود.

$5x+15=0$	$7-x=0$
$5x=-15/:5$	$-x=-7/\cdot -1$
$x=-3$	$x=7$

x	$-\infty.......-3$		$+7.......+\infty$	
$5x+15$	$-$	O $+$		$+$
$7-x$	$+$	$+$	O	$-$
N	$-$	$+$ $-3 \le x \le +7$ ساحه حل		$-$

$-3 \le x \le +7$ و یـــا $B = \{x / x \in IR, -3 \le x \le +7\}$

ساحه حل نامساوی



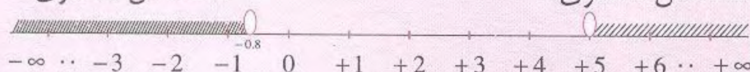
$\langle 5 \rangle : \frac{5x+4}{2x-10} > 0$

$5x+4=0$	$2x-10=0$
$5x=-4/:5$	$2x=10/:2$
$x=-\frac{4}{5}$	$x=5$
$x=-0.8$	

x	$-\infty\cdots-0.8$		$5\cdots+\infty$	
$5x+4$	$-$	O $+$		$+$
$2x-10$	$-$	$-$	O	$+$
N	$+$	$-$		$+$
	$x < -0.8$ ساحه حل			$x > 5$ ساحه حل

$M = \{x / x \in IR, x < -0.8 \vee x > 5\}$

ساحه حل نامساوی ساحه حل نامساوی



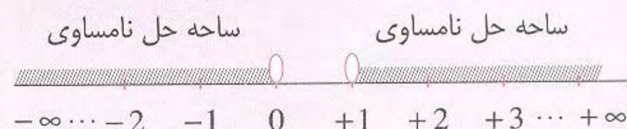
$\langle 6 \rangle : 2 + \frac{1}{x} < 3$

$\frac{1}{x} + 2 - 3 < 0$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{1} < 0$

$\frac{1-x}{x} < 0$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$1-x$	+	+	−	
x	−	−	+	
N	−	+	−	
	$x<0$		$x>1$	



$A=\{x/x\in IR, x<0 \vee x>1\}$

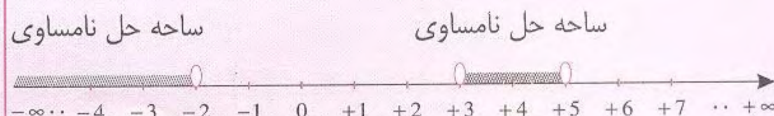
$\langle 7\rangle: \dfrac{(2x-6)(-x+5)}{(7x+14)}>0$

$2x-6=0$ | $-x+5=0$ | $7x+14=0$

$2x=6$ | $-x=-5/\cdot -1$ | $7x=-14/:7$

$x=3$ | $x=5$ | $x=-2$

x	$-\infty$	-2	3	5	$+\infty$
$2x-6$	−	− 0	+	+	
$-x+5$	+	+	+ 0	−	
$7x+14$	− 0	+	+	+	
N	+	−	+	−	
	$x<-2$		$x<x<5$		



و یا $A=\{x/x\in IR, x<-2 \vee 3<x<5\}$

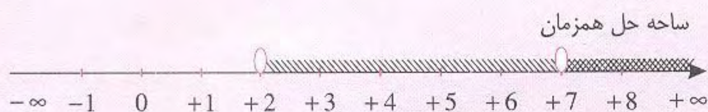
$\langle 8\rangle$: ساحه حل همزمان نامساوی‌های داده شده ذیل را دریابید:

$$\begin{cases}5x-35>0\cdots(1)\\-2x+4<0\cdots(2)\end{cases}$$

$5x-35>0\cdots\cdots(1)$ | $-2x+4<0\cdots(2)$

$5x>35/:5$ | $-2x<-4/:2$

$x>7$ | $x>2$



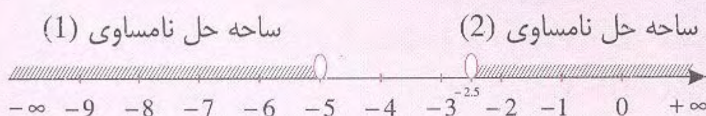
$7<x<\infty$ ساحه حل همزمان

$$\langle 9\rangle: \begin{cases}2x+5>0\cdots\cdots(1)\\-3x-15>0\cdots(2)\end{cases}$$

$2x+5>0\cdots 1$ | $-3x-15>0\cdots 2$

$2x>-5/:2$ | $-3x>15/:-3$

$x>-2.5$ | $x<-5$



ساحه حل همزمان ندارد.

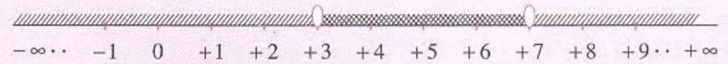
$$\langle 10\rangle: \begin{cases}5x-15>0\cdots(1)\\3x-21<0\cdots(2)\end{cases}$$

$5x-15>0\cdots(1)$ | $3x-21<0\cdots()2$

$5x>15/:5$ | $3x<21/:3$

$x>3$ | $x<7$

ساحه حل همزمان



$3 < x < 7$

ساحه حل نامساوی‌های قیمت مطلقه یک مجهوله درجه اول

جهت دریافت ساحه حل نامساوی‌های درجه اول حاوی قیمت مطلقه با استفاده از تعریف قیمت مطلق می‌توان چنان انتـروال‌هـای را دریافـت نمود که بر اساس آن نامساوات را صدق نماید.

مثال‌ها:

انتروال حل نامساوی‌های قیمت مطلقه ذیل را دریافت نمایید.

مثال ۱: ساحه حل نامساوی $|2+x| \le 6$ را دریابید:

$+(2+x) \le 6 \Rightarrow x \le 6-2 \Rightarrow x \le 4$

$-(2+x) \le 6 \Rightarrow -2-x \le 6 \Rightarrow -x \le 8/\cdot -1$

$x \ge -8$

$\Rightarrow -8 \le x \le 4$

مثال ۲: ساحه حل نامساوی $|2x-1| > 3$ را دریابید.

$+(2x-1) > 3 \Rightarrow 2x > 4/:2 \Rightarrow x > 2$

$-(2x-1) > 3 \Rightarrow -2x+1 > 3 \Rightarrow -2x > 2/:-2$

$x < -1$

$\Rightarrow 2 < x < -1$

مثال ۳) ساحه حل نامساوی $3 < |x-4| < 7$ را دریابید:

$\Rightarrow |x-4| < 7 \Rightarrow -7 < x-4 < 7$

$-7+4 < x-4+4 < 7+4 \Rightarrow -3 < x < 11$

$\Rightarrow |x-4| > 3 \Rightarrow -3 > x-4 > 3$

$-3+4 > x-4+4 > 3+4 \Rightarrow 1 > x > 7$



ساحه حل همزمان $7 < x < 11$ و $-3 < x < 1 \Rightarrow$

و یا به شکل انتروال $(-3,1) \cup (7,11)$

مثال ۴: ساحه حل نامساوی $|x-2| \le |x-4|$ را دریابید:

حل: هرگاه اطراف نامساواتی‌که یک عدد مثبت باشد مربـع گـردد در نامساوات تغییر به وجود نمی‌آید.

مثال:

$+3 < +8$

$\Rightarrow (+3)^2 < (+8)^2 \Rightarrow +9 > +64$

چون نتیجه قیمت مطلق یک عدد همیشه مثبت است بناً با اسـتفاده از همین خاصیت اطراف نامساوات را مربع نموده داریم، که:

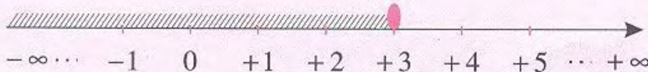
$(|x-2|)^2 \le (|x-4|)^2$

$x^2-4x+4 \le x^2-8x+16$

$x^2-4x-x^2+8x \le 16-4$

$+4x \le 12/:4 \Rightarrow x \le 3$

$(-\infty, 3]$ و یا هم $A = \{x / x \in IR, x \le 3\}$ و یا



ساحه حل نامساوی‌های دو مجهوله درجه اول

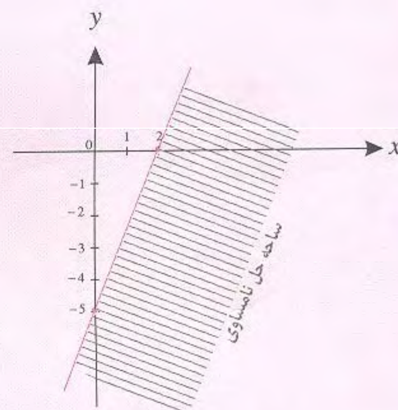
از مطالعه حل سیستم معادلات دو مجهوله به طریقه گراف می‌دانـیم کـه معادله $ax+by=c$ یک خط مستقیم را ترسیم می‌نماید، بناءً برای دریافت ساحه حل نامساوی‌های فوق اولاً خط مستقیم مذکور را ترسیم نموده، بعداً بـا وضع نمودن نقاط در ساحه متناظر خط مستقیم می‌توان دریافت نمود که کدام ساحه شرط نامساوی را صدق می‌کند که ساده‌ترین شکل دریافت ساحه حـل وضع نمودن نقطه $O(0,0)$ مبدأ کمیات وضیعه قایم می‌باشد.

مثال: ساحه حل نامساوی دو مجهوله درجه اول ذیل را دریابید.

$\langle 1\rangle : 5x-2y>10$

$5x-2y=10$

x	y
0	-5
2	0



حال نقطه مبـده $O(0,0)$ را در مساوات وضع نموده داریم که:

$5x-2y>10$

$5(0)-2(0)>10$

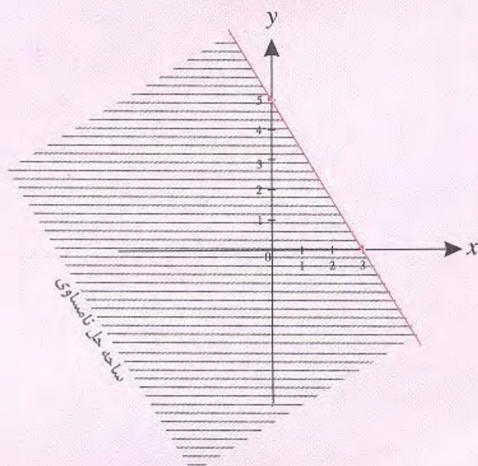
$0>10$ صحت ندارد

بناً ساحه مقابل مبده کمیات ساحه حل نامساوی مذکور می‌باشد.

$\langle 2\rangle : 3x+2y<9$

$3x+2y=9$

x	y
0	4.5
3	0



$3x+2y<9$

مبده $O(0,0)$

$3(0)+2(0)<9$

$0<9$ صحت دارد

بناءً ساحه حل نامساوی مذکور به طرف مبدأ کمیات می‌باشد.

مثال سوم: ساحه حل سیستم نامساوات دو مجهوله ذیل را دریابید.

$$\begin{cases} x+y>2\cdots(1) \\ x-y<5\cdots(1) \end{cases}$$

$x+y>2\cdots\ (1)$

$x+y=2$

x	y
0	2
2	0

مبدأ $O(0,0)$

$x+y>2$

$0+0>2$

$0>2$ صحت ندارد.

در نتیجه نامساوی (1) در ساحه مقابل مبدأ کمیات حل دارد.

$x - y < 5 \cdots (2)$

$x - y = 5$

x	y
o	-5
5	0

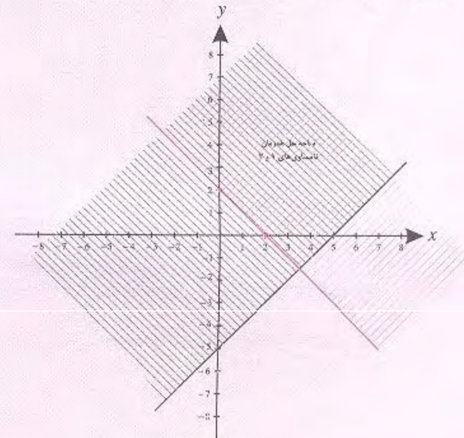
مبدأ $O(0,0)$

$x - y < 5$

$0 - 0 < 5$

$0 < 5$

در نتیجه نامساوی (2) به طرف مبدأ کمیات صدق می‌کند.



طوریکه در شکل ملاحظه می‌گردد، ساحه که به طور همزمـان توسـط دو نامساوی صدق نموده است و مخطط گردیده عبارت از حل همزمـان سیـستم نامساوات مذکور می‌باشد.

مثال چهارم: ساحه حل سیستم نامساوات دو مجهوله ذیل را دریابید.

$$\begin{cases} y - x < 2 \cdots (1) \\ x > 2 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

$y - x < 2$

$y - x = 2$

x	y
0	2
-2	0

مبدأ $O(0,0)$

$y - x < 2$

$0 - 0 < 2$

صحت دارد $0 < 2$

بناءً نامساوی (1) به طرف مبدأ کمیات صدق می‌کند.

$x > 2 \cdots (2)$

$x = 2$

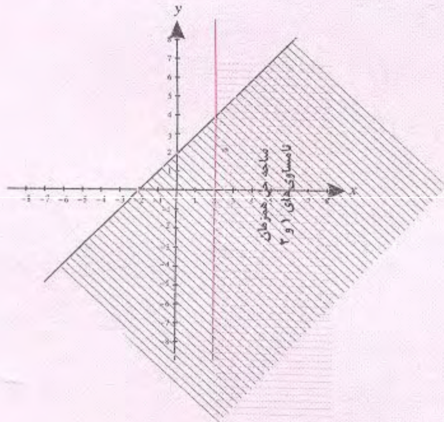
x	y
2	0
2	-1
2	$+2$

مبدأ $O(0,0)$

$x > 2$

صحت ندارد. $0 > 2$

در نتیجه ساحه حل نامساوی (2) به طرف مقابل مبدأ کمیات می‌باشد.



در نتیجه طوریکه در شکل ملاحظه می‌گردد ساحه که به طور همزمان توسط دو نامساوی صدق نموده و مخطط گردیده عبـارت از حـل همزمـان سیـستم نامساوات مذکور می‌باشد.

معادلات یک مجهوله درجه دوم
(Quadratic Equations in One Variable)

شکل عمومی ایـن نـوع معـادلات $ax^2 + bx + c = 0$ بـوده طوریکـه c, b ، $a \neq 0$ اعداد ثابت و x مجهول از درجه دوم می‌باشد. هر معادله درجه

دوم یک مجهوله دارای دو جذر x_1 , x_2 می‌باشد.

حالات خصوصی

۱. اگر $a=0$ باشد معادله مذکور به معادله یک مجهوله درجه اول $ax+b=0$ تبدیل گردیده که جذر آن $x=-\frac{c}{b}$ می‌باشد. و قبلاً معادلات یک مجهوله درجه اول را مطالعه نموده بودیم.

۲. اگر $b=0$ باشد، معادله مذکور به معادله یک مجهوله درجه دوم ناقص $ax^2+c=0$ تبدیل میگردد.

معادله مذکور زمانی دارای دو جذر حقیقی مساوی و مختلف‌الاشاره می‌باشد که a , c مختلف العلامه باشد. اما اگر a و c هم علامه باشند معادله مذکور دارای جذور حقیقی نمیباشند. (یعنی جذور آن موهومی می‌باشد)

۳. اگر $c=0$ باشد، معادله مذکور به معادله یک مجهوله درجه دوم $ax^2+bx=0$ تبدیل میگردد. که در این حالت یک جذر معادله $x_1=0$ و جذر دوم $x_2=-\frac{b}{a}$ می‌باشد.

مثال‌ها:

جذور معادلات ذیل را دریابید.

$\langle 1\rangle: 0\cdot x^2+5x-35=0$

$5x-35=0$

$5x=35$

$x=7$

$\langle 2\rangle: 4x^2-100=0$

$a=+4\ ,\ b=0\ ,\ c=-100$

چون a و c مختلف‌الاشاره اند معادله جذور حقیقی مساوی و مختلف‌الاشاره دارد، یعنی:

$4x^2-100=0$

$4x^2=100\ /:4$

$x^2=25$

$\sqrt{x^2}=\sqrt{25}$

$x=\pm 5$

$x_1=+5$

$x_2=-5$

$\langle 3\rangle: 3x^2+12=0$

$a=+3\ ,\ b=0\ ,\ c=+12$

چون a , c هم علامه اند پس معادله مذکور جذر حقیقی ندارد، یعنی:

$3x^2+12=0$

$3x^2=-12/:3$

$x^2=-4$

$\sqrt{x^2}=\sqrt{-4}$

$x=$ (جذر حقیقی ندارد)

$\langle 4\rangle: 7x^2+21x=0$

$a=+7\ ,\ b=+21\ ,\ c=0$

در این صورت:

$x_1=0$

$x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{21}{7}=-3$

$x_2=-3$

۱- حل معادلات یک مجهولهٔ درجه دوم به طریقه تجزیـه

(Solution of a Quadratic Equation by Factorization)

در این طریقه می‌توان با استفاده ار تجزیه پولینوم‌های الجبری که قبلاً آن را مطالعه نمودیم، معادلات مذکور را حل نمود.

مثال‌ها:

جذور معادلات ذیل را به کمک تجزیه دریابید:

$\langle 1 \rangle : x^2+5x-14=0$

$(x+7)(x-2)=0$

$x+7=0 \quad x-2=0$

$x_1=-7 \quad x_2=+2$

$\langle 2 \rangle : y^2-13y+30=0$

$(y-10)(y-3)=0$

$y-10=0$ و $y-3=0$

$y_1=10 \quad y_2=3$

$\langle 3 \rangle : m^2-m-30=0$

$(m-6)(m+5)=0$

$m-6=0$ و $m+5=0$

$m_1=+6 \quad m_2=-5$

$\langle 4 \rangle : 2x^2-5x+3=0$

$(2x-3)(x-1)=0$

$2x-3=0$ و $x-1=0$

$2x=3 \quad x_2=+1$

$x_1=\frac{3}{2}$

ویا $7x^2+21x=0$

$x(7x+21)=0$

$x=0 \;,\; 7x+21=0$

$x_1=0$

$7x=-21/:7$

$x=-\frac{21}{7}$

$x_2=-3$

$\langle 5 \rangle : 2x^2-7x=0$

$x(2x-7)=0$

$x_1=0$

$2x-7=0$

$2x=7/:2$

$x_2=\frac{7}{2}$

ویا $2x^2-7x=0$

$a=+2, b=-7, c=0$

در اینصورت $x_1=0$

$x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-7}{2}=+\frac{7}{2}$

$x_2=\frac{7}{2}$

حل معادلات یک مجهوله درجه دوم

Solution of Quadratic Equations

بطور عموم می‌توان معادلات یـک مجهولـهٔ درجـه دوم را بـه دو طریقـه (تجزیه و فورمول) حل نمود که ذیلاً آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

$\langle 5 \rangle : 3x^2 + 2x - 5 = 0$

$$(3x+5)(x-1) = 0$$

$3x+5=0$ و $x-1=0$

$3x = -5 \qquad x_2 = +1$

$$x_1 = -\frac{5}{3}$$

$\langle 6 \rangle : x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\frac{4}{2} = 2 \xrightarrow{(\ )^2} 4$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + 1 = 0$$

$$(x-2)^2 - 3 = 0$$

$$(x-2)^2 = 3$$

$$\sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{3}$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{3}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

$\langle 7 \rangle : 2y^2 + 6y - 5 = 0$

$$2y^2 + 6y - 5 = 0 / : 2$$

$$y^2 + 3y - \frac{5}{2} = 0$$

$$\frac{3}{2} \xrightarrow{(\ )^2} \frac{9}{4}$$

$$y^2 + 3y + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - \frac{5}{2} = 0$$

$$\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{5}{2}$$

$$\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9+10}{4}$$

$$\sqrt{\left(y + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{19}{4}}$$

$$y + \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{19}}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}$$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{19}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-3 + \sqrt{19}}{2} \qquad y_2 = \frac{-3 - \sqrt{19}}{2}$$

۲-حل معادلات یک مجهوله درجه دوم به طریقه فورمول
(Solving Quadratic Equations by Formula)

جهت حل معادلات یک مجهوله درجـه دوم بـصورت عمـوم مـی‌تـوان از فورمول محمد ابن موسی خوارزمی استفاده نموده و جذور معادلات درجـه دوم

را دریافت نمود که فورمول فوق چنین دریافت می‌گردد.

چون $a \neq 0$ است، پس: $ax^2 + bc + c = 0 / : a$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\frac{b}{a} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \frac{b}{2a} \xrightarrow{(\ )^2} \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdots\cdots (1)$$

برای سهولت در اجرای عملیات الجبری هرگـاه $\Delta = b^2 - 4ac$ وضـع گردد، پس فورمول (1) شکل ذیل را به خود می‌گیرد.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \cdots\cdots\cdots\cdots \ (2)$$

نــصف فورمــول: هرگــاه در معادلــه درجــه دوم یــک مجهولــه $ax^2 + bx + c = 0$ ضریب حد وسـط b جفـت باشـد، مـی‌تـوان از نـصف فورمول نیز چنین استفاده نمود.

$$b' = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 2b'$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}$$

$$= \frac{2\left(-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}\right)}{2a}$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \cdots\cdots (3)$$

جهت سهولت اجرای عملیات الجبری $\Delta' = b'^2 - ac$ وضع گردد، داریم:

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \cdots\cdots\cdots\cdots \ (4)$$

مناقشه

چون موجودیت و تعداد جذور معادلهٔ درجه دوم یـک مجهولـه مربـوط بـه قیمت‌هـای $\Delta = b^2 - 4ac$ مـی‌باشـد کـه بـه نـام قاسـمه (تمیزکننـده یـا Discriminant) یاد می‌گردد بناءً نظر به فورمول (2) سه حالت ذیـل وجـود دارد:

۱. هرگاه $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو جذر حقیقی مختلف می‌باشد کـه جـذور

آن عبارت از $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ می‌باشد.

۲. هرگــاه $\Delta = 0$ معادلــه دارای دو جــذر حقیقــی مــساوی (مــضاعف) می‌باشد که جذور آن عبارت از:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

۳. هرگاه $\Delta < 0$ باشد در این حالت قیمت تحت جذر یک عــدد منفــی می‌گردد و در ساحه اعداد حقیقی دارای قیمت نمی‌باشد و یا به عبــاره دیگر جذور معادله موهومی (مختلط) می‌گردد.

مثال‌ها:

جذور معادلات درجه دوم ذیل را به طریقه فورمول دریابید:

$\langle 1 \rangle : 3x^2 + 4x - 4 = 0$

$a = +3\ ,\ b = +4\ ,\ c = -4$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (+4)^2 - 4(+3)(-4)$

$\Delta = +16 + 48$

$\Delta = +64$

$\Delta > 0$ معادله دارای دو جذر حقیقی مختلف می‌باشد:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm 8}{6}$$

$$x_1 = \frac{-4+8}{6} = \frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{-4-8}{6} = -2$$

همچنان می‌توان معادله مذکور را با اســتفاده از نــصف فورمــول نیــز حــل نمود، زیرا حد وسط (b) یک عدد جفت می‌باشد.

$3x^2 + 4x - 4 = 0$

$a = 3\ ,\ b = +4\ ,\ c = -4$

$b' = \dfrac{b}{2} \Rightarrow b' = \dfrac{+4}{2} \Rightarrow b' = +2$

$\Delta' = b'^2 - ac \Rightarrow \Delta' = (+2)^2 - (3)(-4) \Rightarrow \Delta' = +4 + 12$

$\Rightarrow \Delta' = +16$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{3} = \frac{-2 \pm 4}{3}$$

$$x_1 = \frac{-2+4}{3} = \frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{-2-4}{3} = -2$$

$\langle 2 \rangle : x^2 - 10x + 25 = 0$

$a = 1\ ,\ b = -10\ ,\ c = +25$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-10)^2 - 4(1)(+25) = +100 - 100$

$\Delta = 0$ معادله دارای دو جذر حقیقی مساوی (مضاعف) می‌باشد.

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = +\frac{10}{2} = +5$$

$x_1 = +5 \quad , \quad x_2 = +5$

$\langle 3 \rangle : 2x^2 - 5x + 1 = 0$

$a = 2\ ,\ b = -5\ ,\ c = +1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(+1) = +25 - 8 = +17$

$\Delta > 0$ معادله دو جذر حقیقی مختلف دارد.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+5 \pm \sqrt{17}}{2 \cdot 2} = \frac{+5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$x_1 = \frac{+5+\sqrt{17}}{4} \qquad x_2 = \frac{+5-\sqrt{17}}{4}$$

$\langle 4 \rangle : x^2 - 6x + 13 = 0$

$a = 1 \, , \, b = -6 \, , \, c = +13$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4(1)(+13) \Rightarrow \Delta = +36 - 52$

$\Delta = -16$

چون $\Delta < 0$ است، بناءً معادله مذکور دارای جذور حقیقی نمی‌باشد و یا به عباره دیگر دارای دو جذر موهومی (مختلط) می‌باشد.

حل معادله یک مجهوله درجه دوم در ساحه اعداد مختلط

طوریکه ذکر نمودیم در صورتیکه $\Delta < 0$ باشد معادله در ست اعداد حقیقی دارای حل نمی‌باشد، اما در ساحه اعداد مختلط دارای حل می‌باشد، که با درنظرداشت اعداد مختلط که قبلاً در فصل دوم مطالعه نمودیم به حل آنها می‌پردازیم.

مثال‌ها: معادلات درجه دوم یک مجهوله ذیل را حل نمایید:

مثال ۱: $x^2 - 6x + 13 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(13) = 36 - 52 = -16$

$\Delta < 0$ معادله دو جذر مختلط دارد.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+6 \pm \sqrt{-16}}{2(1)} = \frac{+6 \pm 4i}{2} = \frac{2(3 \pm 2i)}{2}$$

$x_1 = 3 + 2i$ و $x_2 = 3 - 2i$

مثال ۲: $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 65 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(\frac{1}{2})(65) = 9 - 130$

$\Delta = -121 \Rightarrow \Delta < 0$ معادله دو جذر مختلط دارد.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{-121}}{2(\frac{1}{2})} = \frac{-3 \pm 11i}{1}$$

$x = -3 \pm 11i$

$x_1 = -3 + 11i$ و $x_2 = -3 - 11i$

مثال ۳: $x^2 + \sqrt{-9}x - 2 = 0$

$x^2 + \sqrt{-9}x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 3ix - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (3i)^2 - 4(1)(-2) = 9i^2 + 8$

$\Delta = 9(-1) + 8 = -9 + 8 = -1 \Rightarrow \Delta = -1$

$\Delta < 0$ معادله دو جذر موهومی دارد.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3i \pm \sqrt{-1}}{2(1)} = \frac{-3i \pm i}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3i + i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$x_2 = \frac{-3i - i}{2} = \frac{-4i}{2} = -2i$$

معادلات که به معادله درجه دوم یک مجهوله قابل تبدیل اند

بعضی از معادلاتی وجود دارد که بلندتر از درجه دوم و یا پایین‌تر از درجه دوم قرار دارند که می‌توان آن را به معادله درجه دوم تبدیل نموده و جذور آن را دریافت نمود.

مثال‌ها:

جذور معادلات ذیل را دریابید.

$\langle 1 \rangle : x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$

$x + 4 = 5\sqrt{x} \Rightarrow (x+4)^2 = (5\sqrt{x})^2$

$x^2 + 8x + 16 = 25x$

$x^2 + 8x - 25x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 17x + 16 = 0$

$(x-1)(x-16) = 0$

$x - 1 = 0 \quad , \quad x - 16 = 0$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 16$

ویا $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$

اگر $x = y^2$

$y^2 - 5\sqrt{y^2} + 4 = 0$

$y^2 - 5y + 4 = 0$

$1 \quad 4$

$(y-1)(y-4) = 0$

$y - 1 = 0$ و $y - 4 = 0$

$y_1 = 1 \qquad y_2 = 4$

$x = y^2$

$x_1 = (1)^2$ و $x_2 = (4)^2$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 16$

$\langle 2 \rangle : \sqrt{x+1} + \sqrt{4x-3} = 5$

$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{4x-3}\right)^2$

$x + 1 = 25 - 10\sqrt{4x-3} + 4x - 3$

$-3x - 21 = -10\sqrt{4x-3} / \cdot -1$

$(3x+21)^2 = \left(10\sqrt{4x-3}\right)^2$

$9x^2 + 126x + 441 = 100(4x-3)$

$9x^2 + 126x + 441 = 400x - 300$

$9x^2 + 126x + 441 - 400x + 300 = 0$

$9x^2 - 274x + 741 = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac$

$\Delta' = (-137)^2 - 9(741)$

$\Delta' = 18769 - 6669$

$\Delta' = 12100$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

$$x = \frac{+137 \pm \sqrt{12100}}{9}$$

$$x_1 = \frac{+137 + 110}{9} = \frac{+247}{9} = 27,\bar{4}$$

$$x_2 = \frac{+137 - 110}{9} = \frac{+27}{9} = 3$$

$\langle 3 \rangle : \sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} - 1 = 0$

$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2 = \left(\sqrt{x-1} + 1\right)^2$

$2x - 1 = x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1$

$2x - 1 - x = 2\sqrt{x-1}$

$(x-1)^2 = \left(2\sqrt{x-1}\right)^2$

$x^2 - 2x + 1 = 4(x-1)$

$x^2 - 2x + 1 - 4x + 4 = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x-1)(x-5) = 0$

$x-1=0\ ,\quad x-5=0$

$x_1=1 \qquad x_2=5$

$\langle 4\rangle : 5^{2x}-6\cdot 5^x+5=0$

$(5^x)^2-6\cdot 5^x+5=0$

اگر $y=5^x$

$y^2-6y+5=0$

$(y-1)(y-5)=0$

$y-1=0$ و $y-5=0$

$y=1 \qquad y=5$

$5^x=1 \qquad 5^x=5^1$

$5^x=5^0 \qquad x_2=1$

$x_1=0$

$\langle 5\rangle : 3^{2x+1}-82\cdot 3^x+27=0$

$3^{2x}\cdot 3^1-82\cdot 3^x+27=0$

$3(3^x)^2-82\cdot 3^x+27=0$

$y=3^x \Rightarrow 3y^2-82y+27=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-82)^2-4(3)(27)$

$\Delta=+6724-324$

$\Delta=6400$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+82\pm\sqrt{6400}}{2\cdot 3}=\frac{+82\pm 80}{6}$$

$$y_1=\frac{+82+80}{6}=\frac{+162}{6}=27 \quad \Rightarrow y_1=27$$

$$y_2=\frac{+82-80}{6}=\frac{+2}{6}=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow y_2=\frac{1}{3}$$

$y=27$	$y=\frac{1}{3}$
$3^x=27$	$3^x=\frac{1}{3}$
$3^x=3^3$	$3^x=3^{-1}$
$x_1=3$	$x_2=-1$

$\langle 6\rangle : 2^{2x+5}+28\cdot 2^x-4=0$

$2^{2x}\cdot 2^5+28\cdot 2^x-4=0$

$32\cdot(2^x)^2+28\cdot 2^x-4=0$

$y=2^x$

$32y^2+28y-4=0$

$32y$	$+1$	$=$	$+32y$
y	-4	$=$	$-4y$
			$+28y$

$(32y-4)(y+1)=0$

$32y-4=0 \qquad y+1=0$

$32y=4 \qquad y_2=-1$

$y_1=\frac{4}{32}$

$y_1=\frac{1}{8}$

$y=2^x$

$y=\frac{1}{8}$	$y=-1$
$2^x=\frac{1}{8}$	$2^x=-1$
$2^x=\frac{1}{2^3}$	امکان ندارد
$2^x=2^{-3}$	
$x=-3$	

$\langle 7\rangle : 2x^3 - 5x^2 - 7x = 0$

$x(2x^2 - 5x - 7) = 0$

$x_1 = 0\ ,\ 2x^2 - 5x - 7 = 0$

$2x \quad +1 \quad = \quad +2x$

$x \quad -7 \quad = \quad -7x$

$\overline{-5x}$

$(2x-7)(x+1) = 0$

$2x - 7 = 0$ و $x + 1 = 0$

$2x = 7 \qquad x_3 = -1$

$x_2 = \frac{7}{2}$

$\langle 8\rangle : 3x^3 + 5x^2 - 3x - 5 = 0$

$x^2(3x+5) - (3x+5) = 0$

$(3x+5)(x^2 - 1) = 0$

$3x + 5 = 0$ و $x^2 - 1 = 0$

$3x = -5 \qquad x^2 = 1$

$x_1 = -\frac{5}{3} \qquad x = \pm 1$

$x_2 = 1 \qquad x_3 = -1$

$\langle 9\rangle : x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$

$x^2(x+1) + 4(x+1) = 0$

$(x+1)(x^2+4) = 0$

$x + 1 = 0 \qquad x^2 + 4 = 0$

$x_1 = -1$ جذر حقیقی ندارد

$\langle 10\rangle : x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0$

$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$

$x^2 - 1 = 0 \qquad x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 1$ و $x^2 = 4$

$x = \pm 1 \qquad x = \pm 2$

$x_1 = +1 \qquad x_3 = +2$

$x_2 = -1 \qquad x_4 = -2$

$\langle 11\rangle : 2x^4 - 48x^2 - 50 = 0$

$2(x^2)^2 - 48x^2 - 50 = 0/;2 \Rightarrow (x^2)^2 - 24x^2 - 25 = 0$

$(x^2 - 25)(x^2 + 1) = 0$

$x^2 + 1 = 0$ جذر حقیقی ندارد

$x^2 - 25 = 0$

$x^2 = 25$

$x = \pm 5$

$\langle 12\rangle : x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

$(x^2)^2 + 13x^2 + 36 = 0$

$(x^2 + 4)(x^2 + 9) = 0$

$x^2 + 9 = 0$ و $x^2 + 4 = 0$ جذر حقیقی ندارد.

تعیین اشاره جذور معادلات یک مجهوله درجه دوم

در صورتیکه معادله درجه دوم یک مجهولـه $ax^2 + bx + c = 0$ دارای جذور حقیقی باشد. یعنی $\Delta \geq 0$ باشد می‌توان اشاره جذور معادلات مذکور را به دو روش ذیل تعیین (پیشگویی) نمود.

۱- تعیین اشاره جذور معادلات درجه دوم بطریقه دیکارت:

در این روش با استفاده از تحول علامه حدود معادله درجه دوم سه حالـت ذیل را در نظر می‌گیریم:

الف: هرگاه بین حدود معادله هیچ تحول علامـه نباشـد، معادلـه دارای دو جذر هم اشاره منفی می‌باشد.

ب: هرگاه بین حدود معادله یک تحول علامه باشد، معادله دارای دو جذر مختلف‌الاشاره می‌باشد.

ج: هرگاه بین حدود معادله دو تحول علامه وجـود داشـته باشـد، معادلـه دارای دو جذر هم اشاره مثبت می‌باشد.

مثال‌ها:

اشاره جذور معادلات درجه دوم یک مجهولـه ذیـل را بـدون حـل تعیـین نمایید.

$\langle 1 \rangle : x^2 + 5x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 = 21 > 0$ دو جذر حقیقی دارد

چون بین حدود معادله هیچ تحول (تغییر) علامه دیـده نمـی‌شـود معادلـه دارای دو جذر هم اشاره منفی می‌باشد.

$\langle 2 \rangle : -3x^2 - 5x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = +1 > 0$ دو جذر حقیقی دارد.

چون بین حدود معادله هیچ تحول (تغییر) علامه ملاحظه نمی‌شود. معادله دو جذر هم اشاره منفی دارد.

$\langle 3 \rangle : 5x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 20 = 24 > 0$ دو جذر حقیقی دارد

چون بین حدود معادله یک تحول (تغییر) علامه ملاحظه مـی‌گـردد، بنـاءً معادله دو جذر مختلف‌الاشاره دارد.

$\langle 4 \rangle : -2x^2 + 7x + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 40 = 89 > 0$ دو جذر حقیقی دارد

چون بین حدود معادله یک تحول (تغییر) علامه وجود دارد، بناءً معادله دو جذر مختلف‌الاشاره دارد.

$\langle 5 \rangle : x^2 - 7x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4 = 45 > 0$ دو جذر حقیقی دارد

چون بین حدود معادله دو تحول (تغییر) علامه وجود دارد، بنـاءً معادلـه دو جذر هم علامه مثبت دارد.

$\langle 6 \rangle : -4x^2 + 4x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = +16 - 16 = 0$ دو جذر حقیقی دارد.

چون بین حدود معادله دو تحول (تغییر) علامه دیده می‌شود، بنـاءً معادلـه مذکور دارای دو جذر هم علامه مثبت می‌باشد.

$\langle 7 \rangle : -x^2 + 5x - 8 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (+5)^2 - 4(-1)(-8) = 25 - 32 = -7 < 0$

چون معادلـه جـذر حقیقـی نـدارد بنـاءً اشـاره جـذور آن را تعیـین نمـوده نمی‌توانیم.

۲- تعیین اشاره جـذور معـادلات درجـه دوم بـه طریقـه نـسبت ضرایب معادله

جهـت تعیـین اشـاره جـذور معادلـه درجـه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ بـا استفاده از نسبت ضرایب ثابت معادله یعنی a، b و c اولاً نسبت $\frac{c}{a}$ را تشکیل داده سه حالت ذیل وجود دارد:

حالت اول: هرگاه $\frac{c}{a} > 0$ باشد در این صورت معادله دارای دو جذر هم علامه می‌باشد.

برای این که بدانیم همین دو جذر هم علامه مثبت است یا منفی نـسبت $-\frac{b}{a}$ را تشکیل می‌دهیم، که دو امکان ذیل موجود است:

۱- هرگاه $-\frac{b}{a} > 0$ باشد معادله دو جذر هم علامه مثبت دارد.

۲- هرگاه $-\frac{b}{a} < 0$ باشد معادله دو جذر هم علامه منفی دارد.

حالت دوم: هرگـاه $\frac{c}{a} < 0$ باشـد در اینـصورت معادلـه دارای دو جـذر مختلف‌الاشاره می‌باشد و برای این که بدانیم کدام جذر دارای علامه مثبـت و کدام جذر علامه منفی دارد نسبت $-\frac{b}{a}$ را تـشکیل داده و سـه امکـان ذیـل موجود است.

۱- هرگاه $-\frac{b}{a} > 0$ باشد جذر بزرگ معادله دارای اشـاره مثبـت و جـذر کوچک دارای اشاره منفی می‌باشد.

۲- هرگاه $-\frac{b}{a} < 0$ باشد جذر بزرگ معادله دارای اشـاره منفـی و جـذر کوچک آن علامه مثبت دارد.

۳- هرگاه $-\frac{b}{a} = 0$ باشد معادله دو جذر مساوی مختلف‌الاشاره دارد.

حالت سوم: هرگاه $\frac{c}{a} = 0$ باشد، در اینصورت یک جذر معادله بی‌اشاره بوده یعنی $x_1 = 0$ و اشاره جذر دوم معادله مربوط $-\frac{b}{a}$ می‌باشـد کـه سـه امکان ذیل وجود دارد.

۱- هرگاه $-\frac{b}{a} > 0$ باشد، جذر دوم آن اشاره مثبت دارد.

۲- هرگاه $-\frac{b}{a} < 0$ باشد، جذر دوم آن اشاره منفی دارد.

۳- هرگاه $-\frac{b}{a} = 0$ باشد، جذر دوم آن نیز بـی‌اشـاره مـی‌باشـد، یعنـی $(x_2 = 0)$.

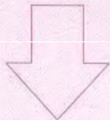
موضوع فوق را توسط جدول ذیل می‌توان خلاصه نمود:

$ax^2+bx+c=0$ $\quad a\neq 0$

و معادله دارای دو جذر حقیقی باشد $\quad \Delta \geq 0$

(1) $\dfrac{c}{a}>0$

معادله دو جذر هم علامه دارد.



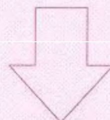
$-\dfrac{b}{a}$

① $-\dfrac{b}{a}>0$ دو جذر مثبت

② $-\dfrac{b}{a}<0$ دو جذر منفی

(2) $\dfrac{c}{a}<0$

معادله دو جذر مختلف‌العلامه دارد.



$-\dfrac{b}{a}$

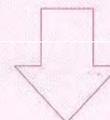
① $-\dfrac{b}{a}>0$ جذر بزرگ + جذر کوچک −

② $-\dfrac{b}{a}<0$ جذر بزرگ − جذر کوچک +

③ $-\dfrac{b}{a}=0$ دو جذر مساوی مختلف‌الاشاره

(3) $\dfrac{c}{a}=0$

یک جذر معادله بی‌اشاره $x_1=0$



$-\dfrac{b}{a}$

① $-\dfrac{b}{a}>0$ جذر دوم مثبت

② $-\dfrac{b}{a}<0$ جذر دوم منفی

③ $-\dfrac{b}{a}=0$ جذر دوم بی‌اشاره

مثال‌ها: جذور معادلات درجه دوم ذیل را تعیین نمایید.

$\langle 1 \rangle : 2x^2 - 5x + 1 = 0$

$\Delta = 25 - 8 = 17 > 0$ جذر حقیقی دارد.

$\frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0$ معادله دو جذر هم علامه دارد.

$-\frac{b}{a} = \frac{+5}{2} > 0$ معادله دو جذر هم اشاره مثبت دارد.

$\langle 2 \rangle : x^2 + 8x + 3 = 0$

$\Delta = 64 - 12 = 52 > 0$ جذر حقیقی دارد.

$\frac{c}{a} = \frac{3}{1} = +3 > 0$ معادله دو جذر هم علامه دارد.

$-\frac{b}{a} = -\frac{8}{1} = -8 < 0$ معادله دو جذر هم اشاره منفی دارد.

$\langle 3 \rangle : x^2 + 25 = 0$

$\Delta = 0 - 100 = -100 < 0$ معادله جذر حقیقی ندارد.

بناءً اشاره جذور آن را تعیین نموده نمی‌توانیم.

$\langle 4 \rangle : 2x^2 + 3x - 5 = 0$

$\Delta = 9 + 40 = 49 > 0$ دو جذر حقیقی دارد.

$\frac{c}{a} = \frac{-5}{2} < 0$ معادله دو جذر مختلف‌العلامه دارد.

$-\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} < 0$ جذر بزرگ معادله اشاره منفی

جذر کوچک معادله اشاره مثبت دارد.

$\langle 5 \rangle : 3x^2 - 7x - 2 = 0$

$\Delta = 49 + 24 = 73 > 0$ دو جذر حقیقی دارد.

$\frac{c}{a} = \frac{-2}{3} < 0$ معادله دو جذر مختلف‌العلامه دارد.

جذر بزرگ معادله اشاره مثبت جذر کوچک اشاره منفی دارد.

$-\frac{b}{a} = \frac{+7}{3} > 0$

$\langle 6 \rangle : 7x^2 - 28 = 0$

$\Delta = 0 + 784 \Rightarrow \Delta = +784 > 0$ معادله دو جذر حقیقی دارد.

$\frac{c}{a} = \frac{-28}{7} = -4 < 0$ معادله دو جذر مختلف‌العلامه دارد.

$-\frac{b}{a} = \frac{0}{7} = 0$ جذور معادله مساوی مختلف‌الاشاره است.

$\langle 7 \rangle : x^2 + 5x = 0$

$\Delta = 25 - 0 = 25 > 0$ معادله دو جذر حقیقی دارد.

$\frac{c}{a} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ یک جذر معادله بی‌اشاره است، یعنی:

$-\frac{b}{a} = -\frac{5}{1} = -5 < 0$ جذر دوم آن منفی است.

$\langle 8 \rangle : 3x^2 - 33x = 0$

$\Delta = 1089 - 0 = 1089 > 0$ معادله دو جذر حقیقی دارد.

$\frac{c}{a} = \frac{0}{3} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ یک جذر معادله بی‌اشاره است، یعنی:

$-\frac{b}{a} = \frac{+33}{3} = +11 > 0$ جذر دوم آن مثبت است.

$\langle 9 \rangle : 2x^2 = 0$

$\Delta = 0 - 0 = 0$ معادله دو جذر حقیقی دارد.

$\frac{c}{a} = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ یک جذر معادله بی‌اشاره است، یعنی:

$-\frac{b}{a} = \frac{0}{2} = 0$ جذر دوم آن نیز بی‌اشاره است، یعنی $x_2 = 0$ می‌باشد.

رابطه بین جذر معادلات یک مجهولهٔ درجه دوم بـــا ضـــرایب آن

معادله درجه دوم یک مجهولهٔ $ax^2+bx+c=0$ (در حالیکه $a\neq 0$ بوده) را در نظر گرفته و معادله مذکور دارای جذور حقیقی باشد یعنـی $\Delta \geq 0$ در اینصورت رابطه بین جذور معادله مذکور x_1 و x_2 و ضرایب ثابت یعنی a و b و c قرار ذیل اند:

1- حاصل‌جمع جذور معادله $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$

چون می‌دانیم که: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ می‌باشد.

بناءً:

$$S=x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$=\frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

2- حاصل‌ضرب جذور معادله: $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$

چون می‌دانیم که: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ می‌باشد،

بناءً:

$$P=x_1\cdot x_2=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

بخاطر داشته باشید که حاصل‌جمع و حاصـل‌ضـرب جـذور معادلـه یعنـی $S=-\dfrac{b}{a}$ و $P=\dfrac{c}{a}$ را به نام قضیه ویت (یک عالم فرانسوی می‌باشد) یاد می‌نمایند.

3- حاصل تفریق جذور: $x_1-x_2=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}$

چون می‌دانیم که: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ می‌باشد،

بناءً:

$$x_1-x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}+b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$=\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x_1-x_2=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

4- حاصل‌جمع معکوس جذور: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=-\dfrac{b}{c}$

چون نظر به حالت (1) و (2) می‌دانیم که: $S=-\dfrac{b}{a}$ و $P=\dfrac{c}{a}$ بناءً:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_2\cdot x_1}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}$$

5- حاصل‌جمع مربعات جذور: $x_1^2+x_2^2=S^2-2P$

$$\left(x_1+x_2\right)^2=x_1^2+2x_1\cdot x_2+x_2^2$$

چون می‌دانیم که: $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1\cdot x_2$

$$x_1^2+x_2^2=S^2-2P$$

6- حاصل‌جمع مکعبات جذور: $x_1^3+x_2^3=S^3-3PS$

چون می‌دانیم که:

$$\left(x_1+x_2\right)^3=x_1^3+3x_1^2\cdot x_2+3x_1\cdot x_2^2+x_2^3$$

$$x_1^3+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1\cdot x_2\left(x_1+x_2\right)$$

$$x_1^3+x_2^3=S^3-3PS$$

مثال‌ها:

مثـال ۱: حاصــل‌جمــع و حاصــل‌ضــرب جــذور معادلــه درجــه دوم $3x^2+5x-7=0$ را دریابید؟

$$\Delta = b^2-4ac \quad\Big|\quad S = x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \quad p = x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\Delta = 25-4(3)(-7) \quad\Big|\quad S = x_1+x = -\frac{5}{3} \quad P = x_1\cdot x_2 = -\frac{7}{3}$$

$$\Delta = 25+84$$

$\Delta = 109 > 0$ معادله دو جذر حقیقی دارد

مثال ۲: حاصل‌جمع معکـوس جـذور معادلـه $2x^2-21x-7=0$ را دریابید؟

$$\Delta = b^2-4ac = (-21)^2-4(2)(-7) = 441+56 = 497\rangle 0$$

دو جذر حقیقی دارد.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = +\frac{21}{-7} = -3$$

مثال ۳: حاصل تفریق جذور معادله $x^2+5x-24=0$ را دریابید؟

دو جذر حقیقی دارد

$$\Delta = b^2-4ac = (+5)^2-4(1)(-24) = +25+96 = 121\rangle 0$$

$$x_1-x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{121}}{1} = \frac{11}{1} = 11$$

مثـال ۴: حاصــل جمــع مربعــات جــذور معادلــه درجــه دوم $2x^2+x-15=0$ را دریابید؟

$$\Delta = b^2-4ac = (+1)^2-4(2)(-15) = +1+120 = +121\rangle 0$$

دو جذر حقیقی دارد.

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{1}{2}$$

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{-15}{2}$$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2 = S^2-2P$$

$$x_1^2+x_2^2 = (-\frac{1}{2})^2-2(-\frac{15}{2})$$

$$x_1^2+x_2^2 = +\frac{1}{4}+15$$

$$x_1^2+x_2^2 = +\frac{61}{4}$$

مثـــال ۵: حاصـــل‌جمـــع مکعبـــات جـــذور معادلـــه درجـــه دوم $x^2+4x-21=0$ را دریابید؟

$$\Delta = b^2-4ac = (+4)^2-4(1)(-21) = +16+84 = 100\rangle 0$$

دو جذر حقیقی دارد.

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4$$

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{21}{1} = -21$$

$$\Rightarrow x_1^3+x_2^3 = S^3-3PS$$

$$x_1^3+x_2^3 = (-4)^3-3(-21)(-4)$$

$$x_1^3+x_2^3 = -64-252 \Rightarrow x_1^3+x_2^3 = -316$$

تشکیل معادله یک مجهوله درجه دوم

هرگـاه جـذور معادلـه درجـه دوم یعنـی x_1 و x_2 و یـا حاصـل جمـع و حاصل‌ضرب جذور معادله یعنی S و P معلوم باشد می‌توان معادله یک مجهوله درجه دوم را چنین تشکیل نمود.

$$ax^2+bx+c=0 \ , \ \ a\neq 0$$

$$ax^2+bx+c=0/:a$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2-\left[-\frac{b}{a}\right]x+\frac{c}{a}=0$$

$x^2-Sx+P=0$ و یا $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$

همچنان:

$$x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1\cdot x_2=0$$

$$x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=0$$

$$\Rightarrow (x-x_1)(x-x_2)=0$$

مثال‌ها:

مثال ۱: هرگاه جذر یک معادله یـک مجهولـه درجـه دوم 7- و 4+ باشـد معادله آن را دریابید؟

$$\left.\begin{matrix}x_1=-7\\ x_2=+4\end{matrix}\right\}\Rightarrow x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$$

$$x^2-(-7+4)x+(-7)(+4)=0$$

$$x^2+3x-28=0$$

و یا

$$S=x_1+x_2=(-7)+(4)=-3$$

$$P=x_1\cdot x_2=(-7)(+4)=-28$$

$$x^2-Sx+P=0$$

$$x^2-(-3)x+(-28)=0$$

$$x^2+3x-28=0$$

مثال ۲: هرگاه جذور یـک معادلـه یـک مجهولـه درجـه دوم $3+\sqrt{5}$ و $3-\sqrt{5}$ باشد معادله آن را دریابید:

$$S=x_1+x_2=3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}=+6\Rightarrow S=+6$$

$$P=x_1\cdot x_2=(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=9-5=+4\Rightarrow P=+4$$

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-(+6)x+(+4)=0$$

$$x^2-6x+4=0$$

مثـال ۳: هرگـاه یـک جـذر معادلـه یـک مجهولـه درجـه دوم 8+ و حاصل‌ضرب جذور آن 12- باشد معادله آن را دریابید؟

$$x_1=+8$$

$$P=-12\Rightarrow x_1\cdot x_2=-12\Rightarrow (+8)\cdot x_2=-12$$

$$\Rightarrow x_2=\frac{-12}{+8}\Rightarrow x_2=-\frac{3}{2}$$

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$$

$$x^2-\left[+8-\frac{3}{2}\right]x+(+8)\left[-\frac{3}{2}\right]=0$$

$$x^2-\left[+\frac{13}{2}\right]x-12=0/\cdot 2$$

$$2x^2-13x-24=0$$

مثال ۴: هرگاه حاصل‌جمع جذور یک معادله یک مجهوله درجه دوم 5+ و حاصل‌جمع مربعات آن 13+ باشد معادله آن را دریابید؟

$$S=x_1+x_2=+5$$

$$x_1^2+x_2^2=+13$$

چون:

$$\left.\begin{matrix}x_1^2+x_2^2=S^2-2P\\ +13=(+5)^2-2P\\ +13=+25-2P\\ 2P=+25-13\\ 2P=+12\\ P=+6\end{matrix}\right\}\begin{matrix}x^2-Sx+P=0\\ x^2-(+5)+(+6)=0\\ x^2-5x+6=0\end{matrix}$$

مثال ۵: هرگاه حاصل‌جمع دو عدد (-3) و حاصل‌جمع مکعبات شان -117 گردد اعداد را دریابید؟

x_1 عدد اول

x_2 عدد دوم

$$S = x_1 + x_2 = -3$$

$$x_1^3 + x_2^3 = -117$$

چون می‌دانیم که: $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$

$$-117 = (-3)^3 - 3P(-3)$$

$$-117 = -27 + 9P$$

$$9P = -117 + 27$$

$$9P = -90 \Rightarrow P = -10$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$(x+5)(x-2) = 0$$

$x + 5 = 0$ و $x - 2 = 0$

$x_1 = -5$ عدد اول ، $x_2 = 2$ عدد دوم

یادداشت:

I. جهت دریافت معادله یک مجهوله درجه دوم که جذور آن m چند جذور معادله $ax^2 + bx + c = 0$ می‌توان چنین نوشت:

$x_1' = mx_1$
$x_2' = mx_2$ جذور معادله جدید:

$$\Rightarrow x^2 - (x_1' + x_2')x + x_1' \cdot x_2' = 0$$

$$x^2 - (mx_1 + mx_2)x + (mx_1)(mx_2) = 0$$

$$x^2 - m(x_1 + x_2)x + m^2 \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - m(-\frac{b}{a})x + m^2(\frac{c}{a}) = 0 /\cdot a$$

$$\boxed{ax^2 + mbx + m^2c = 0}$$

مثال: معادله یک مجهوله درجه دوم را دریابید که جذور آن پنج چند جذور معادله یک مجهوله درجه دوم $2x^2 - 5x - 3 = 0$ باشد.

$$a = 2\ ,\ b = -5\ ,\ c = -3$$

$$m = 5$$

$$\Rightarrow ax^2 + mbx + m^2c = 0$$

$$2x^2 + 5 \cdot (-5)x + 5^2 \cdot (-3) = 0$$

$$2x^2 - 25x - 75 = 0$$

II. جهت دریافت معادله یک مجهوله درجه دوم که جذور آن معکوس جذور معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد می‌توان چنین نوشت:

$$x_1' = \frac{1}{x_1}$$

جذور معادله جدید

$$x_2' = \frac{1}{x_2}$$

$$x^2 - (x_1' + x_2')x + x_1' \cdot x_2' = 0$$

$$x^2 - (\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2})x + (\frac{1}{x_1})(\frac{1}{x_2}) = 0$$

$$x^2 - (\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2})x + \frac{1}{x_1 \cdot x_2} = 0$$

$$x^2 - (\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}})x + \frac{1}{c} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0 /\cdot c$$

$$cx^2 + bx + a = 0$$

مثال: معادله یک مجهوله درجه دوم را دریابید که جذور آن معکوس جذور معادله $5x^2 + 17x - 3 = 0$ باشد.

$$\Rightarrow -3x^2 + 17x + 5 = 0 /\cdot -1$$

$$3x^2 - 17x - 5 = 0$$

III. جهت دریافت معادله یک مجهوله درجه دوم که جذور آن مختلف‌الاشاره جذور معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد می‌توان چنین نوشت.

$$x_1' = -x_1 \qquad x_2' = -x_2$$ جذور معادله جدید

$$\Rightarrow x^2 - (x_1' + x_2')x + x_1' \cdot x_2' = 0$$

$$x^2 - (-x_1 - x_2)x + (-x_1)(-x_2) = 0$$

$$x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 + (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a} = 0 /\cdot c$$

$$ax^2 - bx + c = 0$$

مثال: معادله یک مجهوله درجه دوم را دریابید که جذور آن مختلف‌الاشاره جذور معادله $3x^2 + x - 2 = 0$ باشد.

$$\Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$$

معادلات پارامتریک یک مجهوله درجه دوم

به معادلاتی گفته می‌شود که بر علاوه مجهول مربوط در آن یک و یا چند حروف اضافی دیگر که قیمت‌های عددی آن تعیین نگردیده باشد، موجود باشد، معادلات پارامتریک یاد می‌گردد که این حروف را پارامتری معادله مذکور می‌نامند مثلاً: معادله $(m+1)x^2 - 2mx + m - 5 = 0$ یک معادله پارامتریک گفته می‌شود، زیرا برعلاوه مجهول x در آن حرف اضافی m نیز موجود است و m را به نام پارامتر این معادله می‌نامند.

طوریکه در معادله فوق ملاحظه می‌گردد، در حقیقت ما به یک معادله و دو مجهول مقابل که دارای بی‌نهایت حل خواهد بود، زیرا اگر معادله مذکور را برای مجهول x از جنس m محاسبه نماییم دریافت خواهیم نمود که:

$$(m+1)x^2 - 2mx + m - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2m)^2 - 4(m+1)(m-5)$$

$$\Delta = +4m^2 - 4(m^2 - 4m - 5)$$

$$\Delta = +4m^2 - 4m^2 + 16m + 20$$

$$\Delta = +16m + 20$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{+2m \pm \sqrt{16m+20}}{2(m+1)}$$

$$x = \frac{+2m \pm \sqrt{4(4m+5)}}{2(m+1)}$$

$$x = \frac{2(m \pm \sqrt{4m+5})}{2(m+1)}$$

$$x = \frac{m \pm \sqrt{4m+5}}{m+1}$$

حالا جذر معادله مذکور برای قیمت‌های مختلف m دارای قیمت‌های مختلف خواهد بود، یعنی:

$$x = \frac{m \pm \sqrt{4m+5}}{m+1}$$

اگر:

$$m = 0 \Rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{4(0)+5}}{0+1} \Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{5}}{1} \quad x_1 = +\sqrt{5}, \quad x_2 = -\sqrt{5}$$

$$m = -1 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{4(-1)+5}}{-1+1} = \frac{-1 \pm 1}{0} \quad \text{(ناممکن)}$$

$$m = 1 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{4(1)+5}}{1+1} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad x_1 = +2, \quad x_2 = -3$$

$$m = -2 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{4(-2)+5}}{-2+1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-3}}{-1}$$ جذر حقیقی ندارد.

پس در نتیجه بطور عموم وقتی معادله مذکور دارای جذور حقیقی مختلف اند که:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 16m + 20 > 0 \Rightarrow 16m\rangle - 20 \Rightarrow > -\frac{5}{4}$$

زمانی معادله مذکور دارای جذور حقیقی مساوی (مضاعف) اند که:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 16m + 20 < 0 \Rightarrow 16m = -20 \Rightarrow m = -\frac{5}{4}$$

به همین ترتیب معادله مذکور دارای جذور موهومی اند که:

$$\Delta < 0 \Rightarrow 16m + 20 < 0 \Rightarrow 16m < -20 \Rightarrow m < -\frac{5}{4}$$

در همه حالات وقتی حل معادله ممکن می‌گـردد کـه $m+1 \neq 0$ و یـا $m \neq -1$ باشد.

پس در مثال فوق نتیجه می‌گردد که معادله مذکور نظر به قیمت‌هـای m دارای بی‌نهایت حل می‌باشد.

بناءً جهت این که این نوع معادلات حل مشخص داشته باشد، برای تعیین قیمت عددی پارامترها شرط یا شرایطی لازم است که بنابر آن معادله را صدق نماید، که ذیلاً آنها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

شرایط تعیین پارامترها

I. هرگاه جهت تعیین پارامتر، یک جذر معادله داده شده باشد، جـذر داده شده را در معادله به عوض مجهول مربوط آن وضع می‌نماییم، پارامتر معادله دریافت می‌گردد.

مثال: در معادله پارامتریک $(m+5)x^2 + 3mx - 1 = 0$ قیمت پـارامتر m را طوری تعیین کنید که یک جذر معادله $(+1)$ باشد.

$$x = +1 \Rightarrow (m+5)(+1)^2 + 3m(+1) - 1 = 0$$
$$m + 5 + 3m - 1 = 0$$
$$4m + 4 = 0 \Rightarrow 4m = -4 \Rightarrow \quad m = -1$$

جهت این که آیا واقعاً به قیمت $m = -1$ یک جذر معادلـه عـدد $(+1)$ خواهد بود؟ امتحان می‌نماییم، طوریکه:

$$(m+5)x^2 + 3mx - 1 = 0$$
$$m = -1$$
$$\Rightarrow (-1+5)x^2 + 3(-1)x - 1 = 0$$
$$4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$(4x+1)(x-1) = 0$$
$$4x + 1 = 0 \qquad x - 1 = 0$$
$$4x = -1 \qquad x_2 = +1$$
$$x_1 = -\frac{1}{4}$$

II. اگر در معادله پارامتریک جذور معادله مساوی و مختلف‌الاشاره مطالبه گردیده باشد. در این صورت در معادله پارامتریـک $b = 0$ قـرار داده شده و پارامتر مربوط دریافت می‌گردد.

مثـال: در معادلـه پارامتریـک $mx^2 - (m^2 - 5m + 4)x - 16 = 0$ قیمـت پـارامتر m را تعیـین کنیـد کـه معادلـه دارای دو جـذر مـساوی و مختلف‌الاشاره باشد.

$$mx^2 - (m^2 - 5m + 4)x - 16 = 0$$
$$b = 0 \Rightarrow -(m^2 - 5m + 4) = 0/\cdot -1$$
$$m^2 - 5m + 4 = 0$$
$$(m-1)(m-4) = 0$$
$$m - 1 = 0 \quad و \quad m - 4 = 0$$
$$m_1 = 1 \qquad m_2 = 4$$

III. در صورتیکه جذور معادله معکوس یکدیگر باشد، یعنی:

$$x_1 = \frac{1}{x_2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow a = c$$

بناءً جهت دریافت پارامتر مربوط $a = c$ قرار داده می‌شود.

مثـال: در معادلـه پارامتریـک $(2p+3)x^2-3px-3p+18=0$ قیمت پارامتر P را طوری تعیین کنید که جذور معکوس یکدیگر باشند.

$$(2P+3)x^2-3Px-3P+18=0$$
$$a=c$$
$$2P+3=-3P+18$$
$$2P+3P=+18-3$$
$$5P=15$$
$$P=3$$

IV. اگر برای دریافت پـارامتر در معادلـه پارامتریـک حاصـل‌جمـع جـذور معادلـه داده شـده باشـد $-\frac{b}{a}$ را مـساوی بـه عـدد داده و هرگـاه حاصل‌ضرب جذور معادله داده شده باشد $\frac{c}{a}$ را مساوی بـه عـدد داده شده قرار داده و پارامتر مورد نظر دریافت می‌گردد.

مثال‌ها:

مثال اول: در معادلـه پارامتریـک $(3k+2)x^2+(5k-10)x+8k+5=0$ قیمت پارامتر k را طوری تعیین کنید، که حاصـل‌جمـع جـذور معادلـه مـذکور (-5)باشد.

$$(3k+2)x^2+(5k-10)x+8k+5=0$$
$$-\frac{b}{a}=-5/\cdot-1\Rightarrow\frac{b}{a}=5\Rightarrow5a=b$$
$$5(3k+2)=5k-10$$
$$15k+10=5k-10$$
$$15k-5k=-10-10\Rightarrow10k=-20\Rightarrow\quad k=-2$$

مثـال دوم: در معادلـه پارامتریـک $2tx^2-(t^2+1)x+t^2+5t-6=0$ قیمت پارامتر t را طوری تعیین نمایید که حاصل‌ضـرب جـذور مـساوی بـه 3 گردد.

$$2tx^2-(t^2+1)x+t^2+5t-6=0$$
$$\frac{c}{a}=3\Rightarrow3a=c$$

$3(2t)=t^2+5t-6$	$t-3=0$
$t^2+5t-6t-6=0$	$t_1=3$
$t^2-t-6=0$	$t+2=0$
$(t-3)(t+2)=0$	$t_2=-2$

V. اگـر در معادلـه پارامتریـک جـذور معادلـه حقیقـی مختلـف مطالبـه گردد $\Delta>0$ و برای جذور حقیقی مساوی (مضاعف) $\Delta=0$ و بـرای جذور موهومی (غیـر حقیقـی) $\Delta<0$ قـرار داده مـی‌شـود و قیمـت پارامتر محاسبه می‌گردد.

مثال‌ها:

مثال اول: در معادلـه پارامتریـک $(m+5)x^2+(2m-1)x-(4m-1)=0$ قیمت پارامتر m را طوری محاسبه نمایید کـه معادلـه دارای دو جـذر حقیقـی مختلف باشد.

$$(m+5)x^2+(2m-1)x+(2m-1)-0$$

جذور حقیقی مختلف می‌باشد. $\Delta>0$

$$b^2-4ac\rangle0$$
$$(2m-1)^2-4(m+5)(m-1)>0$$

$b^2-4ac<0$

$(-3)^2-4(3k+1)(2)<0$

$+9-24k-8<0$

$-24k+1<0$

$-24k+1<0$

$-24k<-1/:24$

$k>\frac{1}{24}$

VI.برای دریافت جذر هم اشــاره در معادلــه پارامتریــک $\frac{c}{a}>0$ و بــرای جذور مختلف‌الاشاره $\frac{c}{a}<0$ قرار داده شده و پارامتر مربـوط محاسـبه می‌گردد.

مثـال اول: در معادلــه پارامتریــک $(k+5)x^2-2kx+3k-12=0$ قیمت پارامتر k را طوری تعیین کنید که جذور معادله هم اشاره باشد.

$(k+5)x^2-2kx+3k-12=0$

جذور هم اشاره اند. $\frac{c}{a}>0$

$\frac{3k-12}{k+5}>0$

$3k-12=0$ | $k+5=0$
$3k=12$ | $k=-5$
$k=4$

k		-5		4	
$3k+12$	$-$		$-$	0	$+$
$k+5$	$-$	0	$+$		$+$
N			$-$		$+$

بناءً معادله پارامتریک فوق در ساحات ذیل برای قیمت k صدق می‌کند.

$4m^2-4m+1-4(m^2+4m-5)>0$

$4m^2-4m+1-4m^2-16m+20>0$

$-20m+21>0$

$-20m>-21/:-20$

$m<\frac{21}{20}$

$m<1.05$

مثـال دوم: در معادلــه پارامتریــک $-3Px^2+(5P-2)x-2P=0$ قیمت پارامتر P را طوری محاسبه نمایید، کــه معادلــه دارای دو جــذر حقیقــی مساوی (مضاعف) باشد.

$-3Px^2+(5P-2)x-2P=0$

جذور مساوی می‌باشد. $\Delta=0$

$b^2-4ac=0$

$(5p-2)^2-4(-3P)(-2P)=0$

$25P2^2-20P+4-24P^2=0$

$P^2-20P+4=0$

$\Delta'=b'^2-ac$

$\Delta'=(-10)^2-(1)(4)$

$\Delta'=+100-4$

$\Delta'=+96$

$P=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$

$P=\frac{+10\pm\sqrt{96}}{1}$

$P_1=+10+\sqrt{96}$

$P_2=+10-\sqrt{96}$

مثـال سوم: در معادلــه پارامتریــک $(3k+1)x^2-3x+2=0$ قیمـت پارامتر k را طوری تعیین کنید که جذور معادله موهومی باشد.

$(3k+1)x^2-3x+2=0$

جذور موهومی می‌باشد. $\Delta<0$



مثـال دوم: در معادلـه پارامتریـک $5x^2-(-2m+5)x-10m+15=0$ قیمت پارامتر m را طوری تعیین کنید که جذور معادله مختلف‌الاشاره باشد.

$$5x^2-(2m+5)x-10m+15=0$$

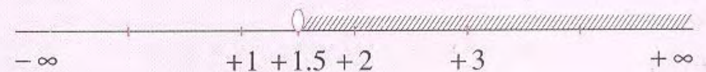
جذور مختلف‌الاشاره اند. $\frac{c}{a}<0$

$$5x^2-(2m+5)x-10m+15=0$$

جذور مختلف‌الاشاره اند $\frac{c}{a}<0$

$$\frac{-10m+15}{5}<0$$
$$\frac{-10m}{5}+\frac{15}{5}<0$$
$$-2m+3<0$$
$$-2m<-3/:-2$$
$$\frac{-2m}{-2}>\frac{-3}{-2}$$
$$m>+\frac{3}{2}$$
$$m>+1.5$$

بناءً معادله پارامتریک فوق را در ساحه ذیل برای قیمت m صدق می‌کند.



اگر در معادله پارامتریک کدام رابطه داده شده باشـد طوریکـه رابطـه مذکور جذور معادله را صدق نماید، بناءً برای دریافت پارامتر رابطه مـذکور را تغییر شکل داده تا به کمـک روابـط کـه قـبلاً در معـادلات درجـه دوم مطالعه گردیده قابلیت قیمت‌گذاری را پیدار نماید و پارامتر مربوط دریافت گردد.

مثال‌ها:

مثال اول: در معادله پارامتریک $(3-m)x^2-2x+m-1=0$ قیمت پارامتر m را طوری تعیین نمایید که بین جذور معادله رابطه $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=2$ صدق نماید.

$$(3-m)x^2-2x+m-1=0$$

$$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=2$$
$$\frac{x_1-x_2}{x_1\cdot x_2}=2$$
$$\frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{a}}{\frac{c}{a}}=2$$
$$\frac{\sqrt{\Delta}}{c}=2$$
$$\sqrt{\Delta}=2c$$
$$(\sqrt{\Delta})=(2c)^2$$
$$\Delta=4c^2$$

$$b^2-4ac=4c^2$$
$$(-2)^2-4(3-m)(m-1)=4(m-1)^2$$
$$+4-4(-m^2+4m-3)=4(m^2-2m+1)$$
$$+4+4m^2-16m+12=4m^2-8m+4$$
$$-16m+8m+4-16$$
$$-8m=-12/:-8$$
$$m=\frac{12}{8}\Rightarrow\quad m=+\frac{3}{2}$$

مثـال دوم: در معادلـه پارامتریـک $(2k+1)x^2-(5k+2)x-k-5=0$ قیمـت پـارامتر k را طـوری تعیـین کنیـد کـه بـین جـذور معادلـه رابطـه $(x_1-2)(x_2-2)=5$ صدق نماید.

$$-k-5+2[-(5k+2)]=2k+1$$
$$-k-5-10k-4=2k+1$$
$$-11k-2k=+1+9$$
$$-13k=+10$$
$$k=-\frac{10}{13}$$

$$(x_1-2)(x_2-2)=5$$
$$x_1\cdot x_2-2x_1-2x_2+4=5$$
$$x_1\cdot x_2-2(x_1+x_2)=1$$
$$\frac{c}{a}-2(-\frac{b}{a})=1$$
$$\frac{c}{a}+\frac{2b}{a}=1/\cdot a$$
$$c+2b=a$$

مطالعه اشاره ترینوم‌های درجه دوم

شکل عمومی یک ترینـوم (سـه حـده) درجـه دوم $y=ax^2+bx+c$ بوده طوریکه $a\neq 0$, b و c اعداد ثابت انـد و هـدف از مطالعـه ایـن نـوع ترینوم‌ها این است که برای کدام قیمت‌های x دارای اشاره مثبت و بـه کـدام قیمت‌ها دارای اشاره منفی می‌باشد و مـی‌تـوان بـا استفاده از مطالعـه اشـاره ترینوم‌های درجه دوم ساحه حل نامساوی‌های درجه دوم را بـه شـکل مـنظم مورد مطالعه قرار داد. بناءً برای این منظور ترینوم مذکور را مـساوی بـه صـفر قرار داده، یعنی مطالعه می‌نماییم که ترینوم به کدام قیمـت‌هـای x بـی‌اشـاره می‌گردد. در نتیجه معادله یک مجهوله درجه دوم تشکیل می‌گردد و با تشکیل Δ سه حالت ذیل وجود دارد:

حالت اول: اگر $\Delta<0$ باشد در این صورت ترینوم به تمام قیمـت‌هـای x فقط اشاره a را دارا می‌باشد. یعنی:

الف: اگر $a>0$ باشد ترینوم به تمام قیمـت‌هـای x دارای اشـاره مثبـت خواهد بود.

ب: اگر $a<0$ باشد ترینوم به تمـام قیمـت‌هـای x دارای اشـاره منفـی خواهد بود.

حالت دوم: اگر $\Delta=0$ باشد در این صـورت ترینـوم بـه اسـتثنای قیمـت $x=-\frac{b}{2a}$ که در آن صفر می‌گردد و اشاره ندارد. بـه سـایر قیمـت‌هـای x اشاره a را دارا می‌باشد، یعنی:

الف: اگر $a>0$ باشد ترینوم به جز از $x=-\frac{b}{2a}$ به تمام قیمت‌های x اشاره مثبت دارد.

ب: اگر $a<0$ باشد ترینوم به جز از $x=\frac{b}{2a}$ به تمـام قیمـت‌هـای x اشاره منفی دارد.

حالت سوم: اگر $\Delta>0$ باشد در این حالت ترینوم فقط به دو قیمت x_1 و x_2 صفر گردیده به سایر قیمت‌هـای x در بـین جـذور خـلاف اشـاره a و در خارج جذور هم اشاره a می‌باشد، یعنی:

الف: اگر $a>0$ باشد ترینوم در بین جذور اشاره منفی و در خـارج جـذور اشاره مثبت دارد.

ب: اگر $a<0$ باشد ترینوم در بین جذور اشاره مثبـت و در خـارج جـذور اشاره منفی دارد.

مثال‌ها:

ترینوم‌های درجه دوم ذیل را تعیین نمایید.

مثال اول: اشاره ترینوم $y=x^2+5x+8$ را تعیین نمایید.

$$y=0$$
$$x^2+5x+8=0$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=(5)^2-4(1)(8)$$
$$\Delta=25-32$$
$$\Delta=-7$$

$\Rightarrow \Delta<0$

اشاره a را مطالعه می‌نماییم.

$a=+1\Rightarrow a>0$

در نتیجه ترینوم به تمام قیمت‌های x دارای اشاره مثبت می‌باشد.

مثال دوم: اشاره ترینوم $y=-3x^2+x-5$ را تعیین کنید.

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ -3x^2+x-5=0 \\ \Delta=b^2-4ac \\ \Delta=(+1)^2-4(-3)(-5) \\ \Delta=+1-60 \\ \Delta=-59 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta<0$$

اشاره a را مطالعه می‌نماییم.

$a=-3 \Rightarrow a>0$

در نتیجه ترینوم به تمام قیمت‌های x دارای اشاره منفی می‌باشد.

مثال سوم: $y=4x^2-4x+1$ بـه کـدام قیمـت‌هـای x دارای اشـاره مثبت می‌باشد.

$$y=0$$
$$4x^2-4x+1=0$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=(-4)^2-4(4)(1)$$
$$\Delta=+16-16$$
$$\Delta=0$$
$$x=\frac{-b}{2a}=+\frac{4}{2\cdot 4}=+\frac{1}{2}$$

چون: $a=+4 \Rightarrow a>0$

در نتیجه ترینوم به جز از قیمت $x=+\frac{1}{2}$ کـه در آن صـفر مـی‌باشـد و اشاره ندارد و $a\rangle 0$ است. پـس بـه سـایر قیمـت‌هـای x دارای اشـاره مثبـت می‌باشد.

مثال چهارم: ترینوم $y=-x^2+6x-9$ به کدام قیمت‌هـای x دارای اشاره مثبت و به کدام قیمت‌های x دارای اشاره منفی می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+6x-9 \\ y=0 \\ -x^2+6x-9=0 \\ \Delta=b^2-4ac \\ \Delta=(+6)^2-4(-1)(-9) \\ \Delta=+36-36 \\ \Delta=0 \end{array}\right\} x=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2(-1)}=\frac{-6}{-2}=+3$$

چون $a=-1 \Rightarrow a<0$

در نتیجه ترینوم به جز از قیمت $x=+3$ که در آن صفر می‌باشد و اشاره ندارد و $a<0$ است. پس به سایر قیمت‌های x دارای اشاره منفی می‌باشد، و به هیچ قیمت x اشاره مثبت ندارد.

مثال پنجم: ترینوم $y=x^2-x-20$ بـه کـدام قیمـت‌هـای x دارای اشاره منفی و به کدام قیمت‌های x دارای اشاره مثبت می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2-x-20 \\ y=0 \\ x^2-x-20=0 \\ \Delta=b^2-4ac \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta=(-1)^2-4(1)(-20) \\ \Delta=+1+80 \\ \Delta=81 \\ \Delta>0 \end{array}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+1\pm 9}{2} \begin{cases} x_1=+5 \\ x_2=-4 \end{cases}$$

چون: $a=+1 \Rightarrow a<0$

پس ترینوم در بین جذور دارای اشاره منفی در خـارج جـذور دارای اشـاره مثبت می‌باشد:

یعنی:

$-\infty$.....		-4		$+5$		.......$+\infty$
	+	0	−	0	+	

$\left.\begin{matrix} x<-4 \\ x>+5 \end{matrix}\right\}$ دارای اشاره مثبت

$-4<x<5$ دارای اشاره منفی

مثال ششم: ترینوم‌های $y=(x^2+x+1)(x^2-3x-4)$ به کدام قیمت‌های x دارای اشاره منفی می‌باشد.

$y=(x^2+x+1)(x^2-3x-4)$

$y=0$

$x^2+x+1=0 \quad , \quad x^2-3x-4=0$

$\Delta=b^2-4ac$	$(x-4)(x+1)=0$
$\Delta=1-4$	$x-4=0, x+1=0$
$\Delta=1-4$	$\boxed{x=4}$ $\boxed{x=-1}$
$\Delta=-3$	

$\Delta<0$ جذر حقیقی ندارد

k	$-\infty$...	-1		4	....$+\infty$
x^2+x+1	+		+		+
x^2-3x-4	+	0	−	0	+
N	+		−		+

$-1<x<+4$

پس در نتیجه ترینوم‌های فوق در بین قیمت‌های (-1) و $(+4)$ دارای اشاره منفی می‌باشد.

مثال هفتم: ترینوم‌های $y=\frac{(x^2-x)(x^2+2x+5)}{x^2-3x-28}$ به کدام قیمت‌های x دارای اشاره مثبت می‌باشد.

$x^2-3x-28=0$	$x^2+2x+5=0$	$x^2-x=0$
$(x-7)(x+4)=0$	$\Delta=b^2-4ac$	$x(x-1)=0$
$x-7=0, x+4=0$	$\Delta=4-20$	$x_1=0 \quad x-1=0$
$x_1=7 \quad , \quad x_2=-4$	$\Delta=-16$	$x_2=1$

$\Delta<0$ جذر حقیقی ندارد

x	$-\infty$...	-4		0		1		7	....$+\infty$
x^2-x	+		+	0	−	0	+		+
x^2+2x+5	+		+		+		+		+
$x^2-3x-28$	+	0	−		−		−	0	+
N	+		−		+		−		+

$x<-4 \qquad 0<x<1 \qquad x>7$

مثال هشتم: ترینوم $y=\frac{1}{-x^2+5x-4}$ به کدام قیمت‌های x اشاره منفی می‌باشد.

$1=0 \Rightarrow 1\neq 0$ همیشه مثبت است.

$-x^2+5x-4=0$	$\Delta>0$	$x=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{-2}$
$\Delta=b^2-4ac$	دو جذر حقیقی	
$\Delta=25-16$	مختلف دارد	$x=\frac{-5\pm 3}{-2}$
$\Delta=9$	$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$	$\boxed{x_1=+1}$, $\boxed{x_2=+4}$

x	$-\infty$...	$+1$		$+4$	....$+\infty$
1	+		+		+
$-x^2+5x-4$	−	0	+	0	−
	−		+		−

$x<+1 \qquad x>+4$

نامساوی‌های یک مجهوله درجه دوم

شکل عمومی نامساوی‌های یک مجهوله درجه دوم $ax^2+bx+c>0$ یا $ax^2+bx+c<0$ می‌باشد جهت دریافت ساحه حل نامساوی‌های مذکور اولاً نامساوی مذکور را مساوی به صفر قرار داده تا معادله درجه دوم یک مجهوله به وجود آید و با تشکیل Δ و حل معادله مذکور دریابیم که نامساوی مذکور به کدام قیمت‌های x مساوی به صفر است و نامساوی را صدق نمی‌نماید، بناءً برای دریافت ساحه حل نامساوی فوق‌الذکر سه حالت ذیل وجود دارد:

حالت اول: هرگاه $\Delta<0$ باشد در این صورت اشاره a و علامه نامساوی را مطالعه می‌نماییم که دو امکان ذیل وجود دارد:

الف: اگر اشاره a و علامه نامساوی موافق همدیگر باشند، نامساوی به تمام قیمت‌های x صدق می‌نماید.

ب: اگر اشاره a و علامه نامساوی مختلف هم باشند، نامساوی به هیچ قیمت x صدق نمی‌نماید.

حالت دوم: هرگاه $\Delta=0$ باشد نامساوی به قیمت $x=-\dfrac{b}{2a}$ صدق نمی‌نماید به سایر قیمت‌های x دو امکان ذیل وجود دارد:

الف: هرگاه اشاره a و علامه نامساوی موافق هم باشند نامساوی به جز از قیمت $x=-\dfrac{b}{2q}$ به تمام قیمت‌های x صدق می‌کند.

ب: هرگاه اشاره a و علامه نامساوی مخالف هم باشند نامساوی به هیچ قیمت x صدق نمی‌کند.

حالت سوم: هرگاه $\Delta\rangle 0$ باشد نامساوی به قیمت‌های x_1 و x_2 که جذر معادله مذکور می‌باشد، صدق نمی‌کند و به سایر قیمت‌های x دو امکان ذیل وجود دارد.

الف: هرگاه اشاره a و علامه نامساوی موافق هم باشند نامساوی در خارج جذور صدق می‌نماید.

ب: هرگاه اشاره a و علامه نامساوی مختلف هم باشند نامساوی در داخل جذور صدق می‌نماید.

مثال‌ها:

ساحه حل نامساوی‌های یک مجهوله درجه دوم ذیل را تعیین نمایید.

مثال اول: ساحه حل نامساوی $2x^2+7x+10>0$ را دریابید.

$$\left.\begin{array}{l}2x^2+7x+10=0\\ \Delta=49-80\\ \Delta=-31\\ \Rightarrow\Delta<0\end{array}\right\}\begin{array}{l}a=+2\Rightarrow a>0\\ \text{علامه نامساوی} >0\end{array}$$

چون اشاره a و علامه نامساوی موافق هم می‌باشند، بناءً نامساوی به تمام قیمت‌های x صدق می‌کند.

یا به عباره دیگر ساحه حل نامساوی تمام قیمت‌های حقیقی در انتروال $(-\infty\ ,\ +\infty)$ می‌باشد.

مثال دوم: ساحه حل نامساوی $3x^2-2x+5<0$ را دریابید.

$$\left.\begin{array}{l}3x^2-2x+5=0\\ \Delta=b^2-4ac\\ \Delta=(-2)^2-4(3)(5)\\ \Delta=4-60\\ \Delta=-56\\ \Delta<0\end{array}\right\}\begin{array}{l}a=+3\Rightarrow a>0\\ \text{علامه نامساوی} <0\end{array}$$

چون اشاره a و علامه نامساوی باهم مخالف اند، بناءً نامساوی مذکور به هیچ قیمت x صدق نمی‌کند و ست حل آن ست خالی می‌باشد.

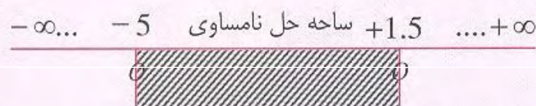
مثال سوم: ساحه حل نامساوی $-2x^2+4x-2<0$ را دریابید.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+7x-15=0 \\ \Delta=b^2-4ac \\ \Delta=(7)^2-4(2)(-15) \\ \Delta=49+120 \\ \Delta=169 \\ \Delta=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x=\frac{-7\pm13}{4} \\ x_1=+\frac{3}{2}=+1.5 \\ x_2=-5 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $a=+1 \Rightarrow a>0$
علامه نامساوی < 0

چون اشاره a و علامه نامساوی مخالف یکدیگر اند، بناءً نامساوی مـذکور در داخل جذور صدق می نماید، یعنی:

$-\infty...$ -5 ساحه حل نامساوی $+1.5$ $....+\infty$



که ساحه حل آن $(+1{,}5\ ,\ -5)$ و یا $-5<x<+1.5$ می‌باشد.

مثال ششم: ساحه حل نامساوی $x^2-13x+40\geq 0$ را دریابید.

$$\left.\begin{array}{l} x^2-13x+40=0 \\ \Delta=b^2-4ac \\ \Delta=(-13)^2-4(1)(4) \\ \Delta=+169-160 \\ \Delta=+9 \\ \Delta=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x=\frac{+13\pm3}{2} \\ x_1=+8 \\ x_2=+5 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $a=+1 \Rightarrow a>0$
علامه نامساوی ≥ 0

چون اشاره a و علامه نامساوی موافق هم می‌باشند، بناءً نامساوی مـذکور در خارج جذور به شمول قیمت‌های جذر معادله صدق می‌نمایـد، زیـرا علامـه

$$\left.\begin{array}{l} -2x^2+4x-2=0 \\ \Delta=16-4(-2)(-2) \\ \Delta=16-16 \\ \Delta=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=-\frac{b}{a} \\ x=-\frac{4}{2(-2)}=-\frac{4}{-4} \\ x=+1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $a=-2 \Rightarrow a<0$
علامه نامساوی < 0

چون اشاره a و علامه نامساوی موافق هم اند، بناءً نامساوی مذکور به جز از قیمت $x=+1$ به سایر قیمت‌های x صدق می‌نماید، که انتـروال حـل آن $(-\infty\ ,\ +1)\cup(+1\ ,\ +\infty)$ می‌باشد.

مثال چهارم: ساحه حل نامساوی $x^2+10x+25<0$ را دریابید.

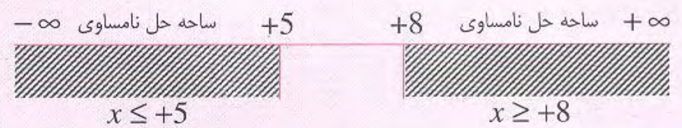
$$\left.\begin{array}{l} x^2+10x+25=0 \\ \Delta=b^2-4ac \\ \Delta=100-4(1)(25) \\ \Delta=100-100 \\ \Delta=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=-\frac{b}{a} \\ x=-\frac{10}{2} \\ x=-5 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $a=+1 \Rightarrow a>0$
علامه نامساوی < 0

چون اشاره a و علامه نامساوی مخالف یکدیگر اند، بناءً نامساوی مـذکور به هیچ قیمت x صدق نمی‌کند.

مثال پنجم: ساحه حل نامساوی $2x^2+7x-15<0$ را دریابید.

نامساوی بزرگتر و مساوی به صفر می‌باشد.



انتروال حل آن $(-\infty, +5] \cup [+8, +\infty)$ می‌باشد.

مثال هفتم: ساحه حل نامساوی‌هـای $(x^2 - x + 5)(x^2 - 3x + 2) \leq 0$ را دریابید.

حل: برای دریافت ساحه حل نامساوی به کمک مطالعه اشاره ترینـوم‌هـا طور ذیل عمل می‌نماییم.

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1) = 0$

$x - 2 = 0$ و $x - 1 = 0$

$x = 2$ $\quad$ $x = 1$

$x^2 - x + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = +1 - 20$

$\Delta = -19$

$\Delta < 0$ جذر حقیقی ندارد

بناءً برای تعین ساحه حـل نامـساوی مـذکور بـا اسـتفاده از جـدول ذیـل می‌توان نوشت.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - x + 5$	+	+	+	
$x^2 - 3x + 2$	+	0 − 0	+	
N	+	−	+	

ساحه حل نامساوی $1 \leq x \leq 2$ می‌باشد.

و یا به عباره دیگر انتروال حل نامساوی‌های مذکور $[1, 2]$ می‌باشد.

مثال هشتم: ساحه حل نامساوی $3x + 5 < \frac{5x-1}{x+5}$ را دریابید.

$$\frac{3x+5}{1} - \frac{5x-1}{x+5} < 0$$

$$\frac{3x^2 + 5x + 15x + 25 - 5x + 1}{x+5} < 0$$

$$\frac{3x^2 + 15x + 26}{x+5} < 0$$

$$3x^2 + 15x + 26 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (15)^2 - 4(3)(26)$$

$$\Delta = 225 - 312$$

$$\Delta = -87$$

$\Delta = 0$ جذر حقیقی ندارد

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
$3x^2 + 15x + 26$	+		+
$x + 5$	−	0	+
N	−		+

ســاحه حــل نامــساوی $x < -5$ مــی‌باشــد کــه انتــروال حــل آن $(-\infty, -5)$ می‌باشد.

تمرینات فصل سوم

از معادلات شکل پولینومیلی یک مجهوله درجه اول ذیل قیمت مجهـول مربوط آن را دریابید.

1) $5x-7=2x-3$

2) $-17-2y=5y+4$

3) $0.3a+8-0.5a=a$

4) $\frac{8}{3}x-1=\frac{2}{3}-\frac{5}{2x}$

5) $6(2m-1)=4m+1$

6) $-0.1(x+5)-2.5+3.1x=0$

7) $9(x-2)+5(x-1)-x=0$

8) $1-(m-8)=5-2(3-m)$

9) $x-(5x-18)=6+(8-2x)$

10) $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}x+1=3\frac{1}{5}+\frac{x}{3}$

11) $x(3x+4)-2=3x(x-1)$

12) $6P+4-7.1=2.1P$

13) $|x+5|=3$

14) $|2x-1|=5$

15) $\left|8x-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{2}$

16) $|3x+2|=8$

از معادلات شکل کسری یک مجهوله اول ذیل قیمت مجهول مربوط آن را دریابید:

17) $\frac{2}{5x}=4$

18) $\frac{8x-2}{3x+1}-\frac{1}{2}=0$

19) $\frac{1}{2y}-\frac{3}{5y}-\frac{5}{3}=0$

20) $\frac{2x-1}{x}-\frac{1}{5}=\frac{x+1}{2x}$

21) $\frac{5}{x+2}-\frac{7}{-2x-4}=2$

22) $\frac{1}{a-1}-\frac{5}{a+1}=\frac{3a-8}{a^2-1}$

23) $\frac{3(x+5)-1}{2(3x+4)}-\frac{1}{2}=0$

24) $\frac{2m+1}{m+3}-\frac{7}{3}=\frac{1}{2m+6}$

25) $\frac{3}{5-y}+\frac{1}{y-5}=\frac{1}{y+2}$

از معادلات شکل جذری یک مجهوله درجه اول قیمت مجهـول مربوطـه آن را دریابید.

26) $\sqrt{2x}-6=0$

27) $7=\sqrt{2x-1}$

28) $\sqrt{3m+5}-4=0$

29) $2\cdot\sqrt[3]{x}-8=0$

30) $5\cdot\sqrt{3y+2}=\frac{15}{2}$

31) $4\cdot\sqrt[5]{m}-12=0$

32) $\sqrt{x+\sqrt{x+2}}-\sqrt{x+3}=0$

33) $2\cdot\sqrt[3]{5x-2}-3\cdot\sqrt[3]{x+4}=0$

34) $\sqrt{3x+2}-\frac{3}{\sqrt{3x+2}}=\frac{2}{\sqrt{3x+2}}$

35) $4=2+\sqrt{\frac{2y-1}{3}}$

معادلات ذیل را برای حرف مورد نظر حل نمایید.

36) $2a - b = c$ (برای a)

37) $3x + 2y - 5 = 1$ (برای y)

38) $\frac{mx+1}{nx+1} = 2$ (برای x)

39) $\frac{3P}{y} - 2xy = 0$ (برای y)

40) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ (برای f)

41) $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1) \cdot d]$ (برای d)

42) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (برای r)

43) $A = (n-2) \cdot 180$ (برای n)

44) $4h - 1 = \frac{y+6h}{4}$ (برای h)

45) $l = mn^{r-1}$ (برای n)

46) $cy - cd = 7cd + 5y$ (برای y)

47) $2mb + 3c = 3bn$ (برای b)

سیستم معادلات دو مجهوله ذیله را به طریقه مساوی ساختن ضرایب حل نمایید.

48) $\begin{cases} x - 1 = 4y \\ x - 2 = 2y \end{cases}$

49) $\begin{cases} 2m - n = 3 \\ m + 2n = 4 \end{cases}$

50) $\begin{cases} \frac{x-y}{5} - \frac{x+2y}{4} = 1 \\ \frac{x-y}{2} = 7 - \frac{x+y}{3} \end{cases}$

51) $\begin{cases} 5a - 2b = 6 \\ 3a - 7b + 8 = 0 \end{cases}$

52) $\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 12 \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \end{cases}$

53) $\begin{cases} 2x + y = 3a + b \\ 3x - y = 2a + 4b \end{cases}$

سیستم معادلات دو مجهوله ذیل را به طریقه تعویض حل نمایید.

54) $\begin{cases} 2y = 3x \\ x + y = 5 \end{cases}$

55) $\begin{cases} 8x - 1 = y \\ y + 3 = 10x \end{cases}$

56) $\begin{cases} 2a - b = 4 \\ 8a = 3b \end{cases}$

57) $\begin{cases} m - 2n = 1 \\ \frac{1}{2}n + 3 = m \end{cases}$

58) $\begin{cases} a + 2d = 9 \\ a - d = 3 \end{cases}$

59) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 5x + 2 = y \end{cases}$

سیستم معادلات دو مجهوله ذیل را به طریقه مساوات حل نمایید.

60) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

61) $\begin{cases} 8x - 2y = 6 \\ 5x - 1 = 4y \end{cases}$

62) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$

63) $\begin{cases} 3m + 2n = 19 \\ 7m - n = 33 \end{cases}$

64) $\begin{cases} 3a + b = \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3}a - 5 = \frac{b}{5} \end{cases}$

65) $\begin{cases} 2(3n-1) + 2(m-2) = 1 \\ 5(m+n) - 3(n-1) = 5 \end{cases}$

نقاط را روی سیستم کمیات وضیعه قایم تعیین نمایید.

66) $A(7,4)$

67) $B(-3,2)$

68) $C(-1,-4)$

69) $D(+2,-5)$

70) $E\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

71) $F\left(-7\frac{1}{2},0\right)$

72) $G(0,-3.5)$

73) $H(0,0)$

74) $L(-3.2,+0.8)$

75) $M(+10,-1.4)$

خطوط مستقیم ذیل را روی سیستم کمیات وضیعه قایم رسم نمایید.

76) $y - x + 2 = 0$

77) $y + 2x - 1 = 0$

78) $2y = 6x + 7$

79) $3x - y + 2 = 0$

80) $y = \frac{x+2}{3}$

81) $5y - 10 = 3x$

سیستم معادلات دو مجهوله ذیل را به طریقه گراف حل نمایید.

82) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

83) $\begin{cases} -x + y = -3 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$

84) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$

85) $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 4y + 6x - 8 = 0 \end{cases}$

سیستم معادلات سه مجهوله ذیل را به طریقه مساوی ساختن ضرایب حل نمایید.

86) $\begin{cases} 8x - y + 3z = 6 \\ 4x - 2y - z = 7 \\ 3x + 8y + 2z = -7 \end{cases}$

87) $\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 3 \\ 2x - y + 2z = 7 \\ 2x - 3y - z = 2 \end{cases}$

88) $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = -5 \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} + \frac{6}{z} = -19 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = -7 \end{cases}$

89) $\begin{cases} 2x - y + 4z = -3 \\ 6x - y + 2z = 10 \\ x - 4y - 5 = 0 \end{cases}$

متریکس‌های ذیل را باهم جمع و تفریق نمایید.

90) $A=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$

$A+B=?\quad,\quad A-B=?$

91) $A=\begin{pmatrix}2&5\\-1&4\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}3&8\\-3&5\end{pmatrix}$

$A+B=?\quad,\quad A-B=?\quad,\quad B-A=?$

92) $A=\begin{pmatrix}3&4\\5&-2\\0&2\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}-8&-4\\2&0\\-1&3\end{pmatrix}$

$A+B=?\quad,\quad B-A=?$

93) $A=\begin{pmatrix}7&1&5\\2&4&3\\0&0&-5\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&3&0\\-2&5&-1\\3&0&-3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&5&-1\\0&0&2\\-7&-2&0\end{pmatrix}$

$A+B+C=?\qquad A-B+C=?\qquad A-B-C=?$

94) $M=\begin{pmatrix}3&2&5&-1\\4&-1&0&3\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}-5&6&0&7\\-2&-5&1&3\end{pmatrix}$

$M+N=?\qquad M-N=?\qquad N-M=?$

متریکس‌های ذیل را ضرب نمایید.

95) $K=5\ ,\ A=\begin{pmatrix}2&5\\-1&4\end{pmatrix}\Rightarrow K\cdot A=?$

96) $K=\dfrac{-3}{5},\ \ M=\begin{pmatrix}3&5&-1\\3&-5&+1\end{pmatrix}\Rightarrow K\cdot M=?$

97) $K=-4\ ,\ A=\begin{pmatrix}3&5\\5&-1\\4&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-4&3\\-1&5\\2&-3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow K(A+B)=?$

$\Rightarrow K(A-B)=?$

98) $A=\begin{pmatrix}3&5&1\\2&0&-4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B=?$

99) $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&3&-7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&2\\1&1\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B=?$

100) $A=\begin{pmatrix}4&5\\1&3\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}3&2&4\\1&8&3\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B=?$

ترانسپوز متریکس‌های ذیل را دریابید.

101) $A=\begin{pmatrix}2&5&-1\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=?$

102) $B=\begin{pmatrix}-5\\3\\4\end{pmatrix}\Rightarrow B^T=?$

103) $M=\begin{pmatrix}4&2\\5&-1\end{pmatrix}\Rightarrow M^T=?$

104) $N=\begin{pmatrix}6&4&1&2\\5&-1&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow N^T=?$

105) $K=2\ ,\ A=\begin{pmatrix}5&3&0\\-1&4&2\end{pmatrix}\Rightarrow K\cdot A^T=?$

106) $A=\begin{pmatrix}5&1\\-3&7\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}3&4\\-2&-5\end{pmatrix}\Rightarrow A^T+B^T=?$

107) $A=\begin{pmatrix}5&4\\-1&1\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}0&-2\\3&-5\end{pmatrix}\Rightarrow (A-B)^T=?$

دیترمینانت‌های 2×2 ذیل را محاسبه نمایید.

108) $|A|=\begin{vmatrix}5&4\\3&-2\end{vmatrix}$

$$109)\ |B| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$110)\ |C| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$111)\ |M| = \begin{vmatrix} 2/3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$112)\ |P| = \begin{vmatrix} -7/3 & 5/4 \\ 3/2 & 3/7 \end{vmatrix}$$

$$113)\ |A| \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -4 \\ 2 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

$$114)\ \begin{vmatrix} 2-\sqrt{3} & 5+\sqrt{2} \\ 5-\sqrt{2} & 2+\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

دیترمینانت‌های 3×3 ذیل را محاسبه نمایید.

$$115)\ |A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$116)\ |B| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -5 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$117)\ |M| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$118)\ |N| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

متوصله متریکس‌های 2×2 ذیل را دریابید.

$$119)\ A = \begin{pmatrix} m & P \\ -T & L \end{pmatrix}$$

$$120)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$121)\ B = \begin{pmatrix} -41 & 51 \\ 32 & -43 \end{pmatrix}$$

$$122)\ B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$123)\ C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$124)\ D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

معکوس ضربی متریکس‌های 2×2 ذیل را دریابید.

$$125)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$126)\ B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$127)\ A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$128)\ M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول ذیل را به کمک معکوس متریکس حل نمایید.

$$129)\ \begin{cases} x+2y=7 \\ -x+y=-1 \end{cases}$$

130) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+2y=3 \end{cases}$

131) $\begin{cases} 3x-y=-1 \\ x+y=5 \end{cases}$

132) $\begin{cases} 5x-2y=4 \\ 3x+y=9 \end{cases}$

سیستم معادلات خطی ذیل را در متریکس به طریقه حذفی (Gouse) حل نمایید.

133) $\begin{cases} 5x+y=7 \\ x+2y-5 \end{cases}$

134) $\begin{cases} 3x-4y=2 \\ x+2y=4 \end{cases}$

135) $\begin{cases} 4x+3y=2 \\ 3x-y=8 \end{cases}$

136) $\begin{cases} 8x-y=1 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$

137) $\begin{cases} 2x+5y=14 \\ -x+2y=-7 \end{cases}$

138) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x-2y+z=7 \\ 2x+y-3z=-4 \end{cases}$

139) $\begin{cases} 4x+2y+3z=3 \\ 2x-y+2z=7 \\ 2x-3y-z=2 \end{cases}$

140) $\begin{cases} x+3y-z=-2 \\ 2x+5y-2z=-2 \\ 5x-y+z=22 \end{cases}$

141) $\begin{cases} 2x-y-3z=2 \\ 3x-4y+z=-10 \\ x+2y+3z=y \end{cases}$

سیستم معادلات خطی ذیل را به طریقه دیترمینانت حل نمایید.

142) $\begin{cases} 5x+y=6 \\ x-2y=-1 \end{cases}$

143) $\begin{cases} 4x+2y=10 \\ x-3y=-1 \end{cases}$

144) $\begin{cases} 4x+3y=5 \\ 7x-y=1 \end{cases}$

145) $\begin{cases} 4x+2y=5 \\ 2x=10-y \end{cases}$

146) $\begin{cases} 3x+y-z=7 \\ x+2y+z=6 \\ 8x+5y-3z=26 \end{cases}$

147) $\begin{cases} 2x+y-z=6 \\ x-y-2z=6 \\ 3x+5y+z=2 \end{cases}$

148) $\begin{cases} a+2b-c=-2 \\ 3a-2c=7 \\ 5b+c=-9 \end{cases}$

149) $\begin{cases} 3x+y-z=2 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+4y+2z=0 \end{cases}$

معادلات فکری ذیل را حل نمایید.

۱۵۰) مجموع دو عدد 14 است و عدد بزرگ به اندازه 2 ازعدد کوچک بزرگتر است اعداد را دریابید.

۱۵۱) مجموع دو عدد 18 است و عدد بزرگ پنج چند عدد خورد است اعداد کدام‌ها اند؟

۱۵۲) کدام عدد به 30 علاوه شود تا دو چند مجموعه مساوی به 106 شود؟

۱۵۳) سه عدد متعاقب مسلسل را دریابید که مجموعه شان 27 باشد؟

۱۵۴) دو عدد متعاقب طاق را دریابید که مجموع شان 44 می گردد؟

۱۵۵) حاصل جمع سه عدد متعاقب جفت 192 است اعداد را دریابید؟

۱۵۶) اگر به عددی 7 علاوه شود و د چند گردد نتیجه 32 می‌شود، عدد را معلوم کنید؟

۱۵۷) اگر از یک عدد 5 طرح گردد و بعد حاصل تفریق عفت چند شود و به آن 11 علاوه شود نتیجه 67 می‌شود، عدد مذکور چند خواهد بود؟

۱۵۸) پدری 36 سال و پسرش 3 سال عمر دارند، چند سال بعد عمر پدر چهار چند عمر پسر خواهد بود؟

۱۵۹) عمر کنونی شخصی 4 چند عمر پسر او است یک سال بعد عمرش پنج چند عمر دو سال قبل پسرش می‌شود، عمر موجوده هرکدام چند است؟

۱۶۰) اگر ضلع یک مربع $(2x+5)$ سانتی‌متر و محیط آن 100 سانتی‌متر باشد طول ضلع آن چند است؟

۱۶۱)طول یک مستطیل دو چند عرض آن است، اگر به طول و عرض آن پنج-پنج متر علاوه گردد محیط آن 80 متر می‌شود، طول و عرض مستطیل مذکور را دریابید؟

۱۶۲) در یک تانک ۲۴ گیلن تیل بیشتر از تانک از دیگر است، اگر 4 گیلن از تانک اولی به تانک دومی ریختانده شود و مقدار تیل دومی دو چند تیل اولی می‌شود، مقدار تیل هردو تانک را معلوم کنید؟

۱۶۳) یک نفر مسافه 41 کیلومتر را در 5 ساعت طی می کند، یک قسمت راه پیاده به سرعت 4 کیلومتر فی ساعت و قسمت دیگر آن را بایسکل به سرعت 10 کیلومتر فی ساعت طی می‌نماید، مدت طی مسافه را که با بایسکل طی نموده دریافت نمایید.

۱۶۴) قیمت قلم آبی 6 افغانی و قیمت قلم سرخ 8 افغانی است، اگر قیمت یک درجن آن‌ها 78 افغانی باشد، معلوم کنید که چند قلم آبی و چند قلم سرخ در درجن موجود است؟ (در حالیکه درجن 12 قلم را در بر می‌گیرد)

۱۶۵) مبلغ 188 افغانی را بین A، B و C طوری تقسیم کنید که A سی وفت افغانی کمتر از B بگیرد و حصه C 11 افغانی از دو چند حصه A بیشتر باشد.

از معادلات نمایی ذیل قیمت مجهول مربوط آن را دریابید.

166) $2^x - 3 = 5$

167) $5^{2x+3} - 1 = 124$

168) $7^{2x+4} - 49^{3x-1} = 0$

169) $5^{2x+4} \cdot 5^{x-1} = 625$

170) $4^{3x-2} = \frac{1}{32}$ 171)

171) $9^{-x+5} - 27^{2x+1} = 0$

172) $3^{2y-5} - \frac{1}{3} = 0$

173) $5^m - 2^m = 0$

174) $\left(\sqrt[3]{21}\right)^x - 21^{\frac{5}{3}} = 0$

175) $3^{x+1} - 3^x - 54 = 0$

176) $8^{m-5} \cdot 2^{10} - 1 = 0$

177) $2^{x-1} \cdot 3^{x+1} - 54 = 0$

178) $5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 25 = 0$

179) $2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 32 = 0$

180) $\begin{cases} \left(\sqrt[3]{2}\right)^{x+y} - 1 = 0 \\ \left(\sqrt[5]{3}\right)^{x+1} = 9^{y-1} \end{cases}$

181) $\begin{cases} 5^{2x+3} - 25^{y-1} = 0 \\ 7^{\frac{x+y}{2}} = \sqrt{7} \end{cases}$

کسرهای الجبری ذیل را به کسور قسمی آن تجزیه نمایید؟

182) $\frac{4x-1}{x^2 - x} = ?$

183) $\frac{7x+3}{x^2-1}=?$

184) $\frac{-5x+17}{x^2+4x-5}=?$

185) $\frac{-5x+3}{3x^2-11x-4}=?$

186) $\frac{2x^2+6x-4}{x^3-4x}=?$

187) $\frac{-x^2-11x-4}{x^3+5x^2+x+5}=?$

188) $\frac{x^2+x+10}{x^3+5x}=?$

189) $\frac{3x+5}{x^2+4x+4}$

190) $\frac{x^2-x+3}{(x+1)^3}=?$

191) $\frac{x^3-x^2-7}{x^2-2x-2}=?$

اشاره بینوم‌های ذیل را مطالعه نمایید.

۱۹۲) بینوم $y=5x-10$ به کدام قیمت‌های x دارای اشاره مثبت و به کدام قیمت‌های x دارای اشاره منفی می‌باشد؟

۱۹۳) بینوم $y=\sqrt{3x}-3$ به کدام قیمت‌های x دارای اشاره منفی می‌باشد؟

۱۹۴) بینوم $y=\sqrt{3x}-3$ به کدام قیمت‌های x دارای اشاره منفی می‌باشد؟

۱۹۵) بینوم $y=\frac{2}{3}x-2$ به کدام قیمت‌های x اشاره مثبت دارد؟

۱۹۶) بینوم‌های $y=(3x-12)(5-2x)$ به کدام قیمت‌های x دارای اشاره مثبت می‌باشد؟

۱۹۷) بینوم‌های $y=\frac{8x-2}{5x+4}$ به کدام قیمت‌های x اشاره مثبت دارد؟

۱۹۸) بینوم $y=\frac{-10}{7x-12}$ به کدام قیمت‌های x اشاره منفی دارد؟

۱۹۹) بینوم $y=\frac{+3}{7-2x}$ به کدام قیمت‌های x اشاره منفی دارد؟

۲۰۰) بینوم‌های $y=\frac{(2x-1)(x-4)}{(x-1)(x+5)}$ به کدام قیمت‌های x اشاره مثبت دارد؟

۲۰۱) بینوم‌های $y=\frac{(2x+8)(3-x)}{3x+2}$ به کدام قیمت‌های x اشاره منفی دارد؟

ساحه حل نامساوی های یک مجهوله درجه اول ذیل را دریابید.

202) $5x+2\langle-7$

203) $3(x+4)-1\geq 14$

204) $9(x-1)-2(3-x)\geq 13x+5$

205) $2x-7\langle 7x+3$

206) $(2x-6)(2+x)<0$

207) $\frac{3x+5}{x-1}>0$

208) $\frac{-2}{7x-21}>0$

209) $\frac{2x+9}{3}<0$

210) $2.5(x-1)-3\langle 1.5x-1$

211) $\frac{3}{x}+5<-4$

212) $|2x-5|\leq 8$

213) $|7-5x|>13$

214) $1<|x+5|<3$

215) $|x-1|>|x+3|$

216) $|2x-3|<|2x+1|$

ساحه حل نامساوی دو مجهوله ذیل روی سیـستم کمیـات وضـیعه قـایم تعیین نمایید.

217) $x-y\leq 3$

218) $2x+y>2$

219) $4y-2x<8$

220) $5x+y>3$

221) $\begin{cases} x+y>3 \\ x-y<2 \end{cases}$

222) $\begin{cases} 2x+y<6 \\ -x+2y>4 \end{cases}$

از معادلات ناقص درجه دوم ذیل قیمت‌های مجهول مربوط را دریابید.

223) $3x^2-27=0$

224) $-5x^2+20=0$

225) $8y^2-2=0$

226) $2x^2+8=0$

227) $3x^2+5x=0$

228) $\frac{3}{2}x^2-\sqrt{2}x=0$

229) $\sqrt{2}m^2+\sqrt{8}m=0$

230) $-2a^2=-50$

231) $\frac{8}{5}y^2+2y=0$

232) $0.8P-8P^2=0$

جذور معادلات درجه دوم ذیل را به طریقه تجزیه دریابید.

233) $x^2+3x+2=0$

234) $m^2-8m+12=0$

235) $P^2-P-30=0$

236) $y^2+5y-6=0$

237) $2x^2+5=7x$

238) $6x^2-8x+2=0$

239) $x^2-2x-5=0$

240) $y^2-14y+49=0$

241) $x^2-2x-5=0$

242) $2a^2+5a-1=0$

معادلات درجه دوم ذیل را به طریقه فورمول حل نمایید.

243) $x^2+5x-36=0$

244) $y^2+y-6=0$

245) $x^2+8x-16=0$

246) $m^2-2m+1=0$

247) $2y^2+y-3=0$

248) $3x^2+2x-5=0$

249) $x^2+2x=0$

250) $7x^2-x+4=0$

251) $x^2+2x=0$

252) $5x^2-10=0$

جذور مختلط معادلات درجه دوم ذیل را دریابید.

253) $2x^2+2x+1=0$

254) $x^2-2x+5=0$

255) $x^2+2x+50=0$

256) $x^2+3ix+10=0$

257) $2x^2-\sqrt{-20}x+10=0$

ترینوم های ذیل، محور x را در چند نقطه قطع می‌کند؟

258) $y=2x^2+5x+7$

259) $y=-x^2+4x-10$

260) $y=4x^2+4x+1$

261) $y=x^2-6x+9$

262) $y=x^2-2x-8$

263) $y = 2x^2 - 3x - 1$

۲۶۴) نقاط تقاطع ترینوم $y = x^2 + 3x - 10$ با محور x را دریابید.

۲۶۵) نقطه مماس گراف ترینـوم $y = x^2 + 10x + 25$ را بـا محـور x دریابید.

۲۶۶) نقطه تقـاطع گـراف ترینـوم $y = 3x^2 + 8x - 2$ را بـا محـور y دریابید.

۲۶۷) نقاط تقاطع گراف ترینـوم $y = x^2 - 5x - 6$ را بـا محـور x و y دریابید.

معادلات داده شده ذیل را بـه معادلـه درجـه دوم تبـدیل نمـوده و قیمـت مجهول مربوطه آن را دریافت نمایید؟

268) $\sqrt{x+5} - x + 1 = 0$

269) $2\sqrt{9+x^2} = x + 6$

270) $2 + \sqrt{10-x} = 2x + 3$

271) $2x = \dfrac{4}{x-1} - 5$

272) $\dfrac{3x}{x-1} + 5 = \dfrac{1}{x+1}$

273) $3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 27 = 0$

274) $5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$

275) $x^3 - 8x^2 + 7x = 0$

276) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

277) $x^3 - x^2 + 5x - 5 = 0$

278) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

279) $x^4 - 25x^2 = 0$

280) $x^4 - 1 = 0$

281) $2x^4 + 58x^2 + 200 = 0$

اشاره جذور معادلات درجه دوم ذیـل را بـدون حـل بـه استفاده از روش دیکارت و نسبت ضرایب ثابت معادله تعیین نمایید.

282) $x^2 + 5x + 1 = 0$

283) $2x^2 + 11x + 3 = 0$

284) $-x^2 - 8x - 2 = 0$

285) $x^2 + 5x - 1 = 0$

286) $-3x^2 - x + 1 = 0$

287) $2x^2 - 8x + 1 = 0$

288) $-5x^2 + 17x - 2 = 0$

289) $x^2 - 625 = 0$

290) $-2x^2 + 18 = 0$

291) $3x^2 + 12 = 0$

292) $7x^2 - 3x = 0$

293) $-\dfrac{2}{5}x^2 + \dfrac{4}{3}x = 0$

معادلات یک مجهوله درجه دوم ذیل را تشکیل دهید.

۲۹۴) هرگاه جذور معادله یک مجهوله درجه دوم $-\dfrac{7}{3}$ و 4+ باشد معادله آن را دریابید.

۲۹۵) هرگـاه جـذوریک معادلـه یـک مجهولـه درجـه دوم $2 + \sqrt{7}$ و $2 - \sqrt{7}$ باشد معادله آن را تشکیل دهید.

۲۹۶) هرگاه در یک معادله درجه دوم جذور آن $\pm\dfrac{3}{5}$ باشـد، معادلـه آن را دریابید.

۲۹۷) هرگاه $x_1 = 0$ و $x_2 = \dfrac{7}{\sqrt{2}}$ جذور یک معادله یک مجهوله درجـه دوم باشد، معادله آن را دریابید.

۲۹۸) هرگاه حاصل جمع جذور یک معادله درجه دوم یک مجهولـه 11- و یکی از جذور آن 5+ باشد، معادله آن را تشکیل دهید.

۲۹۹) هرگاه نصف حاصل ضرب جذور یک معادله درجه دوم یک مجهوله 20 و حاصل جمع جذور آن 13+ باشد معادله آن را دریابید.

۳۰۰) معادله یک مجهوله درجه دوم را تشکیل دهید که جذور آن دو چنـد جذور معادله $x^2 - 5x - 14 = 0$ باشد.

۳۰۱) معادله یک مجهوله درجه دوم را تشکیل دهید که جذور آن مختلف‌الاشاره جذور معادله درجه دوم $x^2-2x-1=0$ باشد.

۳۰۲) هرگاه حاصل جمع دو عدد 3+ و حاصل‌ضرب آن 40- باشد، معادله آن را دریابید.

با استفاده از قضیه ویت از معادلات درجه دوم یک مجهوله ذیل جزئیات خواسته شده آن را دریابید.

۳۰۳) حاصل‌جمع جذور معادله درجه دوم $3x^2+5x-2=0$ را دریابید.

۳۰۴) حاصل‌ضرب جذور معادله درجه دوم $8x^2-4x-7=0$ را دریابید.

۳۰۵) حاصل ضرب جذور معادله درجه دوم $\sqrt{2x+5}-x=\frac{2}{5}$ را دریابید.

۳۰۶) ثلث حاصل‌ضرب جذور معادله درجه دوم $\frac{5x+4}{x-2}=x+7$ را دریابید.

۳۰۷) حاصل‌تفریق جذور معادله درجه دوم $6x^2+13x-5=0$ را دریابید.

۳۰۸) معکوس حاصل‌جمع جذور معادله درجه دوم $-x^2+8x+6=0$ را دریابید.

۳۰۹) حاصل‌جمع معکوس جذور معادله درجه دوم $5x^2+36x-7=0$ را دریابید.

۳۱۰) حاصل‌جمع مربعات جذور معادله درجه دوم $x^2-8x+7=0$ را دریابید.

۳۱۱) حاصل‌جمع مکعبات جذور معادله درجه دوم $15x^2-2x-1=0$ را دریابید.

۳۱۲) هرگاه حاصل‌ضرب دو عدد 14 و حاصل جمع مربعات آن 53 باشد اعداد را دریابید.

۳۱۳) هرگاه حاصل جمع دو عدد 5 و حاصل مکعبات آن 35 باشد اعداد را دریابید.

معادلات پارامتریک ذیل را حل نمایید.

۳۱۴) در معادله پارامتریک $2mx^2+(5m-30)x-1=0$ قیمت پارامتر m را طوری تعیین کنید که معادله دارای دو جذر حقیقی مساوی مختلف‌الاشاره باشد.

۳۱۵) در معادله پارامتریک $kx^2-5kx-(2k+1)=0$ قیمت پارامتر k را طوری تعیین کنید که یک جذور معادله 3+ باشد.

۳۱۶) در معادله پارامتریک $(3P+7)x^2-2Px-P+5=0$ قیمت پارامتر P را طوری تعیین کنید که جذور معادله معکوس یکدیگر باشد.

۳۱۷) در معادله پارامتریک $3kx^2+(5k^2-2)x-7=0$ قیمت پارامتر k را طوری تعیین کنید که حاصل جمع جذور معادله مساوی به یک گردد.

۳۱۸) در معادله پارامتریک $(5m-1)x^2-7mx+(2m+5)=0$ قیمت پارامتر m را طوری تعیین کنید که حاصل‌ضرب جذور معادله $-\frac{3}{5}$ گردد.

۳۱۹) در معادله پارامتریک $(3k+1)x^2-2x+1=0$ قیمت پارامتر k را طوری تعیین کنید که معادله دارای دو جذر حقیقی مختلف باشد.

۳۲۰) در معادله پارامتریک $(m+3)^2-(2m-1)x+m-2=0$ قیمت پارامتر m را طوری تعیین کنید که معادله دو جذر حقیقی مساوی (مضاعف) داشته باشد.

۳۲۱) در معادله پارامتریک $2x^2-x+(m+5)=0$ قیمت پارامتر m را طوری تعیین کنید که جذور معادله موهومی باشند.

۳۲۲) در معادله پارامتریک $3mx^2-(5m+1)x-m+4=0$ قیمت پارامتر m را طوری تعیین کنید که جذور معادله مختلف‌الاشاره باشند.

۳۲۳) در معادله پارامتریک $7x^2+kx-\frac{5}{2}+7k=0$ قیمت پارامتر k طوری تعیین کنید که جذور معادله هم اشاره باشند.

۳۲۴) در معادله پارامتریک $(2f+1)x^2-3fx+5f-1=0$ قیمت پارامتر f را طوری تعین کنید که جذور معادله مذکور رابطه $(2x_1-1)(2x_2-1)=5$ را صدق نماید.

۳۲۵) در معادلـه پارامتریـک $(2P+5)x^2-8Px+3-5P=0$ قیمت پارامتر P را طوری تعیین کنید که جذور معادله مذکور رابطه $\frac{3+4x_1}{2-x_2}=4$ را صدق نماید.

اشاره ترینوم‌های ذیل را تعیین نمایید.

326) $y=2x^2+8x+13$

327) $y=-3x^2+x-5$

328) $y=x^2-14x+49$

329) $y=-x^2+2x-1$

330) $y=x^2-x-20$

331) $y=-6x^2+x+1$

۳۳۲) ترینوم $y=3x^2+5x+10$ به کدام قیمت‌های x اشاره مثبت دارد؟

۳۳۳) ترینوم $y=5x^2+x+1$ به کدام قیمت‌های x اشاره منفی دارد؟

۳۳۴) ترینوم $y=9x^2-6x+1$ به کدام قیمت‌های x اشاره مثبت دارد؟

۳۳۵) ترینوم $y=x^2+3x-10$ به کدام قیمت‌های x اشاره منفی دارد؟

۳۳۶) ترینوم $y=-2x^2+3x+5$ به کدام قیمت‌های x اشاره منفی دارد؟

۳۳۷) ترینوم‌های $y=(x^2-25)(x^2+x+3)$ به کدام قیمت‌های x اشاره مثبت دارد؟

۳۳۸) ترینوم‌های $y=\frac{5x^2+4x-1}{x^2+7x-30}$ به کدام قیمت‌های x اشاره منفی دارد؟

ساحه حل نامساوی‌های یک مجهوله درجه دوم ذیل را تعیین نمایید.

339) $3x^2+2x+1>0$

340) $5x^2-x+4<0$

341) $-2x^2+5x-3<0$

342) $-7x^2+3x-5>0$

343) $-16x^2+8x-1<0$

344) $2x^2-2\sqrt{2x}+1<0$

345) $6x^2+x-15<0$

346) $x^2+7x+10<0$

347) $-2x^2+x+15<0$

348) $(x^2-x)(x^2-25)>0$

359) $\frac{3x+1}{x-1}-1>\frac{1}{x+1}$

350) $\frac{10}{x+2}-1>\frac{1}{x-2}$

351) $\frac{2x^2-x-1}{2x^2+x+1}<0$

352) $\frac{(x^2-1)(x^2+5x+1)}{(2x^2+7x-4)}>0$

فصل چهارم

ترادف یا تصاعد Sequence

تصاعد عبارت از ردیف یا ترادف و یا قطار از اعداد و یا حدود مانند $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ بوده که هر یک از اعداد فوق حد ترادف یاد می‌گردد.

به طور عموم یک ترادف به وسیله حد اختیاری (n- ام) تعریف و معین می‌گردد. مانند:

$$a_n = 2n+3\,,\ n=1, 2, 3, \ldots..$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, n=1, 2, 3, \ldots\ldots$$

ترادف‌های که قیمت عددی حدود آن به تدریج افزایش یابد ترادف متزاید و برعکس اگر کم شود، ترادف متناقص نامیده می‌شود. مثلاً ترادف $a_n = n^3$ متزاید بوده زیرا:

$$a_n = n^3 = 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots\ldots \Rightarrow 1, 8, 27, 64, \ldots.$$

در حالیکه ترادف $b_n = \frac{4}{n}$ یک ترادف متناقص است زیرا:

$$b_n = \frac{4}{n} = \frac{4}{1}, \frac{4}{2}, \frac{4}{3}, \frac{4}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\ldots. \Rightarrow 4, 2, \frac{4}{3}, 1, \frac{4}{5}, \ldots\ldots$$

مثال‌ها:

مثال ۱: اگر حد عمومی یک ترادف $a_n = \frac{2n}{n+2}$ باشد، 4 حد اول آن را بنویسید:

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{2(1)}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{2(2)}{2+2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{2(3)}{3+2} = \frac{6}{5}$$

$$m=4 \Rightarrow a_4 = \frac{2(4)}{4+2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

مثال ۲: اگر یک ترادف در شکل $a_n = \frac{5-(-1)^n}{n^2}$ داده شده باشد 5 جمله اول آن را بنویسید:

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{5-(-1)^1}{(1)^2} = \frac{5+1}{1} = \frac{6}{1} = 6$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{5-(-1)^2}{(2)^2} = \frac{5-(+1)}{4} = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{5-(-1)^3}{(3)^2} = \frac{5-(-1)}{9} = \frac{5+1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{5-(-1)^4}{(4)^2} = \frac{5-(+1)}{16} = \frac{5-1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$n=5 \Rightarrow a_5 = \frac{5-(-1)^5}{(5)^2} = \frac{5-(-1)}{25} = \frac{5+1}{25} = \frac{6}{25}$$

به عبارت دیگر هرگاه در یک ردیف اعداد یا حدود بین هردو جمله (حدود) متعاقب آن یک مقدار ثابت موجود شده بتواند، تصاعد گفته می‌شود، مثلاً به ردیف اعداد ذیل توجه نمایید.

1) 7,10,13,16,19,................ (بر اساس اصل جمع)

2) 49,42,35,28,21,............. (بر اساس اصل تفریق)

3) 3,15,75,375,1875,.......... (بر اساس اصل ضرب)

4) $400, 200, 100, 50, 25, ...$ (بر اساس اصل تقسیم)

طوریکه ملاحظه می‌گردد مثال اول بر اساس اصل جمع استوار بوده و بین هردو جمله متعاقب آن عین مقدار ثابت یعنی به اندازه 3 علاوه گردیده است. در حالیکه مثال دوم بر اساس اصل تفریق ترتیب گردیده و بین هردو جمله متعاقب آن عین مقدار ثابت یعنی به اندازه 7 کم گردیده است. بخاطر داشته باشید که هرگاه یک ردیف اعداد بر اساس اصل جمع و تفریق ترتیب گردیده باشند، تصاعد حسابی نامیده می‌شود.

به همین ترتیب طوریکه در مثال سوم ملاحظه می‌گردد بر اساس اصل ضرب استوار بوده یعنی بین هردو جمله متعاقب آن عین مقدار ثابت به اندازه 5 ضرب گردیده است. درحالیکه مثال چهارم بر اساس اصل تقسیم ترتیب گردیده است یعنی بین هردو جمله متعاقب آن عین مقدار ثابت به اندازه 2 تقسیم گردیده است و قابل یادآوری است آن ردیف اعدادی که بر اساس اصل ضرب و تقسیم استوار باشد، تصاعد هندسی نامیده می‌شود.

پس در نتیجه می‌توان گفت که تصاعد به دو نوع حسابی و هندسی می‌باشد. که هریک را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

اول – ترادف یا تصاعد حسابی (Arithmetic Sequence)

هرگاه در یک ترادف اعداد حاصل تفریق هرجوره از حدود متعاقب آن همیش یک عدد ثابت گردد، ردیف مذکور یک ترادف (تصاعد) حسابی نامیده می‌شود.

مثال‌ها:

$\langle 1\rangle : 2, 7, 12, 17, 22, ...$

$$7-2=+5$$
$$12-7=+5$$
$$17-21=+5$$
$$22-17=+5$$
$$\vdots$$

$\langle 2\rangle : 2a+r, 2a+3r, 2a+5r, 2a+7r, ...$

$$(2a+3r)-(2a+r)=2r$$
$$(2a+5r)-(2a+3r)=2r$$
$$(2a+7r)-(2a+5r)=2r$$
$$\vdots$$

$\langle 3\rangle : 35, 25, 15, 5, -5, -15, ...$

$$25-35=-10$$
$$15-25=-10$$
$$5-15=-10$$
$$-5-5=-10$$
$$\vdots$$

مثال‌های فوق تصاعد حسابی را ارائه می‌نمایند، زیرا فرق یا حاصل‌تفریق شان یک عدد ثابت مانند (5+) در مثال اول، (2r+) در مثال دوم و (10-) در مثال سوم گردیده است که این عدد ثابت را به نام فرق مشترک یا تفاضل مشترک (Common difference) یاد می‌نمایند و به d نمایش می‌دهند.

همچنان حد اول تصاعد را به a یا a_1 نشان می‌دهند و قابل یادآوریست که اگر $d>0$ باشد تصاعد حسابی متزاید و اگر $d<0$ باشد، تصاعد حسابی متناقص نامیده می‌شود.

مثال‌ها:

مثال اول: در تصاعد حسابی: $15, 18, 21, 24, 27, ...$

$$\left.\begin{array}{l} d=18-15=+3 \\ d=21-18=+3 \\ d=24-21=+3 \end{array}\right\}$$

چون $d>0$ است پس تصاعد حسابی مذکور متزاید نامیده می‌شود.

مثال دوم: در تصاعد حسابی: $40,35,30,25,20,.........$

$$\left.\begin{array}{l} d=35-40=-5 \\ d=30-35=-5 \\ d=25-30=-5 \end{array}\right\}$$

چون $d<0$ است پس تصاعد حسابی مذکور متناقص نامیده می‌شود.

مثال ها:

در تصاعدهای حسابی ذیل حد اول و فرق مشترک آن را بنوسید.

$\langle 1\rangle: 5,11,17,23,29,35,.........$

$a=+5 \quad , \quad d=11-5=+6 \Rightarrow d=+6$

$\langle 2\rangle: \frac{3}{4},1,\frac{5}{4},\frac{3}{2},\frac{7}{4},..........$

$a=\frac{3}{4} \quad , \quad d=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \Rightarrow d=+\frac{1}{4}$

$\langle 3\rangle: -5,-1,+3,+7,+11,.........$

$a=-5 \quad , \quad d=-1-(-5)=-1+5=+4 \Rightarrow d=+4$

$\langle 4\rangle: \frac{11}{2},\frac{9}{2},\frac{7}{2},\frac{5}{2},.........$

$a=\frac{11}{2} \quad , \quad d=\frac{9}{2}-\frac{11}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \Rightarrow d=-1$

حد اقل پنج جمله تصاعدهـای حـسابی را کـه حـد اول و فـرق مـشترک (تفاضل مشترک) آن داده شده است، بنویسید:

$\langle 1\rangle: a=4, d=+8 \Rightarrow 4,12,20,28,36,44,...........$

$\langle 2\rangle: a=-7 \ , \ d=+2 \Rightarrow -7,-5,-3,-1,+1,+3,+5,........$

$\langle 3\rangle: a=19 \ , \ d=-5 \Rightarrow 19,14,9,4,-1,-6,-11,..........$

$\langle 4\rangle: a=\frac{5}{3} \ , \ d=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{3},\frac{13}{6},\frac{8}{3},\frac{19}{6},\frac{11}{3},\frac{25}{6},..........$

دریافت جمله اخیر در تصاعد حسابی

Deriving the Formula for the Last Term of an Arithmatic Sequence

در ترادف تصاعد حسابی که جمله اول a، فرق مشترک آن d و به تعداد n جمله درآن موجود باشد بخواهیم جملـه اخیـر (l) و یـا (a_n) آن را دریافت نماییم با استفاده از تشکیل تصاعد حسابی می‌توان چنین نوشت:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ a+5d,......,\ a+(n-1)d$$

پس در نتیجه جمله اخیر آن عبارت از: $l=a+(n-1)d$

یا به عباره دیگر اگر حد اول را a_1 و حد اخیر را به a_n نشان دهیم پس می‌توان نوشت: $a_n=a_1+(n-1)d$

مثال‌ها:

مثـــال اول: جملــه یــک صــد و پنجــاه و یکــم تــصاعد حــسابی $18,21,24,......$ را دریافت نمایید.

$$\begin{array}{ll} a=18 & l=a+(n-1)d \\ d=21-18=+3 & l=18+(151-1)\cdot 3 \\ n=151 & l=18+150\cdot 3 \\ l=? & l=18+450 \\ & l=468 \end{array}$$

به عباره دیگر با استفاده از تشکل تصاعد حسابی می‌توان نوشت:

$a_{151}=a_1+150d$

$a_{151}=18+150\cdot 3=18+450=468$

$\Rightarrow a_{151}=468$

مثال دوم: در تـصاعد حـسابی کـه حـد اول 5 و حـد اخیـر 29 اسـت در صورتیکه تفاضـل مـشترک آن 2+ باشـد، تـصاعد مـذکور دارای چنـد جملـه می‌باشد.

$$\left.\begin{aligned} a &= 5 \\ l &= 29 \\ d &= 2 \\ n &= ? \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} l &= a + (n-1)\, d \\ a + (n-1)\, d &= l \\ (n-1)\, d &= l - a \\ n - 1 &= \frac{l-a}{d} \\ n &= \frac{l-a}{d} + 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} n &= \frac{29-5}{2} + 1 \\ n &= \frac{24}{2} + 1 \\ n &= 12 + 1 \\ n &= 13 \end{aligned}$$

مثال سوم: یک تصاعد حسابی 10 جمله دارد در صورتیکه $a_1 = 75$ و $a_n = 30$ است تصاعد آن را بنویسید:

حل: در زمانیکه d فرق مشترک تصاعد دریافت نگردد نمی‌توانیم تصاعد مذکور را بنوسیم بناً برای دریافت d فرق مشترک می‌توان از فورمول جمله اخیر تصاعد حسابی چنین نوشت:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 75 \\ a_n &= 30 \\ n &= 10 \\ d &= ? \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_1 + (n-1)d &= a_n \\ (n-1)\, d &= a_n - a_1 \\ d &= \frac{a_n - a_1}{n-1} \end{aligned}$$

$$d = \frac{30-75}{10-1} = \frac{-45}{9} = -5 \Rightarrow d = -5$$

75 , 70 , 65 , 60 , 55 , 50 , 45 , 40 , 35 , 30

مثال چهارم: جمله هشتاد و دوم تصاعد حسابی را دریابید که جمله پنجم آن 17 و جمله دوازده‌هم آن 11- باشد.

$a_{82} = ?$

$$a_5 = 17 \qquad a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow \qquad a_1 + 4d = 17 \cdots\cdots (1)$$

$$a_{12} = -11 \qquad a_{12} = a_1 + 11d \Rightarrow \qquad \underline{\pm a_1 \pm 11d = \mp 11 \cdots\cdots (2)}$$

$$-7d = 28$$

$$d = \frac{28}{-7} \Rightarrow d = -4$$

$a_1 + 4d = 17 \cdots\cdots (1)$ چون

$$a_1 + 4(-4) = 17 \Rightarrow a_1 - 16 = 17 \Rightarrow a_1 = 17 + 16$$

$$a_1 = 33$$

$$\Rightarrow a_{82} = a_1 + 81d$$

$$a_{82} = 33 + 81 \cdot (-4) = 33 - 324 = -291$$

$$\Rightarrow a_{82} = -291$$

مثال پنجم: در تصاعد حسابی که $a_4 = 22$ و $a_n = 77$ باشد، درحالیکه $n = 15$ است a_1 را دریابید.

$$\left.\begin{aligned} a_4 &= 22 \\ a_n &= 77 \\ n &= 15 \\ a_1 &= ? \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow a_1 + 3d = 22 \cdots\cdots (1) \\ & a_n = a_1 + (n-1)\, d \Rightarrow a_1 + (15-1)\, d = 77 \\ & a_1 + 14d = 77 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 + 3d &= 22 \cdots\cdots 1 \\ \underline{_\, a_1 \pm 14d} &= \underline{_\, 77 \cdots\cdots 2} \\ -11d &= -55 \\ d &= +5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_1 + 3d = 22 \cdots\cdots (1) \Rightarrow a_1 + 3 \cdot 5 = 22 \Rightarrow a_1 = 7$$

مثال ششم: جمله سی و ششم تصاعد حسابی ذیل را بنویسید:

$$2m + 15r\ , m + 13r , 11r , -m + 9r , \cdots\cdots$$

$$a_1 = 2m + 15r$$

$$d = (m + 13r) - (2m + 15r) = m + 13r - 2m - 15r = -m - 2r$$

$$\begin{aligned} d &= -m - 2r & a_{36} &= a_1 + 35d \\ n &= 36 & a_{36} &= 2m + 15r + 35(-m - 2r) \\ a_{36} &= ? & a_{36} &= 2m + 15r - 35m - 70r \\ & & a_{36} &= -33m - 55r \end{aligned}$$

یادداشت: طوریکه در مثال چهارم و پنجم ملاحظه نمودید در صـورتیکه در یک ترادف (تصاعد) حسابی حد (n)ام و حد (m)ام آن معلوم باشد می‌توان فرق مشترک را چنین دریافت نمود.

$$a_n = a + (n-1)\,d.........(1)$$
$$a_n = a + (m-1)\,d..........(2)$$

از رابطه (1) رابطه (2) را تفریق نموده داریم که:

$$\Rightarrow a_n - a_m = nd - md \Rightarrow d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$$

مثال: جمله هشتاد دوم تصاعد حسابی را دریابید که جمله پـنجم آن 17 و جمله دوازدهم آن (11-) باشد.

$$a_{12} = a_n = -11$$
$$a_5 = a_m = 17$$
$$\Rightarrow d = \frac{a_n - a_m}{n-m} = \frac{-11-17}{12-5} = \frac{-28}{7} = -4 \Rightarrow d = -4$$
$$\Rightarrow a_5 = a + 4d \Rightarrow 17 = a + 4(-4) \Rightarrow 17 = a - 16$$
$$\Rightarrow a = 17 + 16 \Rightarrow a = 33$$
$$\Rightarrow a_{82} = a + 81d = 33 + 81(-4) = 33 - 324 = -291$$

شامل سازی جملات در ترادف (تصاعد) حسابی

(Inerting Arithmetic Means)

هرگاه در تصاعد حسابی که جمله اول آن a و جمله اخیر l داده شده باشد و بخواهیم m جمله دیگر را در ایـن تـصاعد شـامل سـازیم، بایـد d تفاضـل مشترک (فرق مشترک) آن را دریابیم تـا تـصاعد تـشکیل گـردد، بنـاءً بـرای رسیدن به این مقصد با اسـتفاده از فورمـول جملـه اخیـر در تـصاعد حـسابی می‌توان چنین نوشت:

$$\underbrace{a,.., l}$$

m جمله دیگر را در بین تصاعد شامل گردد

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow n = m+2 \\ l = a + (n-1)\,d \\ a + (n-1)\,d = l \\ (n-1)\,d = l - a \\ d = \dfrac{l-a}{n-1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} d = \dfrac{l-a}{m+2-1} \\ d = \dfrac{l-a}{m+1} \end{array}$$

به عباره دیگر اگر حد اول را بـه a_1 و حـد اخیـر را بـه a_n نـشان دهـیم فورمول اخیر شکل ذیل را به خود اختیار می‌نماید.

$$d = \frac{a_n - a_1}{m+1}$$

مثال‌ها:

مثال اول: در بین تصاعد حسابی 95 ,..................,18 شـش جملـه دیگر را شامل ساخته، ردیف اعداد آن را بنویسید:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a = 18 \\ a_n = l = 95 \\ m = 6 \\ d = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} d = \dfrac{a_n - a_1}{m+1} = \dfrac{95-18}{6+1} = \dfrac{77}{7} \\ d = 11 \end{array}$$

$$\Rightarrow 18, \underbrace{29, 40, 51, 62, 73, 84}_{\text{6 جمله}}, 94$$

مثال دوم: در تصاعد حسابی که $a_1 = 200$ و $a_n = -40$ باشد به تعـداد هفت جمله دیگر را شامل ساخته تصاعد حسابی را بنویسید:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 200 \\ a_n = -40 \\ m = 7 \\ d = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} d = \dfrac{a_n - a_1}{m+1} = \dfrac{-40-200}{7+1} \\ d = \dfrac{-240}{8} \Rightarrow d = -30 \end{array}$$

$$\Rightarrow 200,\underbrace{170,140,110,80,50,20,-10}_{7\ \text{جمله}},-40$$

مثال سوم: در تصاعد حسابی که جمله اول $(5p-1)$ و جملـه اخیـر آن $(23p+8)$است. در بین این تصاعد هـشت جملـه را شـامل سـازید، جملـه ششم آن را دریابید.

$$\left.\begin{array}{l} a=a_1=5P-1 \\ l=a_n=23P+8 \\ m=8 \\ d=? \\ a_6=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} d=\frac{a_n-a_1}{m+1}=\frac{(23P+8)-(5P-1)}{8+1} \\ =\frac{23P+8-5P+1}{9} \\ d=\frac{18P+9}{9}=\frac{9(2P+1)}{9}\Rightarrow d=2P+1 \\ \Rightarrow a_6=a_1+5d=5P-1+5(2P+1) \\ =5P-1+10P+5 \\ a_6=15P+4 \end{array}$$

حد وسطی ترادف (تصاعد) حسابی

هرگاه سه حد مسلسل یک ترادف حسابی a_{n-1}، a_n و a_{n+1} (در حالیکه $n=2,3,4,......$) موجود باشد حد وسطی آن چنین به دست می‌آید.

$$a_{n-1}+a_{n+1}=[a_1+(n-2)\,d]+[a_1+n\,d]=a_1+nd-2d+a_1+nd$$
$$=2a_1+2nd-2d=2(a_1+nd-d)=2[a_1+(n-1)d]$$
$$\Rightarrow a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n /:2\Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

مثال: حد وسطی ترادف حسابی بین اعداد 51 و 63 را دریابید:

$$\left.\begin{array}{l} a_{n-1}=51 \\ a_{n+1}=63 \\ a_n=? \end{array}\right\} a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}=\frac{51+63}{2}=\frac{114}{2}=57$$

مجموعه قسمی ترادف‌ها: هرگاه یک تـرادف (تـصاعد) از اعـداد ماننـد $a_1,a_2,a_3,.......,a_n$ را داشته باشیم به طور عموم حاصل‌جمع n حـد اول ترادف مذکور به شکل یک مجموعه قسمی قرار ذیل می‌توان نوشت:

$$a_1+a_2+a_3+........+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

که علامه $(\sum)$ به معنی مجموعه و حروف بالا و پایین اندکس بوده که تمام اعداد طبیعی از (1) تا (n) را قیمت گرفته می‌تواند. به خاطر داشته باشید اگر $a_1+a_2+a_3+.......+a_n=\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ را به نام سلسله بـی‌نهایـت یـا series یاد می‌کنند.

مثال‌ها:

مجموعه قسمی ترادف (تصاعد) را بنویسید:

1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+.....+\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$

2) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+......+\frac{1}{n^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$

3) $2+4+6+8+......+2n=\sum_{i=1}^{n}2i$

4) $1+3+5+7+.......+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$

5) $1+4+9+16+25+......+n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2$

حاصل مجموعه قسمی داده شده ذیل را دریابید.

1) $\sum_{i=1}^{5}(2i-3)^2=?$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{5}(2i-3)^2=(2\cdot1-3)^2+(2\cdot2-3)^2+(2\cdot3-3)^2+(2\cdot4-3)^2+(2\cdot5-3)^2$$

$$= (-1)^2 + (+1)^2 + (+3)^2 + (+5)^2 + (+7)^2$$
$$= +1+1+9+25+49 = 85$$

2) $\sum_{k=1}^{10}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}) = ?$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{10}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}) = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$
$$+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$$
$$= 1-\frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

3) $\sum_{k=1}^{16}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) = ?$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{16}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) = 1-0+\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}$$
$$+ ......+\sqrt{15}-\sqrt{14}+\sqrt{16}-\sqrt{15} = \sqrt{16} = 4$$

4) $\sum_{i=1}^{6} 3i = ?$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{6} 3i = 3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+3\cdot4+3\cdot5+3\cdot6$$
$$= 3+6+9+12+15+18 = 63$$

حاصل‌جمع قسمی تصاعد حسابی

(Sum of Arithmatic Series)

مجموعه یک تصاعد حسابی را سلسله حسابی می‌گویند که قبـل از ارائـه فورمول‌های آن به حکایت ذیل توجه کنید:

می‌گویند عالم فزیک گاووس (Guss) هنوز در صنف چهارم مدرسه قـرار داشت، خیلی باهوش و ذکی، اما بسیار شوخ. بخاطریکه استاد وی را از شوخی به دور نگاه داشته باشد برایش وظیفه داد تا اعداد مسلسل طبیعی از یک الـی 100 را جمع نماید. استاد عقیده داشت برای اجرای این عمل اقلاً یک ساعت وقت لازم است، اما وی این عملیه را چنین به ساده‌گـی در مـدت کمتـر از ده دقیقه فکر، محاسبه و دریافت نمود.

حاصل‌جمع به شکل صعودی:

$$S = 1+2+3+4+5+....+97+98+99+100$$

حاصل‌جمع به شکل نزولی:

$$S = 100+99+98+97+......+5+4+3+2+1$$

$$\Rightarrow \underbrace{2S = 101+101+101+101+......+101+101+101}_{\text{100 جمله}}$$

$$2S = 100\cdot101 \Rightarrow S = \frac{10100}{2} = 5050 \Rightarrow S = 5050$$

پس بر اساس تجربه عالم مذکور اگر در یک تصاعد حسابی جمله اول آن a، فرق مشترک آن d، تعداد جملات آن n باشد می‌توان حاصل‌جمع تـصاعد مذکور را که یک سلسله حسابی را تشکیل می‌دهد، چنین دریافت نمود.

$$S = (a)+(a+d)+(a+2d)+...........+[a+(n-2)\,d]+$$
$$[a+(n-1)d]\cdots\cdots(1)$$
$$S = [a+(n-1)d]+[a+(n-2)d]+..........+(a+2d)+$$
$$(a+d)+(a)........(2)$$

از حاصل‌جمع روابط (1) و (2) داریم که:

$$\underbrace{2S = [2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+......+[2a+(n-1)d]}_{\text{nجمله}}$$

$$2S = n[2a+(n-1)d] /:2$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]\cdots\cdots(1)$$

به همین ترتیب چون می‌دانیم که $a_n = l = a + (n-1)d$ است، پس می‌توان با استفاده از رابطه (1) چنین نوشت:

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \cdots\cdots(1)$$

$$S = \frac{n}{2}[a + \underbrace{a + (n-1)d}_{l}]$$

$$\Rightarrow S = \frac{n}{2}(a + l)$$

$$\Rightarrow S = \frac{n}{2}(a + l) \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

یا به عباره دیگر می‌توان نوشت: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \cdots\cdots\cdots(2)$

حالات خصوصی

بـا اسـتفاده از فورمـول عمـومی حاصـل‌جمـع سلـسله‌هـای حـسابی $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \cdots\cdots(1)$ می‌توان حالات خصوصی ذیل را نیز دریافت نمود.

حالت اول: حاصل‌جمع اعداد مسلسل طبیعی:

$1+2+3+4+5+\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\left.\begin{aligned} &a=1\\ &d=1\\ &n=n\\ &S_n=?\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]\\ S_n &= \frac{n}{2}[2+(n-1)\cdot 1]\\ S_n &= \frac{n}{2}(2+n-1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

حالت دوم: حاصل‌جمع اعداد مسلسل طبیعی جفت:

$2+4+6+8+10+\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\left.\begin{aligned} &a=2\\ &d=2\\ &n=n\\ &S_n=?\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]\\ S_n &= \frac{n}{2}[2\cdot 2+(n-1)\cdot 2]\\ S_n &= \frac{n}{2}(4+2n-2)\\ S_n &= \frac{n}{2}\cdot 2(n+1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow S_n = n(n+1)$$

حالت سوم: حاصل‌جمع اعداد مسلسل طبیعی طاق:

$1+3+5+7+9+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\left.\begin{aligned} &a=1\\ &d=2\\ &n=n\\ &S_n=?\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]\\ S_n &= \frac{n}{2}[2\cdot 1+(n-1)\cdot 2]\\ S_n &= \frac{n}{2}(2+2n-2)\end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow S = \frac{n}{2}\cdot(2n)\\ &S = n^2\end{aligned}$$

یادداشت: به همین ترتیب فورمول‌های حاصل‌جمع ترادف‌هـای ذیـل را نیز به خاطر داشته باشید:

۱- حاصل‌جمع مربعات اعداد طبیعی:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots+n^2 \Rightarrow S = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

۲- حاصل‌جمع مکعبات اعداد طبیعی:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots\ldots+n^3 \Rightarrow S = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

۳- حاصل‌جمع مربعات اعداد مسلسل جفت:

$$2^2+4^2+6^2+8^2+.....+(2n)^2 \Rightarrow S=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

۴- حاصل‌جمع مکعبات اعداد مسلسل جفت:

$$2^3+4^3+6^3+8^3+.......+(2n)^3 \Rightarrow S=2n^2(n+1)^2$$

۵- حاصل‌جمع مربعات اعداد مسلسل طاق:

$$1^2+3^2+5^2+7^2+.......+(2n-1)^2 \Rightarrow S=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$$

۶- حاصل‌جمع مکعبات اعداد مسلسل طاق:

$$1^3+3^3+5^3+7^3+.......+(2n-1)^3 \Rightarrow S=n^2(2n^2-1)$$

مثال ها:

مثال اول: حاصل‌جمع 72 جمله سلسله حسابی ذیل را دریابید.

$25+29+33+37+..........$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a=25 \\ d=29-25=+4 \\ n=72 \\ S=? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \\ S_{72}=\frac{72}{2}[50+71\cdot 4] \\ S_{72}=36(50+284) \\ S_{72}=36(334) \Rightarrow S_{72}=12024 \end{array}$$

مثال دوم: حاصل‌جمع 25 جمله سلسله حسابی را دریابید که جمله اول 93 و جمله چهارم آن 108 باشد.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=25 \\ a_1=93 \\ a_4=108 \\ S=? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a_4=a_1+3d \\ 108=93+3d \\ 3d=108-93 \\ 3d=15 \\ d=5 \end{array}$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_{25}=\frac{25}{2}[186+24\cdot 5]=\frac{25}{2}(186+120)$$

$$S_{25}=\frac{25}{2}(306)=25\cdot 153=3825$$

مثال سوم: در مجموعه قسمی تصاعد حسابی $374+........+214$ بیست و یک جمله وجود دارد حاصل‌جمع آن را دریابید.

حل:

$$\begin{array}{ll} a_1=374 & S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n) \\ a_n=l=214 & S_n=\frac{21}{2}(374+214) \\ n=21 & S_n=\frac{21}{2}\cdot(588) \\ S_n=? & S_n=21\cdot 294 \\ & S_n=6174 \end{array}$$

مثال چهارم: در سلسله حسابی که جمله اول (5.6) و جمله اخیر آن (45.6) باشد حاصل‌جمع چند جمله آن (2585.6) می‌گردد.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=5.6 \\ l=a_n=45.6 \\ S_n=2585.6 \\ n=? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)/\cdot 2 \\ n(a_1+a_n)=2S_n \\ n=\frac{2S_n}{a_1+a_n} \\ n=\frac{2\cdot(2585.6)}{5.6+45.6}=\frac{5171.2}{51.2}=\frac{51712}{512} \\ \Rightarrow n=101 \text{ جمله} \end{array}$$

مثال پنجم: حاصل‌جمع اعداد مسلسل طبیعی از یک الی 500 را دریابید.

حل:

$$\underbrace{1+2+3+4+5+\dots\dots+500}_{n=500 \text{ جمله}}$$

$$S=\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow S=\frac{500(501)}{2}=250\cdot 501=125250$$

مثال ششم: حاصل‌جمع 54 جمله اول اعداد مسلسل جفت را دریابید.

حل:

$$\underbrace{2+4+6+\dots\dots}_{n=54 \text{ جمله}}$$

$$n=54 \Rightarrow S=n(n+1)=54(55)=2970$$

مثال هفتم: حاصل‌جمع تمام اعداد مسلسل طاق طبیعی $1+2+3+4+\dots\dots+81$ را دریابید.

حل:

$$\underbrace{1+2+3+4+5+\dots\dots+81}_{n=81 \text{ جمله}}$$

سلسله مذکور 40 جمله اعداد جفت و 41 جمله اعداد طاق دارد.

$$n=41 \Rightarrow S=n^2 \Rightarrow S=(41)^2=1681$$

مثال هشتم: حاصل‌جمع تمام اعداد مسلسل جفت $18+19+20+21+22+\dots\dots+110$ را دریابید.

حل: چون سلسله اعداد مذکور از اولین عدد جفت شروع نگردیده بناءً با استفاده از فورمول عمومی عمل می‌نماییم.

$$\left.\begin{array}{l} a_1=18 \\ d=2 \\ a_n=l=110 \\ n=? \\ S=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n=a_1+(n-1)d \\ 110=18+(n-1)2 \\ 110-18=2n-2 \\ 2n=92+2 \\ 2n=94 \Rightarrow n=47 \end{array}$$

$$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S=\frac{47}{2}[2\cdot 18+46\cdot 2]=\frac{47}{2}(36+92)$$

$$S=\frac{47}{2}(128)=3008 \Rightarrow S=3008$$

مثال نهم: حاصل‌جمع بیست جمله اول اعداد ذیل را دریابید.

$$1+4+9+16+25+\dots\dots$$

حل: طوریکه ملاحظه می‌گردد سلسله اعداد مذکور مجموعه مربعات اعداد مسلسل طبیعی می‌باشد، یعنی:

$$1+4+9+16+25+\dots\dots$$

$$\underbrace{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\dots\dots}_{n=20}$$

$$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{20(21)(41)}{6}=2870$$

مثال دهم: در یک صالون نمایش (سینما) 30 قطار چوکی طوری چیده شده که در قطار اول 50 پایه چوکی و در هر قطار بعدی 4 پایه چوکی افزود می‌گردد. گنجایش تماشاچیان صالون مذکور را دریابید.

$$\left.\begin{array}{l} a_1=50 \\ d=4 \\ n=30 \\ S_n=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \\ S_n=15[100+29\cdot 4] \\ S_n=15(100+116) \\ S_n=15(216) \\ S_n=3240 \end{array}$$

مثال یازدهم: پله‌های یک زینه از 45cm آغاز گردیده و به طور یکنواخت الی اخیر کم گردیده طوری که پله اخیر آن 37cm باشد اگر طـول مجمـوعی زینه 451cm باشد، تعداد پله‌های زینه مذکور را دریابید:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 45\,cm \\ a_n &= 37\,cm \\ S_n &= 451\,cm \\ n &= ? \end{aligned}\right\} \begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ 451 &= \frac{n}{2}(45+37) \\ 41\,n &= 451/:41 \\ n &= 11 \end{aligned}$$

مثال دوازدهم: شخصی در روز اول مبلغ 1500 افغانی و در روزهای بعدی هر روز مبلغ 100 افغانی نسبت به روز قبلی، بیـشتر پس‌انـداز نمـوده اسـت. مجموع پس‌انداز پول شخص مذکور را بعـد از یـک مـاه (سـی روز) دریافـت نمایید.

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1500 \\ d &= 100 \\ n &= 30 \\ S_n &= ? \end{aligned}\right\}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{30}{2}[2\cdot 1500 + (30-1)100]$$

$$S_n = 15(3000+2900) = 15(5900) \Rightarrow S_n = 88500$$

تصاعد (ترادف) هارمونیک: یک تصاعد هارمونیک نامیده مـی‌شـود، زمانیکه معکـوس آن یـک تـصاعد حـسابی باشـد، یعنـی $b_n = \frac{1}{a_n}$ گـردد، طوریکه b_n یک تصاعد حسابی باشد، مثلاً:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ یک تصاعد هارمونیک گفته می‌شود، زیرا معکـوس آن $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ اعداد مسلسل طبیعی یک تصاعد حسابی است.

همچنـــان یـــک تـــصاعد حـــسابی اســـت، پـــس معکـــوس آن $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \ldots$ یک تصاعد هارمونیک نامیده می‌شود.

حد وسطی تصاعد هارمونیک (اوسط هارمونیـک): هرگـاه سـه حـد مسلسل a_{n-1} ، a_n و a_{n+1} (طوریکه $n = 2, 3, 4, \ldots$ باشد) از جمله حدود یک تـصاعد هارمونیـک باشـد، پـس $\frac{1}{a_{n-1}}$ ، $\frac{1}{a_n}$ و $\frac{1}{a_{n+1}}$ حتماً سه حـد مسلسل یک تصاعد حسابی می‌گردد. پس با در نظرداشت وسـط حـسابی کـه قبلاً مطالعه نمودیم، می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}{2} = \frac{\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}}{2} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$$

مثال: اوسط هارمونیک 4 و 6 دریافت نمایید.

$$\left.\begin{aligned} a_{n-1} &= 4 \\ a_{n+1} &= 6 \\ a_n &= ? \end{aligned}\right\} a_n = \frac{2a_{n-1}\cdot a_{n+1}}{a_{n-1} + a_{n+1}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{4+6} = \frac{48}{10} = 4.8 \Rightarrow a_n = 4.8$$

دوم- ترادف یا تصاعد هندسی (Geometrical Sequences)

هرگاه در یک ردیف اعداد حاصل تقسیم هرجوره از حـدود متعاقب (حـد مابعد تقسیم حد ماقبل) یک عدد ثابت باشد، تصاعد هندسی نامیده می‌شـود و یا به عباره دیگر اگر یک ترادف اعداد بر اساس اصل ضرب و یا تقسیم استوار باشد، ردیف مذکور تصاعد هندسی را ارائه می‌نماید، که همـین عـدد ثابـت را

نسبت مشترک (Common Ratio) یاد نمود و به (r) یا به (q) نمایش می‌دهند. به همین ترتیب مانند تصاعد حسابی حد (جمله) اول را به (a) نشان می‌دهند.

مثال‌ها:

مثال اول: $5,15,45,135,405,1215,\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{15}{5}=3\\ \frac{45}{15}=3\\ \frac{135}{15}=3\\ \frac{405}{135}=3\end{array}\right\}$$

نسبت مشترک 3 $r=3$ یا $q=3$

تصاعد هندسی متزاید گفته می‌شود. $r>1$

مثال دوم: $240,120,60,30,15,\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{120}{240}=\frac{1}{2}\\ \frac{60}{120}=\frac{1}{2}\\ \frac{30}{60}=\frac{1}{2}\\ \frac{15}{30}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$$

نسبت مشترک $r=\frac{1}{2}$ یا $q=\frac{1}{2}$

تصاعد هندسی متناقص گفته می‌شود. $r<1 \Rightarrow$

مثال سوم: در تصاعدهای هندسی ذیل حد اول و نسبت مشترک آن را بنویسید:

$\langle 1\rangle: 2,10,50,250,\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$a=2 \quad , \quad r=\frac{10}{2}=5$$

$\langle 2\rangle: 3,6,12,24,\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$a=3 \quad , \quad r=\frac{6}{3}=2$$

$\langle 3\rangle: \frac{1}{5},\frac{2}{15},\frac{4}{45},\frac{8}{135},\ldots\ldots\ldots$

$$a=\frac{1}{5} \quad , \quad r=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{5}}=\frac{2}{15}\cdot\frac{5}{1}=\frac{2}{3}\Rightarrow r=\frac{2}{3}$$

مثال چهارم: حد اقل چهار جمله تصاعدهای هندسی ذیل را بنویسید.

$\langle 1\rangle: a=5 \quad , \quad r=5$

$5,25,125,625,3125,\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\langle 2\rangle: a=10 \quad , \quad r=4$

$10,40,160,640,\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\langle 3\rangle: a=100 \quad , \quad r=\frac{1}{5}$

$100,20,4,\frac{4}{5},\frac{4}{25},\ldots\ldots\ldots\ldots$

دریافت جمله اخیر در ترادف (تصاعد) هندسی

Deriving the Formula for the last Term of a Geometrical Sequence

برای این که در ترادف یا تصاعد هندسی آخرین جمله (حد خواسته شده) آن را در کمترین وقت ممکنه دریافت نماییم، درحالیکه a حد اول، r نسبت مشترک و n تعداد جملات تصاعد مذکور مشخص باشد می‌توانیم با تشکیل تصاعد هندسی چنین عمل نماییم.

$$a \quad , \quad ar \quad , \quad ar^2 \quad , \quad ar^3 \quad , \quad ar^4 \quad ,\ldots\ldots\ldots\ldots, ar^{n-1}$$

پس در نتیجه جمله اخیر عبارت از: $\Rightarrow l = ar^{n-1}$

ویا $a_n = a_1 r^{n-1}$

مثال‌ها:

مثال اول: جمله پانزدهم تصاعد هندسی ذیل را دریابید.

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_{15} = ar^{14}$$

$$a_{15} = 1 \cdot (2)^{14}$$

$$a_{15} = 2^{14} = 16384$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 2^0 = 1 \\ r = 2 \\ n = 15 \\ l = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n = a_1 r^{n-1} \\ a_n = 1 \cdot (2)^{14} \\ a_n = 2^{14} \\ a_n = 16384 \end{array}$$

مثال دوم: در تصاعد هندسی که جملـه اول (20) و نـسبت مـشترک (3) باشد جمله یازدهم آن را دریابید.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 20 \\ r = 3 \\ a_{11} = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n = a_1 r^{n-1} \\ a_{11} = ar^{10} \\ a_{11} = 20 \cdot (3)^{10} \\ a_{11} = 20 \cdot 59049 \\ a_{11} = 1180980 \end{array}$$

مثال سوم: در تصاعد هندسی که جملـه سـوم آن 32 و جملـه هـشتم آن 32768 باشد. جمله اول و نسبت مشترک آن را دریابید.

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = 32 \Rightarrow a_3 = ar^2 \cdots\cdots(1) \\ a_8 = 32768 \Rightarrow a_8 = ar^7 \cdots\cdots(2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ar^2}{ar^7} = \frac{32}{32768}$$

$$\frac{1}{r^5} = \frac{1}{1024} \Rightarrow r^5 = 1024$$

$$\sqrt[5]{r^5} = \sqrt[5]{1024} \Rightarrow r = 4$$

$$ar^2 = 32 \cdots\cdots(1)$$

$$a(4)^2 = 32 \Rightarrow a \cdot 16 = 32 \Rightarrow a = \frac{32}{16} \Rightarrow a = 2$$

مثال چهارم: در تصاعد هندسی $1000, 100, 10, \ldots\ldots, \frac{1}{10000}$ چند جمله وجود دارد؟

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1000 = 10^3 \\ r = \frac{1}{10} = 10^{-1} \\ a_n = \frac{1}{10000} = 10^{-4} \\ n = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n = a_1 r^{n-1} \\ 10^{-4} = 10^3 \cdot (10^{-1})^{n-1} \\ 10^{-4} = 10^3 \cdot (10)^{-n+1} \\ 10^{-4} = (10)^{+3-n+1} \\ 10^{-4} = (10)^{-n+4} \end{array}$$

$$\Rightarrow -4 = -n + 4$$

$$n = +4 + 4$$

$n = 8$ جمله

حد وسطی تصاعد هندسی (Geometric Mean)

هرگاه سه حـد مسلـسل یـک تـصاعد هندسـی a_{n-1}، a_n و a_{n+1} (در حالیکه $n = 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$ باشد) را در نظر داشته باشیم جهت دریافت حد وسطی این تصاعد می‌توان چنین نوشت:

$$(a_{n-1})(a_{n+1}) = (a_1 r^{n-2})(a_1 r^n) = a_1^2 r^{2n-2} = (a_1 r^{n-1})^2 = (a_n)^2$$

$$\sqrt{(a_n)^2} = \sqrt{(a_{n-1})(a_{n+1})} \Rightarrow a_n = \sqrt{(a_{n-1})(a_{n+1})}$$

مثال: وسط هندسی اعداد 2 و 50 را دریابید.

$$\left.\begin{array}{l} a_{n-1} = 2 \\ a_{n+1} = 50 \\ a_n = ? \end{array}\right\} a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = \sqrt{2 \cdot 50} = \sqrt{100} = 10$$

در نتیجه اعداد 2,10,50 سه حد مسلسل یک تصاعد هندسی بوده که حد وسطی آن (10) می‌باشد.

شامل سازی جملات در تصاعد هندسی: در تصاعد هندسی جمله اول آن a_1 و جمله اخیر آن a_n باشد و بخواهیم m جمله دیگر را شامل تصاعد مذکور نماییم. لازم است r نسبت مشترک آن را دریافت نماییم تا تصاعد را تشکیل دهیم. پس می‌توان چنین نوشت:

$$a_1, \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{m \text{ جمله}}, an \Rightarrow n = m + 2$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 r^{n-1} = a_1 \cdot r^{m+2-1} = a_1 \cdot r^{m+1}$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 \cdot r^{m+1} \Rightarrow r^{m+1} = \frac{a_n}{a_1}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

مثال‌ها:

مثال اول: در تصاعد هندسی که جمله اول 3 و جمله اخیر آن 192 است پنج جمله دیگر را شامل ساخته و تصاعد آن را تشکیل دهید.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_n = 192 \\ m = 5 \\ r = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[5+1]{\frac{192}{3}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2 \\ \Rightarrow r = 2 \end{array}$$

پس تصاعد مربوطه آن عبارت از: 3,6,12,24,48,96,192

مثال دوم: در تصاعد هندسی ذیل چهار جمله دیگر را شامل ساخته و تصاعد آن را بنوسید.

$$81, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{1}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 81 \\ a_n = \frac{1}{3} \\ m = 4 \\ r = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[5]{\frac{1/3}{81}} = \sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \sqrt[5]{(1/3)^5} = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow r = \frac{1}{3} \end{array}$$

پس تصاعد مربوطه آن: $\Rightarrow 81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}$

حاصل‌جمع n حد یک تصاعد هندسی
(Sum of a Geometrical Sequences)

قبل بر این که برای حاصل‌جمع حدود هندسی فورمول را به دست بیاوریم به حکایت ذیل توجه می‌نماییم.

گویند در دوره کدام پادشاهی، غلامی بود بسا فرهمند و باهوش در محاسبه ریاضی خیلی‌ها مستمند و بازی شطرنج سخت می‌دانست. پادشاه از احوال وی واقف گردیده و بفرمود غلام را حاضر به مسابقه شطرنج با وی سازند.

وقتی غلام شرف‌یاب پادشاه گردید، گفت در صورتی جناب اعلیحضرت را ببرم خواهان پاداش اندکی هستم و آن این که در خانه اول شطرنج یک دانه گندم، در خانه دوم دو دانه، به خانه سوم چهار دانه و به همین ترتیب تعداد دانه‌های گندم را دوچند ساخته تا ختم خانه‌های شطرنج، مجموعه این گندم‌ها می‌خواهم و بس. پادشاه به فکر این که مجموعه آن مقدار ناچیزی خواهد

گردید، این شرط را پذیرفت و با غلام در مبارزه بـازی شـطرنج کمـر بـست و بلافاصله پادشاه بازی را باخت و به محاسبین دربار امر کرد تا دانه‌های گنـدم غلام را حساب کرده و در بوجی انداخته بیاورند، امـا هفتـه‌هـا وقـت را در بـر گرفت تا فقط محاسبین این محاسبه را بروی قلم بیاورند، که بیش از چنـدین هزار کواترلیون می‌گردد و برای محاسبه مقدار آن هفته‌های دیگر طول کشید تا درک نمودند هرگاه روی کره خاکی زمین سه بـار گنـدم کـشت گـردد تـا حاصلات جمع‌آوری شده بتواند چنین مقدار را اکمال نماید که در توان بودجـه مالی شاه مقدور نبود و از غلام طلب بخشش نموده و وی را به منـصب مهـم دربار مقرر فرمود.

از حکایت فوق بر می‌آید که چون خانـه‌هـای شـطرنج (8×8) بـوده کـه مجموعاً 64 خانه می‌گردد و یک سلسله هندسی ذیل تشکیل می‌گردد:

$$1+2^1+2^2+2^3+2^4+.................+2^{63}$$

که رفع طاقت‌های مذکور و مجموعه یک حاصل‌جمع تـصاعد هندسـی را تشکیل می‌دهد، در محاسبه همان عصر و زمان خیلی‌ها مشکل بود.

حالا برای حاصل‌جمع n جمله یک سلسله هندسی که جملـه اول آن a و نسبت مشترک آن r باشد، می‌توان چنین عمل نمود.

$$S=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+..........$$
$$+ar^{n-3}+ar^{n-2}+ar^{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (1)$$

رابطه (1) را ضرب r نسبت مشترک نموده داریم که:

$$rS=ar+ar^2+ar^3+ar^4+....+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n\cdots\cdots(2)$$

حالا از رابطه 2 رابطه (1) را تفریق نموده داریم که:

$$rS=ar+ar^2+ar^3+ar^4+.....+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n\cdots\cdots(2)$$
$$S=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+...+ar^{n-3}+ar^{n-2}+ar^{n-1}\cdots(1)$$

$$\left.\begin{aligned}&rS-S=-a+ar^n\\&S(r-1)=ar^n-a\\&S(r-1)=a(r^n-1)\end{aligned}\right\}\ S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\ \cdots\cdots(1)$$

به همین ترتیب هرگاه در یک سلسله هندسی a_1 حد اول a_n حد اخیر و r نسبت مشترک آن معلوم باشد می‌توان با استفاده از رابطه 1 حاصل‌جمع آن را چنین دریافت نمود.

$$S=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}=\frac{a_1r^n-a_1}{r-1}=\frac{a_1\,r^{n-1}\cdot r-a_1}{r-1}$$

$$S_n=\frac{a_n\cdot r-a_1}{r-1}\cdots(2)$$

مثال‌ها:

مثال اول: حاصل‌جمع سیزده جمله تصاعد هندسی ذیل را دریابید.

$$5+10+20+40+\cdots\cdots\cdots$$

$a=5 \qquad S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{5(2^{13}-1)}{2-1}$

$r=2 \qquad S_n=5(8192-1)$

$n=13 \qquad S_n=5(8191)\Rightarrow S_n=40955$

$S_n=?$

مثال دوم: شخصی مبلغ 35000 دالر سرمایه خویش را به تجارت گذاشته طوریکه در ماه اول هزارم حصه همان سرمایه مفاد نموده است و در ماه بعدی همان مفاد منظماً دوچند گردیده است. معلوم نمایید در ختم یکسال سرمایه وی چند می‌گردد؟

سرمایه شخص 35000$

مفاد ماه اول $35000\cdot\frac{1}{1000}=35\$$

سلسله مفاد در طول ماه‌های یکسال $35+70+140+280+....$

$a=35$, $n=12$, $r=2$, $S_n=?$

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{35(2^{12}-1)}{2-1}$$

$$S_n=35(4096-1)=143325\$$$

سرمایه شخص بعد از یکسال $= 35000\$+143325\$=178325\$$

مثال سوم: حاصل‌جمع هفت حد تصاعد هندسی $20000+4000+800+......$ را دریابید.

$a=2000$, $r=\frac{1}{5}$, $n=7$, $S_n=?$

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_n=\frac{20000\left[\left(\frac{1}{5}\right)^7-1\right]}{\frac{1}{5}-1}=\frac{20000\left(\frac{1}{78125}-1\right)}{-\frac{4}{5}}$$

$$S_n=\frac{20000\left(\frac{-78124}{78125}\right)}{-\frac{4}{5}}=20000\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{78124}{78125}$$

$$S_n=\frac{1953100000}{78125}=24999.68$$

مثال چهارم: حاصل‌جمع ترادف هندسی $50+150+450+......+5952450$ را دریابید.

$a=50$, $r=3$, $l=5952450$, $S_n=?$

$$S_n=\frac{a_nr-a_1}{r-1}=\frac{5952450\cdot 3-50}{3-1}$$

$$S_n=\frac{17857350-50}{2}=\frac{17857300}{2}$$

$$S_n=8928650$$

مثال پنجم: در ترادف هندسی که حد اول $\left(\frac{1}{8}\right)$ نسبت مشترک شان (2) است حاصل‌جمع چند جمله آن $63\frac{7}{8}$ می‌گردد.

$a=\frac{1}{8}$, $r=2$, $S_n=63\frac{7}{8}$, $n=?$

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$a(r^n-1)=S_n(r-1)$$

$$r^n-1=\frac{S_n(r-1)}{a}$$

$$r^n=\frac{S_n(r-1)}{a}+1$$

$$2^n=\frac{63\frac{7}{8}(2-1)}{\frac{1}{8}}+1$$

$$2^n=63\frac{7}{8}\cdot 8+1$$

$$2^n=\frac{511}{8}\cdot 8+1$$

$$2^n=512$$

$$2^n=2^9$$

$$n=9$$

مثال ششم: در تصاعد هندسی که جمله اول 5 و جمله اخیر آن 10935 و حاصل‌جمع آن جملات 16400 باشد نسبت مشترک آن را دریابید.

$a=5$, $l=10935$, $S=16400$, $r=?$

$$S=\frac{a_nr-a_1}{r-1}\Rightarrow S(r-1)=a_nr-a_1$$

$$Sr-S=a_nr-a_1\Rightarrow Sr-a_nr=S-a_1$$

$$r(S-a_n)=S-a_1\Rightarrow r=\frac{S-a_1}{S-a_n}$$

$$r=\frac{16400-5}{16400-10935}=\frac{16395}{5465}=3$$

$$\Rightarrow r=3$$

حاصل‌جمع سلسله‌های نامحدود هندسی
(Sum of an Infinite Geometrical Series)

هرگاه در سلسله‌های هندسی تعداد جملات آن نامحدود باشد یعنی $(n\to\infty)$ در این صورت سلسله‌های مذکور را نامحدود می‌نامند و به دو نوع می‌باشد.

۱- هرگاه در این نوع سلسله‌ها $(r>1)$ باشد سلسله‌های مذکور را متباعد (Divergent Sequence) می‌نامند که در این حالت حد اخیر سلسله‌های مذکور به طرف بی‌نهایت تقرب خواهد نمود، یعنی $(a_n\to\infty)$ پس حاصل‌جمع آن عبارت از:

$$S_n=\frac{a_nr-a_1}{r-1}=\frac{\infty\cdot r-a_1}{r-1}=\frac{\infty-a_1}{r-1}=\frac{\infty}{r-1}=\infty$$

$$\Rightarrow S_n=\infty$$

۲- هرگاه در این نوع سلسله‌های $(r<1)$ باشد سلسله‌های مذکور را متقارب (Convergent Sequence) می‌نامند که در این حالت حد اخیر سلسله‌های مذکور به طرف صفر تقرب خواهد نمود، یعنی $(a_n\to 0)$ پس حاصل‌جمع آن عبارت از:

$$S_n=\frac{a_nr-a_1}{r-1}=\frac{0\cdot r-a_1}{r-1}=\frac{0-a_1}{r-1}=\frac{-a_1}{r-1}=\frac{-a_1}{-(1-r)}=\frac{a_1}{1-r}$$

$$\Rightarrow S_\infty=\frac{a_1}{1-r}$$

مثال‌ها:

مثال اول: حاصل‌جمع سلسله اعداد ذیل را دریابید:

$$5+20+80+320+1280+\dots\dots\dots\dots$$

حل: چون $n\to\infty$ می‌نمایند پس سلسله مذکور، هندسی نامحدود می‌باشد.

و از جانبی: $r=\frac{20}{5}=4\Rightarrow r>1$

پس سلسله مذکور متباعد است پس حاصل‌مع بی‌نهایت جملات آن $S_\infty=\infty$ می‌گردد.

مثال دوم: حاصل‌جمع سلسله اعداد ذیل را دریابید.

$$4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots\dots\dots\dots\dots$$

حل: چون $n\to\infty$ می‌نماید پس سلسله مذکور هندسی نامحدود می‌باشد.

و از جانبی: $r=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow r<1$

پس سلسله مذکور متقارب است پس حاصل‌جمع بی‌نهایت جملات آن عبارت از:

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-r}$$

$$\left.\begin{array}{l}a_1=4\\ r=\frac{1}{2}\end{array}\right\}S_\infty=\frac{4}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=4\cdot 2=8$$

$$\Rightarrow S_\infty=8$$

یادداشت: چون می‌دانیم اعداد اعشاری متوالی در شکل سلسله‌های متقارب هندسی ظاهر شده می‌تواند، بناءً می‌توانیم اعداد مذکور را به کسر عام چنین تبدیل نماییم.

مثال اول: کسر اعشاری متوالی $0.\overline{3}$ را به کسر عام تبدیل نمایید.

$$0.\overline{3}=0.3333333333\dots\dots\dots$$

$$=0.3+0.03+0.003+0.0003+0.00003+\dots\dots\dots$$

$$a_1=0.3$$

پس سلسله مذکور متقارب است، زیرا:

$$r=\frac{0.03}{0.3}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}\Rightarrow r<1$$

$$S_{\infty}=\frac{a_1}{1-r}\Rightarrow S_{\infty}=\frac{0.3}{1-\frac{1}{10}}=\frac{0.3}{\frac{9}{10}}=0.3\cdot\frac{10}{9}$$

$$S_{\infty}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 0.3333..........=\frac{1}{3}$$

مثال دوم: کسر اعشاری متوالی $0.(54)$ را به کسر عام تبدیل نمایید.

$$0.(54)=0.\overline{54}=0.54545454.....................$$

$$=0.54+0.0054+0.000054+0.00000054+..............$$

$$a_1=0.54$$

سلسله متقارب است: $r=\frac{0.0054}{0.54}=\frac{1}{100}\Rightarrow r<1$

$$S_{\infty}=\frac{a_1}{1-r}=\frac{0.54}{1-\frac{1}{100}}=\frac{0.54}{\frac{99}{100}}=0.54\cdot\frac{100}{99}=\frac{54}{99}$$

$$S_{\infty}=\frac{6}{11}$$

$$\Rightarrow 0.(54)=\frac{6}{11}$$

مثال سوم: کسر اعشاری متوالی $(2.\overline{51})$ به کسر عام تبدیل نمایید.

$$2.\overline{51}=2+\underbrace{0.51+0.0051+0.000051+........}_{S_{\infty}}$$

$$a_1=0.51$$

سلسله متقارب است. $r=\frac{0.0051}{0.51}=\frac{51}{5100}=\frac{1}{100}\Rightarrow r<1$

$$S_{\infty}=\frac{a_1}{1-r}=\frac{0.51}{1-\frac{1}{100}}=\frac{0.51}{\frac{99}{100}}=0.51\cdot\frac{100}{99}=\frac{51}{99}=\frac{17}{33}$$

$$\Rightarrow 2.\overline{51}=2+S_{\infty}$$

$$2.\overline{51}=2+\frac{17}{33}=\frac{66+17}{33}=\frac{83}{33}$$

مثال چهارم: کسر اعشاری متوالی $5.2(6)$ را به کسر عام تبدیل نمایید.

$$5.2(6)=5.2\overline{6}=5.26666666666............$$

$$=5+0.2+\underbrace{0.06+0.006+0.0006+0.00006+..........}_{S_{\infty}}$$

$$a_1=0.06$$

سلسله متقارب است. $r=\frac{0.006}{0.06}=\frac{6}{60}=\frac{1}{10}\Rightarrow r<1$

$$S_{\infty}=\frac{a_1}{1-r}=\frac{0.06}{1-\frac{1}{10}}=\frac{0.06}{\frac{9}{10}}=0.06\cdot\frac{10}{9}=\frac{0.6}{9}$$

$$S_{\infty}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow 5.2(6)=5+0.2+S_{\infty}$$

$$=5+\frac{2}{10}+\frac{1}{15}=5+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}=\frac{75+3+1}{15}=\frac{79}{15}$$

$$\Rightarrow 5.2(6)=\frac{79}{15}$$

استقرای ریاضی

جهت اثبات قضایا و روابط ریاضی سه طریقه وجود دارد، که عبارت اند از:

۱- روش مستقیم:

در این روش از تحلیل منطقی فرضیه‌های که در قضیه ارائه گردیده است، می‌توان صحت موضوع مورد بحث را به طور مستقیم ثبوت نمود، که در ساحه ریاضیات مانند الجبر، هندسه و مثلثات موارد استعمال زیاد دارد.

مثال: ثبوت می‌نماییم که مجموعه n جمله اعداد مسلسل طبیعی تـاق n^2 می‌باشد.

فرض مسئله: $1+3+5+7+9+.....+(2n-1)=n^2$

ثبوت: چون اعداد فوق یک سلسله حسابی را تشکیل می‌دهد، بناءً با استفاده از فورمول حاصل‌جمع قسمی n جمله تصاعد حسابی می‌توان چنین نوشت:

$$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1=1 \\ d=2 \\ n=n \\ S_n=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}[2\cdot 1+(n-1)\cdot 2] \\ S_n=\frac{n}{2}(2+2n-2)=\frac{n}{2}(2n)=n^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow S_n=n^2$$

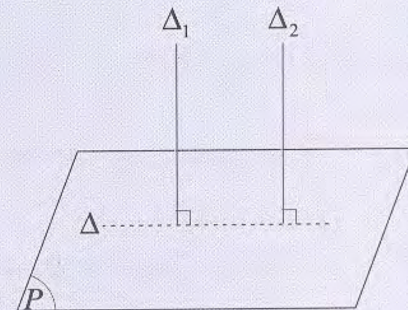
۲- روش غیر مستقیم:

در این روش عکس نتیجه مطلوب را فرض نموده و با تحلیل این فرضیه حصول یک نتیجه غیر ممکن به ثبوت می‌رسد و منشأ اصلی تضاد همان فرضیه اولی قبول شده و نقض آن مورد تائید قرار می‌گیرد، بدین ترتیب نتیجه مطلوب به طور غیر مستقیم حاصل می‌شود.

مثلاً: هرگاه دو خط مستقیم بالای یک مستوی عمود باشند این خطوط بین هم موازی اند.

مفروض: فرضاً دو خط Δ_1 و Δ_2 بالای خط مستقیم Δ شامل مستوی P عمود اند. پس: $\Delta_1 \perp P$ و $\Delta_2 \perp P$.

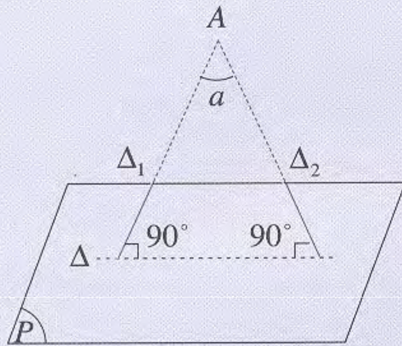
ترسیم:



مطلوب: می‌خواهیم ثبوت نمایم که: $\Delta_1 // \Delta_2$

ثبوت: (به روش غیر مستقیم)

فرضاً خطوط Δ_1 و Δ_2 بالای مستوی P عمود اند، اما این خطوط باهم موازی نباشند. پس خطوط مذکور، خود شان یا امتداد یافته شان یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند که زاویه بین این دو خط متقاطع $0<\alpha\leq 90^\circ$ خواهد بود در این صورت یک مثلث را تشکیل می‌دهند.



در نتیجه چون یک مثلث بیشتر از یک زاویه قایمه (90°) ندارد بناءً کدام مثلث تشکیل نمی‌گردد و بین خطوط Δ_1 و Δ_2 کدام زاویه تشکیل نمی‌گردد و یک دیگر را قطع نمی‌کنند، بناءً دو خط مستقیم مانند Δ_1 و Δ_2 که نه خود شان و نه امتداد یافته شان کدام نقطه مشترک نداشته باهمدیگر موازی اند.

۳- روش استقرای ریاضی

این روش که معمولاً در اثبات روابط و قضایای مربوط به اعداد طبیعی و ترادف‌ها به کار می‌رود، آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

در این روش هرگاه $P(n)$ حکمی درباره اعداد طبیعی n داده شده باشد، دو مرحله را مدنظر می‌گیریم.

مرحله اول: صحت رابطه $P(n)$ را برای $n=1$ وضع نموده صحت آن را

تائید می‌نمایم.

مرحله دوم: که به نام فرضیه استقرای یاد می‌گردد، برای $n=k$ صحت مسئله را قبول نموده و برای $n=k+1$ می‌خواهیم صحت رابطه را نشان دهیم و یا قضیه را اثبات نماییم.

مثال‌ها:

مثال اول: ثبوت می‌نماییم که برای هر عدد طبیعی $n \in IN$ رابطه ذیل صدق می‌نماید:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+.......+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

ثبوت: برای ثبوت موضوع خاصیت $P(n)$ را برای هر قیمت از اعداد طبیعی می‌توان در شکل ذیل در نظر گرفت:

$$P(n):1^2+2^2+3^2+4^2+......+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$P(1):1^2=\frac{1}{6}(1)(1+1)(2\cdot1+1)=\frac{1}{6}\cdot2\cdot3=\frac{1}{6}\cdot6=1$$

$$\Rightarrow 1^2=1$$

مرحله اول: برای k=1 داریم که:

$$P(1):1^2=\frac{1}{6}(1)(1+1)(2\cdot1+1)=\frac{1}{6}\cdot2\cdot3=\frac{1}{6}\cdot6=1$$

$$\Rightarrow 1^2=1$$

مرحله دوم: برای $n=k$ موضوع صحت دارد، یعنی:

$$P(k)=1^2+2^2+3^2+.......+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

پس حالا برای $P(k+1)$ می‌خواهیم صحت مسئله را به اثبات برسانیم:

بناءً به اطراف مساوات $(k+1)^2$ را جمع نموده داریم که:

$$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

$$+(k+1)^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

پس صحت مسئله برای $n=k+1$ وجود دارد، زیرا:

$$1^2+2^2+3^2+......+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\Rightarrow n=k+1 \Rightarrow 1^2+2^2+3^2+.....+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)$$

$$(k+1+1)[2(k+1)+1]$$

$$1^2+2^2+3^2+.....+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+2+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+.....+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

مثال دوم: ثبوت می‌نمایم که برای n هر عدد طبیعی رابطه ذیل صدق می‌نمایید:

$$2^2+4^2+6^2+8^2+....+(2n)^2=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

ثبوت: برای اثبات موضوع خاصیت $p(n)$ را برای هر قیمت از اعداد

طبیعی می‌توان چنین نوشت:

$$P(n): 2^2+4^2+6^2+8^2+.....+(2n)^2=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

مرحله اول: برای $k=1$ داریم که:

$$p(1):(2n)^2=(2\cdot 1)^2=2^2=\frac{2}{3}\cdot 1(1+1)(2\cdot 1+1)=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=4$$

$$\Rightarrow 2^2=4$$

مرحله دوم: برای $n=k$ موضوع صحت دارد یعنی:

$$p(k)=2^2+4^2+6^2+.....+(2k)^2=\frac{2}{3}k(k+1)(2k+1)$$

پس حالا برای $P(k+1)$ می‌خواهیم صحت مسئله را به اثبات برسانیم.

بناءً به اطراف مساوات $[2(k+1)]^2$ را جمع نموده داریم که:

$$\Rightarrow 2^2+4^2+6^2+.....+(2k)^2+[2(k+1)]^2=\frac{2}{3}k(k+1)$$

$$(2k+1)+[2(k+1)]^2$$

$$=\frac{2}{3}k(k+1)(2k+1)+4(k+1)^2$$

$$=\frac{2k(k+1)(2k+1)+12(k+1)^2}{3}$$

$$=\frac{2}{3}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]$$

$$=\frac{2}{3}(k+1)(2k^2+k+6k+6)$$

$$=\frac{2}{3}(k+1)(2k^2+7k+6)$$

$$=\frac{2}{3}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

پس صحت مسئله برای $n=k+1$ وجود دارد، زیرا:

$$2^2+4^2+6^2+......+(2n)^2=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

$$\Rightarrow n=k+1 \Rightarrow 2^2+4^2+6^2+...+[2(k+1)]^2$$

$$=\frac{2}{3}(k+1)(k+1+1)[2(k+1)+1]$$

$$2^2+4^2+6^2+.....+[2(k+1)]^2=\frac{2}{3}(k+1)(k+2)(2k+2+1)$$

$$2^2+4^2+6^2+....+[2(k+1)]^2=\frac{2}{3}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

تمرینات فصل چهارم

ترادف‌های ذیل را برای قیمت‌های داده شده n محاسبه نمایید.

1) $a_n = \frac{1+n}{2n}, a_5 = ?$

2) $a_n = \frac{5+(-1)^n}{n}, a_4 = ?$

3) $a_n = 5+(-2)^n, a_7 = ?$

4) $a_n = \sqrt{\frac{n+1}{n^2}}, a_{15} = ?$

5) $a_n = (2n-1)^3, a_3 = ?$

6) $a_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2_n+1),\ a_5 = ?$

تصاعدهای حسابی ذیل جمله سساول و فرق مشترک آن را دریابید.

7) 35,41,47,53,......

8) 79,88,97,106,........

9) 12,15.5,19,22.5,.........

10) 64,59,54,49,44,.......

11) 107,99,91,83,75,........

12) $\frac{4}{9},\frac{7}{9},\frac{11}{9},\frac{14}{9},.........$

13) $35,\frac{172}{5},\frac{169}{5},\frac{164}{5},.......$

14) $7m^3, 7m^3-3, 7m^3-6, 7m^3-9,.........$

15) $8x^2, 11x^2, 14x^2, 17x^2,.........$

16) $m-r, m+r, m+3r, m+5r,......$

تصاعد حسابی را تشکیل دهید که جمله اول و فرق مـشترک شـان ذیـلاً داده شده است:

17) $a=5, d=11$

18) $a=48, d=\frac{2}{5}$

19) $a=\frac{9}{5}, d=0.4$

20) $a=-75, d=-3$

21) $a=110, d=-4$

22) $a=3\sqrt{2}, d=\sqrt{2}$

23) $a=m-5r, d=m+2r$

24) $a=3x^2, d=5x^2$

25) $a=\frac{1}{2}, d=\frac{8}{11}$

26) $a=2P, d=3n^2$

کدام یک از ترادف‌های ذیل یک تصاعد حسابی را نشان می‌دهد.

27) 5,14,23,32,.........

28) 79,64,49,34,........

29) 1.42,4.92,8.42,11.92,..........

30) 7,10,14,19,.........

31) 20,10,0,−10,−20,........

32) $3x^2, 4x^3, 5x^4, 6x^5,.........$

33) $3m, 11m, 19m, 27m,........$

34) $3\frac{1}{5},\frac{14}{5},2\frac{2}{5},2,.........$

35) $5\sqrt{3}, 7\sqrt{3}, 9\sqrt{3}, 11\sqrt{3},........$

36) 6,12,24,48,96,..........

به اساس فورمول حد اخیر در تصاعد حسابی سوالات ذیل را حل نمایید.

۳۷) جمله هفتاد و پنجم تصاعد حسابی $19,24,29,......$ را دریابید.

۳۸) جمله سی و هفتم تصاعد حسابی $98,90,82,74,.....$ را دریابید.

۳۹) جمله پانزدهم تصاعد حسابی $5\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -4\sqrt{3},.......$ را دریابید.

۴۰) جملـــه یکـــصدو بیـــست و یکـــم تـــصاعد حـــسابی $5m, 6m+p, 7m+2p,.....$ را دریابید.

۴۱) هرگاه در یک تصاعد حسابی جمله اول آن 3 و جمله هفـدهم آن 83 باشد جمله چهل و پنجم آن را دریابید.

۴۲) درتصاعد حسابی که جمله چهارم آن 33 و جمله یازدهم آن 89 باشد جمله اول و فرق مشترک آن را دریابید.

۴۳) در تصاعد حسابی که جملـه پـنجم آن 10 و جملـه سـیزدهم آن 50 باشد جمله دوصدو پنجاهم آن را دریابید.

۴۴) درتصاعد حسابی کـه جملـه اول آن 9 و جملـه اخیـر آن 219 اسـت هرگاه تفاضل مشترک این تصاعد ۷ باشد، تعداد جملات آن را دریابید.

۴۵) در تصاعد حسابی که جمله اول 35 و جمله اخیـر آن 185- اسـت در صورتیکه تعداد جملات آن بیست‌ویک جمله باشد فرق مشترک آن را دریابید.

۴۶) هرگاه در یک تصاعد حسابی $a_n = 217$ و $a_5 = 31$ و $n = 36$ باشد، a_1 را دریابید.

به اساس فورمول شامل‌سازی جملات در تصاعد حسابی سوالات ذیـل را حل نمایید.

۴۷) در بین تصاعد حسابی که جمله اول آن ۷ و جمله اخیـر آن ۳۲ اسـت ۴ جمله دیگر را شامل ساخته تصاعد آن را بنوسید.

۴۸) در بین تصاعد حسابی ذیل ۵ جمله دیگر را شامل سازید و تصاعد آن را بنوسید.

$35,\cdots\cdots,119$

۴۹) در بین تصاعد حسابی $25,............,81$ هفت جمله دیگر را شامل ساخته تصاعد آن را بنوسید.

۵۰) در بین تصاعد حسابی $30,............,19$ چهار جمله دیگر را شـامل ساخته تصاعد آن را بنوسید.

۵۱) در بین تصاعد حسابی $47P,............,5P$ شـش جملـه دیگـر را شامل ساخته فرق مشترک آن را دریابید.

۵۲) اولاً در بین تصاعد حسابی $219,............,119$ سه جمله دیگر را شامل سازید، بعداً جمله سی و دوم آن را دریابید.

۵۳) حد وسطی ترادف حسابی بین اعداد 8,12 را دریابید.

۵۴) حد وسطی ترادف حسابی بین اعداد 17 و 13 را دریابید.

۵۵) وسط حسابی اعداد 9 و 21 چند است.

مجموعه قسمی ترادف (تصاعد) های ذیل را بنویسید؟

56) $1+2+3+4+....$

57) $2+4+6+8+.....$

58) $1+8+27+64+......$

59) $3+5+7+9+11+......$

60) $2+5+10+17+26+.....$

حاصل‌جمع مجموعه قسمی داده شده ذیل را محاسبه نمایید؟

61) $\sum_{i=1}^{10}(2i-1)=?$

62) $\sum_{i=0}^{7}(i^2+2)=?$

63) $\sum_{n=1}^{12}(2n+3)=?$

64) $\sum_{k=1}^{5}(5k-3)^2=?$

65) $\sum_{k=1}^{6}(k-5)^3=?$

حاصل‌جمع سلسله های حسابی ذیل را دریابید.

۶۶) حاصل‌جمع سلسله حسابی $7+11+15+.........+207$ را دریابید.

۶۷) حاصل‌جمع سی و پنج جمله سلسله حسابی $95+110+125+......$ را دریابید.

۶۸) مجموعه 73 جمله سلسله حسابی $18+19.5+21+......$ را دریابید.

۶۹) حاصل سه صد جمله سلسله حسابی را دریابید که جمله اول 17 و جمله پنجم 33 باشد.

۷۰) در سلسله حسابی که جمله اول 43 جمله اخیر آن 485- و حاصل‌جمع جملات آن 014807 باشد چند جمله وجود دارد.

۷۱) در سلسله حسابی که جمله اول آن 10 و حاصل‌جمع آن 9435 و دارای 51 جمله باشد. جمله اخیر آن را دریابید.

۷۲) حاصل‌جمع اعداد مسلسل طبیعی از یک الی 250 را دریابید.

۷۳) حاصل‌جمع اعداد مسلسل طبیعی $13+14+15+......+86$ را دریابید.

۷۴) حاصل هفتاد دو جمله اعداد مسلسل طبیعی جفت اول را دریابید.

۷۵) حاصل‌جمع اعداد مسلسل طبیعی جفت $2+4+6+......+360$ را دریابید.

۷۶) حاصل‌جمع اعداد مسلسل طبیعی جفت $18+20+22+......+98$ را دریابید.

۷۷) حاصل‌جمع تمام اعداد جفت مسلسل $1+2+3+4+5+......+137$ را دریابید.

۷۸) حاصل‌جمع شصت جمله اعداد مسلسل طبیعی طاق اول را دریابید.

۷۹) حاصل‌جمع تمام اعداد طاق $1+2+3+4+......+720$ رادریابید.

۸۰) حاصل‌جمع اعداد طاق مسلسل $1+3+5+7+......+121$ را دریابید.

۸۱) حاصل‌جمع اعداد مسلسل طاق $33+35+37+......+233$ را دریابید.

۸۲) هرگاه در یک تصاعد حسابی جمله اول آن $a_1=\frac{1}{3}$ و $a_n=8\frac{1}{3}$ و $n=13$ باشد حاصل‌جمع (S_n) را دریابید.

۸۳) هرگاه در یک تصاعد حسابی $a_1=14$ و $S_n=85$ و $n=17$ باشد (a_n) را دریابید.

۸۴) حاصل‌جمع 120 جمله مربعات اعداد طبیعی را دریابید.

۸۵) حاصل‌جمع 100 جمله $(1+8+27+64+....)$ را دریابید.

۸۶) حاصل‌جمع هشتاد جمله مربعات اعداد مسلسل جفت را دریابید.

۸۷) حاصل‌جمع 15 جمله مربعات اعداد مسلسل طاق را دریابید.

۸۸) حاصل‌جمع 50 جمله $1^3+3^3+5^3+7^3+.....$ را دریابید.

۸۹) اوسط هارمونیکی اعداد (13) و (7) را دریابید.

۹۰) اوسط هارمونیکی اعداد (1) و (9) را دریافت نمایید.

با استفاده از فورمول حد اخیر در تصاعد هندسی سوالات ذیل را حل نمایید.

۹۱) جمله یازدهم تصاعد هندسی $2,6,18,..........$ را دریابید.

۹۲) جمله شانزدهم تصاعد هندسی $5,10,20,40,........$ را دریابید.

۹۳) جمله ده هم تصاعد هندسی $\frac{1}{25},\frac{1}{5},1,5,........$ را دریابید.

۹۴) جمله نهم تصاعد هندسی $4^{-2},4^{-1},4^{0},..........$ را دریابید.

۹۵) جمله هشتم تصاعد $512,256,128,..........$ را دریابید.

۹۶) جمله هفتم تصاعد هندسی را دریابید که جمله اول و نسبت مشترک آن ۶ باشد.

۹۷) در تصاعد هندسی که جمله اول ۱۰۰۰ و نسبت مشترک آن ۰,۱ باشد جمله دهم را دریابید.

۹۸) حد سی و پنجم تصاعد هندسی $7,-7,7,\ldots\ldots$ را دریابید.

۹۹) حد دهم تصاعد هندسی $1,\sqrt{5},5,\ldots\ldots\ldots\ldots$ را دریابید.

۱۰۰) درتــصاعد هندســی $\frac{5}{36},\frac{5}{12},\frac{5}{4},\ldots\ldots\ldots\ldots,\frac{405}{4}$ چنـد جملـه موجود است.

۱۰۱) در تصاعد هندسی $1,\ldots\ldots\ldots\ldots,2048,1024$ تعداد جمـلات آن را دریابید.

۱۰۲) در تصاعد هندسی که جمله سوم ۸۰ و جمله هفتم آن ۵۱۲۰ باشـد نسبت مشترک آن را دریابید.

۱۰۳) در تصاعد هندسی که جمله دوم ۶۰۰۰ و جمله ششم آن ۳۷۵ باشد جمله اول آن را دریابید.

۱۰۴) در تصاعد هندسی که جمله اخیر آن ۸۴۰۳۵ ، نسبت مشترک آن ۷ و تعداد جملات آن ۶ جمله می‌باشد. جمله اول آن را دریابید.

۱۰۵) در تصاعد هندسی که جملـه اول ۵ و جملـه اخیـر آن ۶۴۰ و تعـداد جملات آن ۸ جمله باشد نسبت مشترک آن را دریابید.

با استفاده از فورمول حد وسطی تصاعد هندسی و شامل‌سازی جمـلات در تصاعد هندسی سوالات ذیل را حل نمایید.

۱۰۶) وسط هندسی اعداد (2) و (18) را دیابید.

۱۰۷) حد وسطی تصاعد هندسی 25، ( )، 4 را دریابید.

۱۰۸) در بین تصاعد هندسی که جملـه اول آن ۷ و جملـه اخیـر آن ۸۹۶ می‌باشد. شش جمله دیگر را شامل ساخته تصاعد آن را بنوسید.

۱۰۹) در بین تصاعد هندسی که جمله اول آن ۵ و جملـه اخیـر آن ۱۲۱۵ است پنج جمله دیگر را شامل ساخته تصاعد آن را بنوسید.

۱۱۰) در بین تصاعد هندســی $320,\ldots\ldots\ldots\ldots,5$ بـه تعـداد پـنج جملـه دیگر را شامل ساخته تصاعد آن را بنوسید.

۱۱۱) در بین تصاعد هندسی $\frac{1}{100},\ldots\ldots\ldots\ldots,1000$ به تعداد چهارجمله دیگر را شامل ساخته تصاعد آن را بنوسید.

۱۱۲) در بین تصاعد هندسی $2m^{3},\ldots\ldots\ldots\ldots,1250m^{13}$ به تعداد سـه جمله دیگر را شامل ساخته تصاعد آن را بنوسید.

با استفاده از فورمول‌های حاصل‌جمع n جمله تصاعد هندسی، حاصل‌جمع سلسله های ذیل را دریابید.

۱۱۳) حاصل‌جمـع ده جملـه تـصاعد هندسـی $7+14+28+\ldots\ldots$ را دریابید.

۱۱۴) حاصل‌جمـع ده جملـه تـصاعد هندسـی $5+15+45+\ldots\ldots$ را دریابید.

۱۱۵) حاصل‌جمع هشت جمله تصاعد هندسی $2+10+50+\ldots\ldots$ را دریابید.

۱۱۶) حاصل‌جمع هفت جمله تـصاعد هندسـی $2+8+32+\ldots\ldots$ را دریابید.

۱۱۷) حاصل‌جمع شش جمله تصاعد هندسی $500+250+125+\ldots$ را دریابید.

۱۱۸) حاصل‌جمع هفت جمله تصاعد هندسی را دریابید که جمله اول ۲۴۳ و نسبت مشترک شان 3^{-1} باشد.

۱۱۹) حاصل‌جمع هشت جمله تصاعد هندسی را دریابید که جملـه اول آن ۹۰ ، جمله اخیر آن ۵۷۶۰ و نسبت مشترک شان ۲ باشد.

۱۲۰) حاصل‌جمع تصاعد هندسی $7+21+63+\ldots\ldots+15309$ را دریابید.

۱۲۱) حاصل‌جمع تصاعد هندسـی $11+55+275+\ldots+21484375$ را دریابید.

۱۲۲) حاصل‌جمع تصاعد هندسی $5^{-3}+5^{-2}+5^{-1}+......+625$ را دریابید.

۱۲۳) حاصل‌جمع تصاعد هندسی $3^{0}+3^{1}+3^{2}+..........+3^{7}$ را دریابید.

۱۲۴) حاصل‌جمع تصاعد هندسی $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+......+512$ را دریابید.

۱۲۵) حاصل‌جمع تصاعد هندسی $2^{5}+2^{7}+2^{9}+.........+2^{15}$ را دریابید.

۱۲۶) حاصل‌جمع سلسله هندسی اعداد $7+35+175+875+......$ را دریابید.

۱۲۷) حاصل‌جمع سلسله هندسی اعداد $5^{0}+5^{1}+5^{2}+5^{3}+........$ را دریابید.

۱۲۸) حاصل‌جمع سلسله هندسی اعداد $3^{2}+3^{1}+3^{0}+........$ را دریابید.

۱۲۹) حاصل‌جمع سلسله هندسی اعداد $8+4+2+1+.........$ را دریابید.

۱۳۰) با استفاده از سلسله‌های متقارب هندسی کسرهای اعشاری متوالی ذیل را به کسر عام تبدیل نمایید.

$a=0.\overline{5}$

$b=0.\overline{7}$

$c=0.\overline{6}$

$d=0.\overline{27}$

$e=0.\overline{495}$

$f=2.\overline{3}$

$g=51.\overline{36}$

$h=135.\overline{147}$

۱۳۱) با استفاده از سلسله‌های متقارب هندسی کسر های اعشاری مرکب متوالی ذیل را به کسر عام تبدیل نمایید.

$a=1.2(5)$

$b=3.51(3)$

$c=14.3(27)$

$d=325.12(63)$

$e=0.452(6)$

با استفاده از استقرای ریاضی صحت مسئله‌های ذیل را به اثبات رسانید.

132) $1+2+3+4+......+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

133) $2+4+6+8+.....+2n=n(n+1)$

134) $1+3+5+7+.....+2n-1=n^{2}$

135) $1^{3}+2^{3}+3^{3}+....+n^{3}=\frac{1}{4}n^{2}(n+1)^{2}$

136) $1^{2}+3^{2}+5^{2}+....+(2n-1)^{2}=\frac{1}{3}n(4n^{2}-1)$

137) $1^{3}+3^{3}+5^{3}+....+(2n-1)^{3}=n^{2}(2n^{2}-1)$

فصل پنجم

لوگارتم (Logarithm)

لوگارتم از اصطلاح الگوریتم (Algorithme) به معنی (فن محاسبه) آمده است که یک مبحث مهم ریاضیات بوده و عملیات مانند ضرب، تقسیم و به توان رسـیدن را چنـدین مراتبـه سـاده و آسـان مـی‌سـازد، مـثلاً محاسـبه $(3.51)^{32}$ یـا $(17.049)^{3.052}$ و غیره بطور مستقیم مشکلات زیاد خواهـد داشـت، امـا توسـط عملیه لوگارتم به آسانی، دقیق و به وقت کم حل شده می‌تواند.

پس برای این که به تعریف لوگارتم نزدیک شویم بـه جـدول زیـر توجـه فرمایید.

عدد	قاعده	لوگارتم	توضیح اینکه
$5^3=125$	5	3	عدد 3 لوگارتم 125 است به قاعده 5
$4^4=256$	4	4	عدد 4 لوگارتم 256 است به قاعده 4
$7^2=49$	7	2	عدد 2 لوگارتم 49 است به قاعده 7
$10^4=10000$	10	4	عدد 4 لوگارتم 10000 است به قاعده 10
$10^{-3}=\frac{1}{1000}$	10	-3	عدد 3- لوگارتم $\frac{1}{1000}$ است به قاعده 10
$3^0=1$	3	0	صفر لوگارتم 1 است به قاعده 3
$8^1=8$	8	1	عدد 1 لوگارتم 8 است به قاعده 8

بناءً به این مقدمه می‌توان لوگارتم را به شرح ذیل تعریف نمود:

تعریف: لوگارتم عبارت از طرز ارائه دیگر طاقت مـی‌باشـد و یـا بـه عبـاره دیگر لوگارتم عبارت از دریافت طاقت‌نما مجهول می‌باشد. پس می‌توان گفت لوگارتم N به قاعده a عددیست مانند x در صورتیکه بین این سه مقدار رابطه ذیل برقرار باشد.

$$N=a^x \Leftrightarrow log_a N=x$$

توضیح این کـه x عبـارت از لوگـارتم عـدد N در قاعـده a (Base) نامیده می‌شود، در رابطه فوق عدد $N>0$ و $1\neq a>0$ یک عـدد انتخـابی مثبت می‌باشد، درحالیکه $x\in IR$ یک عدد حقیقی است.

در صورتیکه قیمت x معلوم باشد عدد N را انتی لوگارتم x می‌نامند.

مثلاً: $2^3=8 \Rightarrow log_2 8=3$

پس 3 لوگارتم عدد 8 و عدد 8 را انتی‌لوگارتم 3 می‌نامند.

مثال‌ها:

طاقت‌های ذیل را در شکل افاده لوگارتمی آن بنویسید:

1- $5^4=625 \Rightarrow log_5 625=4$

2- $10^2=100 \Rightarrow log_{10} 100=2$

3- $3^{-4}=\frac{1}{81} \Rightarrow log_3 \frac{1}{81}=-4$

4- $10^{-3}=\frac{1}{1000} \Rightarrow log_{10} \frac{1}{1000}=-3$

5- $5^0=1 \Rightarrow log_5 1=0$

6- $(12)^1=12 \Rightarrow log_{12} 12=1$

افاده‌های لوگارتمی ذیل را در شکل طاقت بیاورید:

1- $log_3 9=2 \Rightarrow 3^2=9$

2- $log_5 625=4 \Rightarrow 5^4=625$

3- $log_9 \frac{1}{81}=-2 \Rightarrow 9^{-2}=\frac{1}{81}$

4- $log_{10} \frac{1}{1000} = -3 \Rightarrow 10^{-3} = \frac{1}{1000}$

5- $log_7 7 = 1 \Rightarrow 7^1 = 7$

6- $log_2 1 = 0 \Rightarrow 2^0 = 1$

قابل یادآوریست این که:

۱- لوگارتم اعداد کسری (کسر واقعی) همیشه منفی است.

۲- لوگارتم عدد یک (1) در هر قاعـده مـساوی بـه صـفر اسـت، یعنـی $log_a 1 = 0$ (درحالیکه $a \neq 1$ یک عدد انتخابی مثبت می‌باشد)

۳- لوگارتم هر عـدد در قاعـده خـودش مـساوی بـه یـک اسـت، یعنـی $log_a a = -1$ (درحالیکه $a \neq 1$ یک عدد انتخابی مثبت می‌باشد)

۴- صفر و اعداد منفی لوگارتم ندارد، چرا؟

جهت وضاحت موضوع به مثال‌های ذیل توجه نمایید:

مثال ۱: آیا می‌توانید بگوییـد کـه در معادلـه اکسپونیـشل $(+2)^x = -2$ قیمت x چند خواهد بود؟

$$x = -2 \Rightarrow (+2)^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$x = -1 \Rightarrow (+2)^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow (+2)^0 = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow (+2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow (+2)^1 = 2$$

در نتیجه می‌توان گفت که برای x کدام قیمتی وجود ندارد که نتیجه آن عدد (-2) گردد، یعنی: $log_2(-2) =$ (وجود ندارد)

مثال ۲: آیا می‌توانید بگویید کـه معادلـه اکسپونیـشل $5^x = 0$ بـه کـدام قیمت x صدق خواهد نمود؟

$$x = -1 \Rightarrow 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$x = 0 \Rightarrow 5^0 = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow 5^1 = 5$$

طوریکه ملاحظه می‌گردد برای x کدام قیمتی وجود ندارد که نتیجـه آن (صفر) گردد، یعنی $log_5(0) =$ (وجود ندارد)

انواع لوگارتم (Kinds of Logarithm)

بصورت عمـوم مـی‌تـوان لوگـارتم را در دو شـکل اعـشاری (معمـولی) و غیراعشاری ملاحظه نمود.

۱) لوگـارتم اعـشاری یـا معمـولی (Common Lagarithm): بـه لوگارتمی گفته می‌شود که قاعده آن عدد (10) باشد، زیرا تمام اعدادی که در حیات روزمره و محاسبات مورد استعمال مـی‌باشـد، بـر اسـاس قاعـده (10) استوار می‌باشد، مثلاً: عدد (23742) را در نظر گرفته ملاحظه می‌گردد که:

$$23742 = 20000 + 3000 + 700 + 40 + 2$$

$$23742 = 2 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 1$$

$$23742 = 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

به خاطر داشته باشید که لوگـارتم معمـول را بـه نـام (بـرایگس سیـستم) Briggs system نیز یاد می‌نماییـد. Briggs نـام مـشخص اسـت کـه ایـن سیستم را به وجود آورد.

پس لوگارتم اعشاری عدد مانند $N > 0$ در شکل $log\ N$ ارائه می‌گـردد، یعنی قاعده در آن ذکر نمی‌گردد که قاعده آن عدد (10) می‌باشد.

۲) لوگارتم غیر اعشاری: به لوگارتمی گفته می‌شود که قاعده آن غیراز عدد (10) باشد، که از جمله لوگارتمی‌های غیر اعشاری، یکـی هـم لوگـارتم

طبیعی (Natural Logarithms) یا نپرین (Napierian) می‌باشد که قاعده آن عدد غیر نسبتی e می‌باشد، یعنی ....$e=2,718281$ است و لوگارتم طبیعی یک عددی مانند $N>0$ در شکل $log_e N$ یا $ln N$ ارائه می‌گردد که از این نوع لوگارتم در اثبات تیوری‌های ریاضیات عالی استفاده خوبی به عمل می‌آید.

مشخصه یا کرکترستیک (Characteristic) و مانتیس (Mantissa) در لوگارتم اعشاری

برای توضیح مشخصه (کرکترستیک) و مانتیسه در لوگارتم اعشاری به مثال ذیل توجه نمایید.

طوریکه می‌دانیم: $10^2=100 \Rightarrow log100=2$

و $10^3=1000 \Rightarrow log1000=3$

و لوگارتم هر عدد غیر از عدد (10) و نماهای قاعده (10) چنین توضیح می‌گردد:

مثلاً: عدد 425 را در نظر می‌گیریم، چون می‌دانیم که این عدد $100<425<1000$ خواهد بود. پس لوگارتم این عدد بین 2 و 3 قرار خواهد داشت، یعنی:

$log100<log425<log1000$

$\Rightarrow 2<log425<3$

بنابر این لوگارتم عدد (423) یک عدد اعشاری بزرگتر از 2 و کوچکتر از 3 خواهد بود که قیمت صحیح آن (2) و قیمت اعشاری آن (با مراجعه به جدول لوگارتم) تقریباً برابر به 0.62839 می‌باشد. پس در این صورت لوگارتم عدد مورد نظر ما $log425=2.62839$ می‌باشد.

از توضیحات فوق نتیجه می‌گردد که لوگارتم یک عدد مانند $N>0$ از دو قسمت ارقام صحیح و ارقام اعشاری تشکیل گردیده که قسمت ارقام صحیح آن را مشخصه (کرکترستیک) و قسمت اعشاری آن را مانتیس یاد می‌نمایند، یعنی:

$log N=$ مانتیسه + مشخصه

$\Rightarrow log425=2+0.62839$

$\Rightarrow log425=2.62839$

پس در نتیجه (2) مشخصه و 0.62839 مانتیسه لوگارتم 425 می‌باشد.

بناءً مشخصه (کرکترستیک) لوگارتم هر عدد مانند $N>0$ که تعداد ارقام صحیح آن (m) باشد، برابر $(m-1)$ واحد خواهد بود و مشخصه (کرکترستیک) اعداد مثبت کمتر از واحد (1) یعنی هر کسر اعشاری کوچکتر از یک (مثبت) که طرف چپ آن به تعداد (m) صفر مشاهده گردد، عبارت از $(-m)$ واحد خواهد بود.

مثال: مشخصه (کرکترستیک) لوگارتم‌های اعشاری ذیل را تعیین نمایید:

مشخصه	عدد
4	17214
2	725
5	400710
مشخصه	عدد
1	45.72
3	1741.5
0	3.061
1	93
0	4
$\bar{1}$ و یا -1	0.3
$\bar{2}$ و یا -2	0.02531
$\bar{3}$ و یا -3	0.007
$\bar{5}$ و یا -5	0.000051

0.79612	$\bar{1}$ و یا -1
0.030004	$\bar{2}$ و یا -2
0.00720000	$\bar{3}$ و یا -3

از آنجایی که مانتیس همیشه مثبت است پـس مشخـصه $(-m)$ بایـد در شکل $10-(10-m)$ نوشته شود.

مثلاً اگر $\log 3=0.4771$ باشد، پس مانتیس اعداد ذیل عبارت است از:

$\log 0.3=-1+0.4771$ یا $\log 0.3=(9.4771-10)$

$\log 0.03=-2+0.4771$ یا $\log 0.03=(8.4771-10)$

$\log 0.003=-3+0.4771$ یا $\log 0.003=(7.4771-10)$

$\log 0.0003=-4+0.4771$ یا $\log 0.0003=(6.4771-10)$

خواهد بود

طوریکه در مثال فوق ملاحظه می‌گردد مانتیس اعداد فوق ذکر عین عـدد اند ولی مشخصه آن‌ها متفاوت می‌باشد.

به همین ترتیب اگر لوگارتم $\log 4562=3.6592$ باشد، پس لوگـارتم اعداد ذیل را می‌توان چنین تعیین نمود:

$\log 456.2=2.6592$

$\log 45.62=1.6592$

$\log 4.562=0.6592$

$\log 0.4562=-1+0.6592$ یا $\log 0.4562=(9.4562-10)$

$\log 0.04562=-2+0.6592$ یا $\log 0.04562=(8.4562-10)$

$\log 0.004562=-3+0.6592$ یا $\log 0.004562=(7.4562-10)$

خواهد بود

تعیین مانتیس در لوگارتم اعشاری

به کمک جدول‌های لوگارتمی و یا فعلاً بـه کمـک ماشـین‌هـای حـساب علمی و یا کمپیوتر می‌توان قسمت ارقـام اعـشاری لوگـارتم را کـه عبـارت از مانتیس لوگارتم می‌باشد دریافت نمود.

جدول‌های لوگارتم به دو شکل چهار رقمی (یعنی مانتیسه آن تا چهار رقم اعشاری محاسبه شده) و پنج رقمی (یعنی مانتیسه آن تـا پـنج رقـم اعـشاری محاسبه شده) وجود دارد، که در جدول‌های چهار رقمی انتـی‌لوگـارتم از یـک الی (99) و در جدول‌های پنج رقمی از یک الی (999) در نظـر گرفتـه شـده است و برای محاسبات دقیق از جدول پنج رقمی استفاده می‌گردد، بطور مثال:

مثال اول: می‌خـواهیم لوگـارتم 517 را در جـدول چهـار رقمـی دریافـت نماییم؟

طوریکه می‌دانیم مشخصه (کرکترستیک) عدد سه رقمـی 517 عبـارت از (2) است و مانتیس لوگارتم این عـدد را سـطر افقـی در شـماره (51) و بـه ستون عمودی در شماره (7) ملاحظه می‌نماییم، تقاطع سـطر و سـتون کـسر اعشاری 0.7135 به دست می‌آید، یعنی:

$\log_{10} 517=\log 517=2.7135$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51								0.7135		

مثال دوم: لوگارتم عدد 0.00452 را دریافت می‌نماییم، یعنی:

$\log 0.00452=?$

مشخصه عدد مذکور (-3) می‌باشد و بـرای دریافـت مـانتیس 452 عـدد 45 را در سطر افقی در شماره 2 سـتون عمـودی جـدول لوگـارتم ملاحظـه می‌نماییم. تقاطع سطر و ستون کسر اعشاری 0.6551 به دست می‌آید، یعنی:

$\log 0.00452=\bar{3}.6551$ یا $\log 0.00452=7.6551-10$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
54			0.6551							

مثال سوم: لوگارتم عدد 6371 را دریافت می‌نماییم، یعنی:

$log\,6371 = ?$

مشخصه عدد مذکور (3) می‌باشد و برای دریافت مانتیس عدد مذکور در جدول چهار رقمی عدد (63) را در ستون (7) مطالعه می‌نماییم، در نتیجه تقاطع سطر و ستون عدد 0.8041 به دست می‌آید، یعنی:

$log\,6371 = 3.8041$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
63								0.8041		

برای محاسبه دقیق در جدول پنج رقمی (637) را در ستون (1) مطالعه می نماییم، در نتیجه تقاطع سطر و ستون عدد 0.80421 به دست می‌آید، یعنی:

$log\,6371 = 3.80421$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
637		0.80421								

مثال چهارم: می‌خواهیم لوگارتم عدد 24357 را به دست آوریم؟

چون عدد پنج رقمی است مانتیس آن در جدول پنج رقمی موجود نمی‌باشد، چون در عصر حاضر امکانات بیشتر در مورد ماشین حساب وجود دارد حتا تیلفون همراه (موبایل) نیز این امکانات را دارد که توسط ماشین حساب علمی آن به وقت بسیار کم حل مطلب نماییم و طریقه انترپولیشن (به کمک تناسب) وقت زیاد را در بر می‌گیرد و به کمک جدول‌های چهار رقمی و پنج رقمی بطور تقریبی می‌توان جواب دریافت نمود.

به کمک جدول چهار رقمی عدد 24357 را در شکل 24.357 در نظر گرفته عدد (24) را تقریباً در ستون (4) مطالعه می‌نماییم (زیرا $0.357 \approx 0.4$) در نتیجه تقاطع سطر و ستون عدد 0.3874 به دست می‌آید.

$\Rightarrow log\,24357 = 4.3874$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
24					0.3874					

و یا به کمک جدول پنج رقمی عدد 24357 را در شکل 243.57 در نظر گرفته عدد (243) را تقریباً در ستون (6) مطالعه می‌نماییم (زیرا $0.57 \approx 0.6$) در نتیجه تقاطع سطر و ستون عدد 0.38668 به دست می‌آید. $\Rightarrow log\,24357 = 4.38668$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
243							0.38668			

انتی لوگارتم

تعریف: هرگاه $\log_a N = x$ باشد پس عدد N را به نام انتی‌لوگارتم x یاد می‌نمایند. یعنی $N = anti\,\log_a x$ مثلاً: اگر $\log 28 = 1.4472$ باشد پس انتی لوگارتم 1.4472 مساوی به عدد 28 می‌باشد.

جهت دریافت انتی‌لوگارتم اعداد به مثال‌های ذیل توجه فرمایید.

مثال اول: هرگاه $\log N = 1.4472$ باشد عدد N را به دست آورید.

عدد مربوط مانتیس لوگارتم یعنی 0.4472 را در جدول لوگارتم طوری دریافته که در کدام سطر و ستون قرار دارد به خاطر داشته باشید که با افزایش اعداد لوگارتم مانتیس نیز افزایش یافته است یعنی رابطه مستقیم دارند.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,8	0.4472	0.4487	0.4502	0.4518	0.4533	0.4548	0.4564	0.4569	0.4594	0.4609

طوریکه ملاحظه می‌گردد، عدد مربوط عبارت از 2.80 است یعنی مانتیس عدد 2.80 عبارت از 0.4472 است. چون مشخصه لوگارتم عدد (1) است بناءً عدد مذکور باید دو رقمی باشد پس عدد مطلوب عبارت از $N = 28.0 = 28$ می‌باشد. یعنی:

$\log 28 = 1.4472 \Rightarrow anti \log 1.4472 = 28$

مثال دوم: هرگاه $\log N = 2.7308$ باشد عدد N را به دست آورید.

عدد مربوط مانتیس لوگارتم یعنی 0.7308 را در جدول لوگـارتم دریافتـه که در کدام سطر و ستون قرار دارد.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.3	0.7243	0.7251	0.7259	0.7267	0.7275	0.7284	0.7292	0.7300	0.7308	0.7316

طوریکه ملاحظه می‌گردد، عدد مربوط عبارت از 5.38 است یعنی مانتیس 5.38 عبارت از 0.7308 است. چون مشخصه لوگارتم عدد (2) است بناءً عدد مذکور باید سه رقمی باشد پس عدد مطلوب عبـارت از $N = 538$ مـی‌باشـد. یعنی:

$\log 53 = 2.7308 \Rightarrow anti \log 2.7308 = 538$

مثال سوم: هرگاه $\log N = 0.9365$باشد عدد N را به دست آورید.

عدد مربوط مانتیس لوگارتم یعنی 0.9365 را در جدول لوگـارتم دریافتـه که در کدام سطر و ستون قرار دارد.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8.6	09345	0.9350	0.9355	0.9360	0.9365	0.9370	0.9375	0.9380	0.9385	0.9390

طوریکه ملاحظه مـی‌گـردد عـدد مربـوط عبـارت از 8.64 اسـت، یعنـی مانتیس 8.64 عبارت از 0.9365 است. چون مشخصه لوگارتم عدد (0) است بناءً عدد مذکور باید یک رقمی باشد. پس عدد مطلوب عبارت از $N = 8.64$ می‌باشد. یعنی:

$\log 8.64 = 0.9365 \Rightarrow anti \log 0.9365 = 8.64$

مثال چهارم: هرگاه $\log N = -5.0521$ باشد عدد N را دریابید.

یا به عباره $anti \log(-5.0521) = ?$

حل: طوریکه ملاحظه می‌گردد مشخصه و مانتیس هـردو منفـی اسـت و مانتیس همیشه یک عدد مثبت می‌باشد. پس می‌توان عدد (1) را بـا مـانتیس جمع و از مشخصه تفریق می‌نمایم در مساوات کدام تغییر به وجـود نمـی‌آیـد، یعنی:

$$\log N = -5.0521 = -0.521 - 5 = (0.0521 + 1) + (-5 - 1)$$
$$= 0.9479 - 6$$

پس می‌توان به کمک مانتیس 0.9479 ارقام عدد N را از جدول لوگارتم دریافت نمایم.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8.8	0.9445	0.9450	0.9455	0.9460	0.9465	0.9469	0.9474	0.9479	0.9484	0.9489

طوریکه ملاحظه می‌گردد عدد مربوط عبارت از 8.87 است یعنی مانتیس 8.87 عبارت از 0.9479 است. چون مشخصه (کرکترستیک) عدد (-6) اسـت پس:

$$N = 8.87 \cdot 10^{-6}$$
$$\Rightarrow N = 0.00000887$$
$$\Rightarrow \log 0.00000887 = -5.0521 \Rightarrow anti \log(-5.0521)$$
$$= 0.00000887$$

انترپولیشن خطی: یک عملیه دریافت یک عدد نامعلوم که در بـین دو عدد معلوم مانتیس واقع باشد به نام انترپولیشن خطی یاد می‌گردد.

جهت توضیح طریقه انترپولیشن خطی به مثال‌های ذیل توجه نمایید.

مثال ۱: می‌خواهیم لوگارتم عدد 24357 را به دست آوریم:

حل: چون عدد 24357 پنج رقمی است و نمی‌توانیم، لوگارتم آن را از جدول چهار رقمی دریابیم، بناءً عدد مذکور را به شکل 2.4357 در نظر گرفته و عدد مذکور $2.4400 > 2.4357 > 2.4300$ می‌باشد، پس:

$$\log 2.4300 < \log 2.4357 < \log 2.4400$$
$$\log 2.43 < \log 2.4357 < \log 2.44$$

با در نظرداشت جدول لوگارتم نتیجه می‌شود که:

$$0.3856 < \log 2.4357 < 0.3874$$

هرگاه $\log 2.4357 = x$ وضع گردد، در این صورت:

$$\Rightarrow 0.3856 < x < 0.3874$$

حال تفاوت بین اعداد و مانتیس‌ها را دریافته با درنظرداشت یک تناسب می‌توان قیمت x را دریافت نمود.

مانتیس	اعداد
$d\begin{cases}0.3856\\x\\0.3874\end{cases}0.0018$	$0.0043\begin{cases}0.3856\\2.4357\\2.4400\end{cases}0.0100$

$$\Rightarrow \frac{0.0043}{0.0100} = \frac{d}{0.0018} \Rightarrow \frac{43}{100} = \frac{d}{0.0018} \Rightarrow d = \frac{43\cdot 0.0018}{100} = 0.000774$$

حالا قیمت d را با مانتیس عدد کوچک جمع نموده داریم که:

$$0.000774 + 0.3856 = 0.386374$$

پس در نتیجه چون عدد (24357) یک عدد پنج رقمی است، پس کرکترستیک یا مشخصه آن عدد (4) و مانتیس آن 0.386374 می‌باشد.

یعنی: $\Rightarrow \log 24357 = 4.386374$

مثال ۲: $\log 7.546 = ?$

واضح است که این عدد در جدول لوگاریتمی چهار رقمی وجود ندارد، بناءً می‌توان نوشت:

$$7.540 < 7.546 < 7.550$$
$$\log 7.540 < \log 7.546 < \log 7.550$$
$$0.8774 < \log 7.546 < 0.8779$$
$$\Rightarrow \log 7.546 = x \Rightarrow 0.8774 < x < 0.8779$$

مانتیس	اعداد
$d\begin{cases}0.8774\\x\\0.8779\end{cases}0.0005$	$0.004\begin{cases}7.540\\7.546\\7.550\end{cases}0.010$

$$\frac{0.004}{0.010} = \frac{d}{0.0005} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{d}{0.0005} \Rightarrow d = \frac{4\cdot 0.0005}{10}$$
$$d = \frac{0.002}{10} = 0.0002$$
$$\Rightarrow 0.0002 + 0.8774 = 0.8776$$
$$\Rightarrow \log 7.546 = 0.8776$$

مثال ۳: $\log 18.951 = ?$

جهت دریافت مانتیس لوگارتم عدد فوق در جدول چهار رقمی عدد مذکور در شکل 1.8951 در نظر گرفته می‌توان چنین نوشت:

$$\Rightarrow 1.8900 < 1.8951 < 1.9000$$
$$\Rightarrow \log 1{,}8900 < \log 1{,}8951 < \log 1{,}9000$$
$$0{,}2765 < x < 0{,}2788$$

مانتیس	اعداد
$d\begin{cases}0.2765\\x\\0.2788\end{cases}0.0023$	$0.0049\begin{cases}1.8900\\1.8951\\1.9000\end{cases}0.0010$

$$\frac{0.0049}{0.0010} = \frac{d}{0.0023} \Rightarrow \frac{49}{10} = \frac{d}{0.0023} \Rightarrow d = \frac{49\cdot 0.0023}{10}$$
$$d = 0.01127$$

$\Rightarrow 0.01127 + 0.2765 = 0.28777$

$\Rightarrow \log 18.951 = 1.28777$

مثال ۴: $\log 0.005783$ را دریابید.

جهت دریافت مانتیس لوگارتم عدد فوق در جدول چهار رقمی عدد مذکور را در شکل 5.783 در نظر گرفته می‌توان چنین نوشت:

$5.780 < 5.783 < 5.790$

$\Rightarrow \log 5.780 < \log 5.783 < \log 5.790$

$0.7619 < x < 0,7627$

اعداد | مانتیس

$$0.007\begin{cases}5.780\\5.783\\5.790\end{cases}0.010 \qquad d\begin{cases}0.7619\\x\\0.7627\end{cases}0.0008$$

$$\frac{0.007}{0.010} = \frac{d}{0.0008} \Rightarrow \frac{7}{10} = \frac{d}{0.0008}$$

$$d = \frac{7 \cdot 0.0008}{10} = \frac{0.0056}{10} = 0.00056$$

$0.00056 + 0.7619 = 0.76246$

چـون عـدد 0.005783 اسـت پـس مشخـصه کرکترسـتیک آن (3-) و مانتیس آن 0.76246 می‌باشد پس داریم که:

$\Rightarrow \log 0.005783 = -3 + 0.76246 = -2.23754$

$\Rightarrow \log 0.005783 = -2.23754$

مثال ۵: $anti \log 4.6753 = ?$

$N = anti \log(4.6753) \Rightarrow \log N = 4,6753 = 4 + 0,6753$

هرگاه $x = 0.6753$ وضع گردد سپس نظر به قوانین لوگارتم که:

$\Rightarrow \log N = x + 4$

$\Rightarrow \log N = \log(x \cdot 10^4)$

طوریکه ملاحظه می‌گردد مانتیس 0.6753 در جدول چهار رقمی نیـست، اما مانتیس‌های 0.6749 و 0.6758 در جدول وجود دارد، که انتی‌لوگارتم‌های آنها را دریافته و به کمک انترپولیشن قیمت N را دریافت نموده می‌توانیم.

$anti \log 0.6749 = 4.73$

$anti \log 0.6758 = 4.74$

مانتیس | اعداد

$$0.0005\begin{cases}0.6749\\0.6753\\0.6758\end{cases}0.0009 \qquad d\begin{cases}4.73\\x\\4.73\end{cases}0.01$$

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0005}{0.0009} \Rightarrow \frac{d}{0.01} = \frac{5}{9} \Rightarrow d = \frac{5 \cdot 0.01}{9}$$

$d = 0.0056$

$x = 0.0056 + 4.73 = 4.7356$

$\Rightarrow \log N = \log(x \cdot 10^4)$

$\log N = \log(4.7356 \cdot 10^4)$

$\log N = \log(47356)$

$\Rightarrow N = 47356$

قوانین لوگارتم (Laws of Logarithm)

I) لوگارتم حاصل‌ضرب چند عدد

$$log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N$$

ثبوت: اگر $log_a M = x, \quad log_a N = y$ فرض گردد.

$M = a^x$ ....(1)

$N = a^y$ ....(2)

روابط (1) و (2) را طرف ضرب نموده داریم که:

$M \cdot N = a^x \cdot a^y$

$M \cdot N = a^{x+y} \Rightarrow log_a(M \cdot N) = x + y$

$\Rightarrow log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N$

II) لوگارتم حاصل تقسیم دو عدد

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$$

ثبوت: اگر $\log_a M=x,\ \log_a N=y$ فرض گردد:

$$M=a^x\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$N=a^y\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

رابطه (1) و (2) را طرف به طرف تقسیم نموده داریم که:

$$\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}\Rightarrow\frac{M}{N}=a^{x-y}$$

$$\Rightarrow\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=x-y\qquad\Rightarrow\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$$

III) لوگارتم معکوس یک عدد:

$$\log_a\left(\frac{1}{M}\right)=-\log_a M=Co\log_a M$$

ثبوت: با استفاده از خاصیت تقسیم نظر به قانون (II) می‌توان چنین نوشت:

$$\log_a\left(\frac{1}{M}\right)=\log_a 1-\log_a M$$

$$\log_a\left(\frac{1}{M}\right)=0-\log_a M$$

$$\Rightarrow\log_a\left(\frac{1}{M}\right)=-\log_a M=Co\log_a M$$

IV) لوگارتم یک طاقت:

$$\log_a(M)^n=n\log_a M$$

ثبوت: هرگاه $\log_a M=x$ فرض گردد، پس داریم که:

$$M=a^x\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

اطراف رابطه (1) را به نما (n) بلند می‌بریم:

$$M^n=\left(a^x\right)^n\qquad\Rightarrow M^n=(a)^{n\cdot x}$$

$$\Rightarrow\log_a M^n=n\cdot x\qquad\Rightarrow\log_a(M)^n=n\cdot\log_a M$$

V) لوگارتم افاده جذری:

$$\log_a\sqrt[n]{M^m}=\frac{m}{n}\log_a M$$

ثبوت: با استفاده از خاصیت نما در لوگارتم قانون (IV) و تبدیل جذر به طاقت می‌توان چنین نوشت:

$$\log_a\sqrt[n]{M^m}=\log_a(M)^{\frac{m}{n}}=\frac{m}{n}\log_a M$$

VI) معکوس یک لوگارتم:

$$\log_a M=\frac{1}{\log_M a}$$

ثبوت: هرگاه $\frac{1}{\log_M a}=x$ فرض گردد، پس داریم که:

$$x\cdot\log_M a=1\qquad\Rightarrow\log_M a^x=\log_M M\qquad\Rightarrow a^x=M$$

مساوات اخیر را به لوگارتم تبدیل نموده داریم که:

$$\log_a M=x\qquad\Rightarrow\log_a M=\frac{1}{\log_M a}$$

VII) لوگارتم یک طاقت به قاعده یک طاقت:

$$\log_{a^m}M^n=\frac{n}{m}\log_a M$$

ثبوت: با در نظرداشت خاصیت (IV) و خاصیت (VI) می‌توان چنین نوشت:

$$\log_{a^m}M^n=n\log_{a^m}M=$$

$$n\cdot\frac{1}{log_M a^m}=\frac{n}{m\cdot log_M a}=\frac{n}{m}\cdot\frac{1}{log_M a}$$

$$\Rightarrow log_{a^m} M^n=\frac{n}{m} log_a M$$

VIII) تبدیل لوگارتم به قاعده دلخوا:

$$log_a M=\frac{log_c M}{log_c a}$$

درحالیکه $c\neq 1$ یک عدد مثبت باشد.

ثبوت: اگر $x=\frac{log_c M}{log_c a}$ وضع گردد، پس می‌توان چنین نوشت:

$$log_c M=x\cdot log_c a\Rightarrow log_c M=log_c a^x\Rightarrow M=a^x$$

افاده اخیر را به لوگارتم تبدیل نموده داریم که:

$$log_a M=x \Rightarrow log_a M=\frac{log_c M}{log_c a}$$

IX) حاصل ضرب چندین لوگارتم در عدد و قاعده ذیل:

$$log_b a\cdot log_c b\cdot log_d c\cdot log_e d=log_e a$$

ثبوت:

$$log_b a\cdot log_c b\cdot log_d c\cdot log_e d=log_b a\cdot\frac{1}{log_b c}\cdot log_d c\cdot log_e d$$

$$\Rightarrow\frac{log_b a}{log_b c}\cdot log_d c\cdot log_e d=log_c a\cdot\frac{1}{log_c d}\cdot log_e d$$

$$\Rightarrow\frac{log_c a}{log_c d}\cdot log_e d=log_d a\cdot\frac{1}{log_d e}=\frac{log_d a}{log_d e}=log_e a$$

X) هرگاه $(a)^{log_a M}=x$ باشد، درحالیکه قاعده عمـومی ایـن طاقـت و قاعده لوگارتم باهم مساوی باشند، در این صورت: $x=M$ است.

ثبوت: اطراف مساوات ذیل را لوگارتم به قاعده a می‌گیریم:

$$(a)^{\log_a M}=x$$

$$\log_a (a)^{\log_a M}=\log_a x$$

$$\log_a M\cdot\log_a a=\log_a x$$

$$\log_a M\cdot 1=\log_a x$$

$$\log_a M=\log_a x$$

هرگاه در اطراف مساوات لوگارتم‌ها به عین قاعده بـاهم مـساوی باشـند، اعداد آن نیز باهم مساوی اند. یعنی:

$$log_a M=log_a x\Rightarrow M=x$$

افاده‌های لوگارتمی (Logarithmic Expressions)

افاده‌های عددی یا الجبری که در آن لوگـارتم موجـود باشـد، افـاده‌هـای لوگارتمی گفته می شود، همچنان افاده‌های مذکور را مطابقت‌هـای لوگـارتمی نیز می‌نامند، که می‌توان با استفاده از خواص و قوانین لوگارتم که قـبلاً آن را مطالعه نمودیم آن‌ها را ساده نموده و قیمت عینیتی آن را دریافت کرد.

مثال‌ها:

افاده‌های لوگارتمی ذیل را ساده نماییم.

مثـال ۱: در صـورتیکه $log 3=0.4771$ و $log 5=0.6990$ باشـد، لوگارتم (225) را دریابید؟

$$log 225=log(15)^2=2\cdot log 15=2\cdot log(5\cdot 3)$$
$$=2(log 5+log 3)$$
$$=2(0.6990+0.4771)=2(1.1761)=2.3522$$

مثـال ۲: درحالیکـه $log 4=0.6021$ و $log 20=1.3010$ باشـد، لوگارتم (5) را دریابید؟

$$log 5=log\frac{20}{4}=log 20-log 4=1.3010-0.6021$$

$$\Rightarrow \log 5 = 0.6989 \Rightarrow \log 5 \approx 0.6990$$

مثال ۳: در صورتیکه $log\,6 = 0.7782$ باشد، لوگارتم $\left(\sqrt[5]{216}\right)$ را دریابید.

$$log\sqrt[5]{216} = log\sqrt[5]{6^3} = log(6)^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}\,log\,6 = \frac{3}{5}(0.7782)$$

$$\Rightarrow 0.6(0.7782) = 0.46692$$

مثال ۴: لوگارتم ذیل را دریابید؟ $log\left(\frac{1}{1000000}\right) = ?$

$$\Rightarrow log\left(\frac{1}{1000000}\right) = log\frac{1}{10^6} = log\,10^{-6}$$

$$= -6\,log\,10 = -6\cdot 1 = -6$$

مثال ۵: $log_8\frac{1}{32} = ?$

$$log_8\frac{1}{32} = log_8 1 - log_8 32 = 0 - log_{2^3} 2^5 = -\frac{5}{3}\,log_2 2 = -\frac{5}{3}$$

مثال ۶: هرگاه $log\,5 = 0.6990$ و $log\,2 = 0.3010$ باشد، لوگارتم ذیل را دریابید؟ $log_{32} 625 = ?$

$$log_{32} 625 = log_{2^5} 5^4 = \frac{4}{5}\,log_2 5 = \frac{4}{5}\cdot\frac{log_{10} 5}{log_{10} 2}$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{0.6990}{0.3010} = \frac{4}{5}\cdot\frac{699}{301} = \frac{2796}{1505} = 1.8578$$

مثال ۷: لوگارتم ذیل را دریابید؟ $log_{81} 3 = ?$

$$log_{81} 3 = \frac{1}{log_3 81} = \frac{1}{log_3 3^4} = \frac{1}{4\,log_3 3} = \frac{1}{4\cdot 1} = \frac{1}{4}$$

ویا: $log_{81} 3 = log_{3^4} 3^1 = \frac{1}{4}\,log_3 3 = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}$

مثال ۸: قیمت افاده لوگارتمی ذیل را دریابید؟ $(2)^{3\,log_2 5} = ?$

$$(2)^{3\,log_2 5} = (2)^{log_2 5^3} = (2)^{log_2 125} = 125$$

مثال ۹: قیمت افاده لوگارتمی ذیل را دریابید؟ $(5)^{2+log_5 2} = ?$

$$(5)^{2+log_5 2} = (5)^2\cdot(5)^{log_5 2} = 25\cdot 2 = 50$$

مثال ۱۰): قیمت افاده لوگارتمی ذیل را دریابید؟

$$(3)^{4-2\,log_9\sqrt{3}} = ?$$

$$= (3)^{4-2\,log_9\sqrt{3}} = (3)^4 \div (3)^{2\,log_9\sqrt{3}}$$

$$= 81 \div (3)^{log_{3^2}(\sqrt{3})^2} = 81 \div (3)^{log_{3^2} 3}$$

$$= 81 \div (3)^{\frac{1}{2}log_3 3} = 81 \div (3)^{log_3 (3)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 81 \div \sqrt{3} = \frac{81\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{81\cdot\sqrt{3}}{3} = 27\sqrt{3}$$

مثال ۱۱: قیمت لوگارتمی ذیل را دریابید؟ $\frac{log\,25 + log\,4}{2 + log_{100} 1000} = ?$

$$\Rightarrow \frac{log\,25 + log\,4}{2 + log_{100} 1000} = \frac{log(25\cdot 4)}{2 + log_{10^2} 10^3} = \frac{log\,100}{2 + \frac{3}{2}\,log_{10} 10}$$

$$\Rightarrow \frac{log\,10^2}{2 + \frac{3}{2}} = \frac{2\,log\,10}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{\frac{7}{2}} = \frac{4}{7}$$

مثال ۱۲: $log_{a^2} a^3 - log_{b^3} b + log_b a \cdot log_a b = ?$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\,log_a a - \frac{1}{3}\,log_b b + lob_b a \cdot \frac{1}{log_a b}$$

مثال‌ها:

از معادلات لوگارتمی ذیل قیمت مجهول مربوط را دریافت نمایید:

مثال ۱: $log_2 5x=4$

$$\Rightarrow log_2 5x=4 \Rightarrow 5x=2^4 \Rightarrow 5x=16 \Rightarrow x=\frac{16}{5} \Rightarrow x=3.2$$

مثال ۲: $3x=log_{25} 125$

$$\Rightarrow 3x=log_{5^2} 5^3 \Rightarrow 3x=\frac{3}{2} log_5 5$$

$$\Rightarrow 3x=\frac{3}{2} /:3 \Rightarrow x=\frac{3}{6} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

مثال ۳: $log_x 81=2$

$$\Rightarrow x^2=81 \Rightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{81} \Rightarrow x=9$$

مثال ۴: $log 8x+log 1000=7$

$$\Rightarrow log 8x+3=7 \Rightarrow log 8x=7-3 \Rightarrow log 8x=4 \Rightarrow 8x=10^4$$

$$\Rightarrow 8x=10000/:8 \Rightarrow x=\frac{10000}{8} \Rightarrow x=1250$$

مثال ۵: $log_5 (25)^{x+1}=3$

$$\Rightarrow (25)^{x+1}=5^3 \Rightarrow (5^2)^{x+1}=5^3 \Rightarrow (5)^{2x+2}=5^3$$

$$\Rightarrow log_5 (5)^{2x+2}=log_5 (5)^3 \Rightarrow (2x+2) log_5 5=3 log_5 5$$

$$\Rightarrow 2x+2=3 \Rightarrow 2x=3-2 \Rightarrow 2x=1/:2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

مثال ۶: $log_2 (9x-1)=3$

$$\Rightarrow 9x-1=2^3 \Rightarrow 9x=8+1 \Rightarrow 9x=9/:9 \Rightarrow x=1$$

ویا $log_2 (9x-1)=log_2 8 \Rightarrow 9x-1=8$

$$\Rightarrow 9x=8+1 \Rightarrow 9x=9/:9 \Rightarrow x=1$$

مثال ۷: $log_5 (3^x+44)=3$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{1}{3}+1=\frac{9-2+6}{6}=\frac{13}{6}$$

مثال ۱۳: در صورتیکه $\log_3 m=0.09$ باشد، قیمت افاده:

$log_{27} 9m=?$

$$\Rightarrow log_{27} 9m=log_{27} 9+log_{27} m=log_{3^3} 3^2+log_{3^3} m$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} log_3 3+\frac{1}{3} log_3 m=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(0.09)=\frac{2}{3}+0.03$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}+\frac{3}{100}=\frac{200+9}{300}=\frac{209}{300}$$

مثال ۱۴: قیمت افاده لوگارتمی ذیل را دریابید:

$log 128-7 log 0.002=?$

$$\Rightarrow log 2^7-7 log\frac{2}{1000}=7 log 2-7(log 2-log 1000)$$

$$\Rightarrow 7 log 2-7 log 2+7 log 10^3=7\cdot 3log10=21\cdot=21$$

مثال ۱۵: در صورتیکه $log 3=0.4771$ باشد، پس قیمت افاده لوگارتمی $log_{\sqrt{10}} 8100$ را دریابید؟

$$log_{\sqrt{10}} 8100=log_{(10)^{\frac{1}{2}}} 8100=\frac{1}{\frac{1}{2}} log_{10}(81\cdot 100)$$

$$\Rightarrow 2(log 81+log 100)=2(log 3^4+log 10^2)$$

$$\Rightarrow 2(4 log 3+2 log 10)=8 log 3+4\cdot 1$$

$$\Rightarrow 8\cdot 0.4771+4=3.8168+4=7.8168$$

معادلات لوگارتمی (Logarithmic Equations)

به معادلات گفته می شود که در آن لوگارتم موجود باشد که جهت حل آنها با استفاده از قوانین لوگارتم که قبلاً آنها را مطالعه نمودیم، عمل نموده و قیمت مجهول مربوط را دریافت خواهیم نمود.

$$\Rightarrow 3^x + 44 = 5^3 \Rightarrow 3^x = 125 - 44 \Rightarrow 3^x = 81$$

$$\Rightarrow \log_3 81 = x \Rightarrow x = \log_3 3^4 \Rightarrow x = 4\log_3 3 \Rightarrow x = 4$$

مثال ۸: $\log_3 \sqrt{x^2-1} - \log_3 \sqrt{x+1} - \log_5 5 = 0$

$$\Rightarrow \log_3 \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} - 1 = 0 \Rightarrow \log_3 \sqrt{\frac{x^2-1}{x+1}} = 1$$

$$\Rightarrow \log_3 \sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}} = 1 \Rightarrow \log_3 \sqrt{x-1} = \log_3 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1} = 3 \Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow x - 1 = 9 \Rightarrow x = 9 + 1 \Rightarrow x = 10$$

مثال ۹: $(x)^{\log_3 x} = 81$

$$\Rightarrow \log_3 (x)^{\log_3 x} = \log_3 81$$

$$\Rightarrow \log_3 x \cdot \log_3 x = \log_3 3^4 \Rightarrow \log^2{}_3\, x = 4\log_3 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{\log^2{}_3\, x} = \sqrt{4} \Rightarrow \log_3 x = \pm 2$$

$$\Rightarrow \log_3 x = +2 \Rightarrow x = \left(3^2\right) \Rightarrow x_1 = 9$$

$$\Rightarrow \log_3 x = -2 \Rightarrow x = \left(3^{-2}\right) \Rightarrow x_2 = \frac{1}{9}$$

مثال ۱۰: $2\log\sqrt{x} + \log x^3 - 4 = 0$

$$\Rightarrow \log\left(\sqrt{x}\right)^2 + 3\log x = 4 \Rightarrow \log x + 3\log x = 4$$

$$\Rightarrow 4\log x = 4 \;/:4 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10^1 \Rightarrow x = 10$$

مثال ۱۱: $\log_2\left(\frac{1}{x}+3\right) + \log_3 243 = \log_2 8$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{x}+3\right) = \log_2 8 + \log_3 243$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{x}+3\right) = \log_2 2^3 + \log_3 3^5$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{x}+3\right) = 3\log_2 2 + 5\log_3 3 \Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{x}+3\right) = 3 + 5$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{x}+3\right) = 8 \Rightarrow \frac{1}{x} + 3 = 2^8 \Rightarrow \frac{1}{x} + 3 = 256$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = 256 - 3 \Rightarrow \frac{1}{x} = 253 \Rightarrow x = \frac{1}{253}$$

مثال ۱۲: $\log_5 \sqrt[3]{5x-10} = \log_{27} 9$

$$\Rightarrow \log_5 (5x-10)^{\frac{1}{3}} = \log_{3^3} 3^2 \Rightarrow \frac{1}{3}\log_5(5x-10) = \frac{2}{3}\log_3 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\log_5(5x-10) = \frac{2}{3} \;/\cdot 3 \Rightarrow \log_5(5x-10) = 2$$

$$\Rightarrow 5x - 10 = 5^2 \Rightarrow 5x = 25 + 10 \Rightarrow 5x = 35 \;/:5$$

$$\Rightarrow x = \frac{35}{5} \Rightarrow x = 7$$

مثال ۱۳: $\log_{(x-3)}\left(2x^2 - 6x - 16\right) = 2$

$$\Rightarrow \left(2x^2 - 6x - 16\right) = (x-3)^2 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 16 = x^2 - 6x + 9$$

$$\Rightarrow 2x^2 - \cancel{6x} - x^2 + \cancel{6x} = +9 + 16 \Rightarrow x^2 = 25$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{25} \Rightarrow x = 5$$

مثال ۱۴: $\log\ \log_3(x-2) = \log 3$

$$\Rightarrow \log_3(x-2) = 3 \Rightarrow x - 2 = 3^3 \Rightarrow x = 27 + 2 \Rightarrow x = 29$$

مثال ۱۵: $\log_2\ \log_5(x+615) = \log_5 25$

$$\Rightarrow \log_2\ \log_5(x+615) = \log_5 5^2 \Rightarrow \log_2\ \log_5(x+615) = 2$$

$$\Rightarrow u = \log_5(x+615) \Rightarrow \log_2 u = 2$$

$\Rightarrow u = 2^2 \Rightarrow u = 4$ هرگاه

$$\Rightarrow \log_5(x+615) = 4 \Rightarrow x + 615 = 5^4 \Rightarrow x + 615 = 625$$

$\Rightarrow x=625-615 \Rightarrow x=1$

مثال ۱۶: $\log_2\left[\log_3\left\{\log_2(x+2^5)\right\}\right]-\log_2 2=0$

$\Rightarrow \log_2\left[\log_3\left\{\log_2(x+2^5)\right\}\right]=\log_2 2$

$\Rightarrow \log_3\left\{\log_2(x+2^5)\right\}=2 \Rightarrow \log_2(x+2^5)=3^2$

$\Rightarrow log_2\left(x+2^5\right)=9 \Rightarrow x+2^5=2^9 \Rightarrow x=2^9-2^5$

$\Rightarrow x=512-32 \Rightarrow x=480$

مثال ۱۷: معادله نمایی ذیل را حل نمایید؟ $2^x=6$

حل: اطراف مساوات را لوگارتم به قاعده (10) می‌گیریم.

$$\Rightarrow log\,2^x=log\,6 \Rightarrow x\cdot log\,2=log\,6\,/:log\,2 \Rightarrow x=\frac{log\,6}{log\,2}$$

طوریکـه در جـدول لوگـارتم ملاحظـه مـی‌گـردد $log\,2=0.3010$ و $log\,6=0.7782$ می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$x=\frac{0.7782}{0.3010} \Rightarrow x=\frac{7782}{3010} \Rightarrow \quad =2.5854$$

مثال ۱۸: معادله نمایی ذیل را حل نمایید؟ $(3)^{x-2}=20$

حل: از اطراف مساوات لوگارتم به قاعده (10) می‌گیریم.

$$\Rightarrow log(3)^{x-2}=log\,20 \Rightarrow (x-2)\cdot log\,3=log\,20\,/:log\,3$$

$$\Rightarrow x-2=\frac{log\,20}{log\,3} \Rightarrow x=\frac{log\,20}{log\,3}+2$$

طوریکـه در جـدول لوگـارتم ملاحظـه مـی‌گـردد: $log\,3=0.4771$ و $log\,20=1.3010$ می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$x=\frac{1.3010}{0.4771}+2 \Rightarrow x=2.7269+2 \Rightarrow x=4.7269$$

تمرینات فصل پنجم

۱- در طاقت‌های داده شده ذیل قاعده و لوگارتم را مشخص نمایید:

1) $3^5=243$ 2) $5^0=1$ 3) $7^1=7$

4) $4^3=64$ 5) $9^2=81$ 6) $10^3=1000$

7) $2^{-5}=\frac{1}{32}$ 8) $6^3=216$

۲- بـا اسـتفاده از تعریـف لوگـارتم طاقـت‌هـای ذیـل را در شـکل افـاده لوگارتمی بنویسید:

9) $3^4=8$ 10) $5^3=125$ 11) $9^{-2}=\frac{1}{81}$

12) $10^4=10000$ 13) $(15)^0=1$ 14) $8^1=8$

15) $4^4=256$ 16) $10^{-2}=0.01$

۳- افاده‌های لوگارتمی ذیل را به شکل طاقت بنویسید:

17) $log_2 16=4$ 18) $log_5 125=3$ 19) $log_2 128=7$

20) $log_3 1=0$ 21) $log_{15} 15=1$ 22) $log_{10}\frac{1}{10}=-1$

23) $log_{49} 7=\frac{1}{2}$ 24) $log_6 216=3$

۴- مشخصه (کرکترستیک) لوگارتم‌های اعشاری ذیل را دریابید:

25) $log\,5=?$ 26) $log\,243=?$

27) $log\,5231=?$ 28) $log\,75142=?$

29) $log\,92.53=?$ 30) $log\,7.4125=?$

31) $log\,1725.4=?$ 32) $log\,0.05213=?$

33) $log\,0.00002=?$ 34) $log\,0.00057=?$

۵- لوگارتم اعداد ذیل را به کمک جدول دریابید:

35) $log\,7=?$ 36) $log\,42=?$ 37) $log\,17=?$

38) $\log 56=?$ 39) $\log 196=?$ 40) $\log 651=?$

41) $\log 793=?$ 42) $\log 5142=?$ 43) $\log 1500=?$

44) $\log 0.3=?$

۶- با در نظرداشت $\log 5=0.6990$ لوگارتم‌های اعداد ذیل را دریابید:

45) $\log 0.5=?$ 46) $\log 0.05=?$

47) $\log 0.005=?$ 48) $\log 0.0005=?$

49) $\log 0.00005=?$ 50) $\log 50=?$

51) $\log 500=?$ 52) $\log 5000=?$

53) $\log 50000=?$ 54) $\log 500000=?$

۷- با در نظر داشت جدول چهار رقمی انتی لوگارتم‌های ذیل را دریابید:

55) $\log N=1.9232$ 56) $\log N=1.7474$

57) $\log N=2.9117$ 58) $\log N=2.6180$

59) $\log N=0.2648$ 60) $anti\log(0.1271)=?$

61) $anti\log(1,7050)=?$ 62) $anti\log(-3.4123)=?$

۸- به کمک انترپولیشن لوگارتم اعداد ذیل را دریابید:

63) $\log 5.275=?$ 64) $\log 27.514=?$

65) $\log 132.31=?$ 66) $\log 63149=?$

67) $\log 0.04318=?$ 68) $\log 0.007223=?$

۹- در حالیکه $\log 2=0.3010$, $\log 5=0.6990$ و $\log 3=0.4771$ است، لوگارتم های داده شده ذیل را دریابید:

69) $\log 1024=?$ 70) $\log 243=?$

71) $\log 625=?$ 72) $\log \frac{25}{27}=?$

73) $\log \sqrt[3]{16}=?$ 74) $\log 1125=?$

75) $\log \frac{225}{8}=?$ 76) $\log \sqrt[4]{300}=?$

77) $\log_{81} 125=?$ 78) $\log_{25} 512=?$

79) $\log_{625} 9=?$ 80) $\log_4 36=?$

۱۰- به اساس قوانین لوگارتم، افاده‌های لوگارتمی داده شده ذیل را دریابید:

81) $\log_2 64+\log_{125} 25=?$

82) $\log_{27} 81-\log_5 625+\log_{144} 12=?$

83) $\log 5000-\log 5+\log_{12} 12=?$

84) $\log 900-2\log 3+\log_5 1=?$

85) $\log_7 2401\div\log_2 128=?$

86) $\log_5 \frac{1}{25}+5=?$

87) $(3)^{2\log_3 5}=?$

88) $(7)^{1-\log_7 2}=?$

89) $(5)^{2+3\log_5 3}=?$

90) $(2)^{3\log_2 5}+(4)^{\frac{1}{2}\log_4 25}=?$

91) $\log_3 81\cdot\log_5 25+\log_4 2\cdot\log_9 3=?$

92) $\log_5 243\cdot\log_4 5\cdot\log_3 4=?$

93) $\log_6 64\cdot\log_3 6\cdot\log_5 3\cdot\log_2 5=?$

94) $\frac{\log_{70} 7+\log_{70} 10}{\log_{10} 5+\log_{10} 2}=?$

95) $\frac{\log 125+\log 8}{\log 4+\log 25}=?$

96) $\log_{a^2} a^5-\log_b b^2=?$

97) $\log_{m^5} m^3+2\log_{n^2} n^5+3=?$

98) $\log 81-4\log 0.03=?$

99) $5\log 0.0002-\log 32=?$

100) در صورتیکه $\log_2 P=0.54$ باشد قیمت $\log_4 8P$ را دریابید

۱۱- از معادلات لوگارتمی ذیل قیمت مجهول مربوطه را دریابید:

101) $\log_3 2x=3$

102) $2(x-2)=\log_4 16$

103) $5x-3-\log_5 25=0$

104) $\log_3(x-1)=2$

105) $\log_2(4x-3)=\log_2 5$

106) $\log_3(3x+1)-\log_3 81=0$

107) $\log_2(3x)+\log_4 64-\log_2 64-\log_8 64=-3$

108) $\log_4(2x-5)=\log_{81} 9$

109) $5+2\log_5 x+\log_5 x^3=6+\log_5 x^4$

110) $\log_x 125=3$

111) $\log_x 81=4$

112) $15\log_x 4=30$

113) $\log_6(36)^{x-3}=2$

114) $\log_5(125)^{2x-1}=9$

115) $\log_3(2^x-5)=3$

116) $\log_2(5^{x+1}-9)=4$

117) $\log_2\sqrt{x-3}+\log_2\sqrt{x-3}=4\log_{49} 7$

118) $\log\sqrt{x^3-1}-\log\sqrt{x^2+x+1}=\log_{25} 5$

119) $\log_5\sqrt[3]{a+2}+\log_5\sqrt[3]{a^2+4a+4}=2\log_4 2$

120) $(x)^{\log_2 x}=16$

121) $(x)^{\log_5 x}=625$

122) $4\log\sqrt{x}-\log x-\log 5=0$

123) $\log_5(x-3)-\dfrac{\log_3 2}{\log_3 5}=0$

124) $\dfrac{\log_3(2x-5)}{\log_3 7}-\log_7 3=0$

125) $\log_5\left(\dfrac{2}{x}+1\right)+\log_3 5\cdot\log_5 3=\log_4 16$

126) $\log_4\sqrt[5]{3x+1}=\log_{32} 2$

127) $\log_{(x+2)}(x^2+5x-1)=2$

128) $\log_3\log_2(5x+4^3)=\log_3 8$

129) به کمک جدول معادله نمایی ذیل را حل نمایید. $3^x=5$

130) به کمک جدول معادله نمایی ذیل را حل نمایید. $5^{x+1}=20$

جدول لوگارتم اعداد قاعدهٔ ۱۰

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1.1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1.2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1000	0,1038	0,1072	0,1106
1.3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1.4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1.5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1.6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1.7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1.8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1.9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2.0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2.1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2.2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2.3	0,3617	0,3636	0,3665	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784
2.4	0,3802	0,3820	0,3838	0,3856	0,3874	0,3892	0,3909	0,3927	0,3945	0,3962
2.5	0,3979	0,3997	0,4014	0,4031	0,4048	0,4065	0,4082	0,4099	0,4116	0,4133
2.6	0,4150	0,4166	0,4183	0,4200	0,4216	0,4232	0,4249	0,4265	0,4281	0,4298
2.7	0,4314	0,4330	0,4346	0,4362	0,4378	0,4393	0,4409	0,4425	0,4440	0,4456
2.8	0,4472	0,4487	0,4502	0,4518	0,4533	0,4548	0,4564	0,4569	0,4594	0,4609
2.9	0,4624	0,4639	0,4654	0,4669	0,4683	0,4698	0,4713	0,4728	0,4742	0,4757
3.0	0,4771	0,4786	0,4800	0,4814	0,4829	0,4843	0,4857	0,4871	0,4886	0,4900
3.1	0,4914	0,4928	0,4942	0,4955	0,4969	0,4983	0,4997	0,5011	0,5024	0,5038
3.2	0,5051	0,5056	0,5079	0,5092	0,5105	0,5119	0,5132	0,5145	0,5159	0,5172
3.3	0,5185	0,5198	0,5211	0,5224	0,5237	0,5250	0,5263	0,5276	0,5289	0,5302
3.4	0,5315	0,5328	0,5340	0,5353	0,5366	0,5378	0,5391	0,5403	0,5416	0,5428
3.5	0,5441	0,5453	0,5465	0,5478	0,5490	0,5502	0,5514	0,5527	0,5539	0,5551
3.6	0,5563	0,5575	0,5587	0,5599	0,5611	0,5623	0,5635	0,5647	0,5658	0,5670
3.7	0,5682	0,5694	0,5705	0,5717	0,5729	0,5740	0,5752	0,5763	0,5775	0,5786
3.8	0,5798	0,5809	0,5821	0,5832	0,5843	0,5855	0,5866	0,5877	0,5888	0,5899
3.9	0,5911	0,5922	0,5933	0,5944	0,5955	0,5966	0,5977	0,5988	0,5999	0,6010
4.0	0,6021	0,6031	0,6042	0,6053	0,6064	0,6075	0,6085	0,6096	0,6107	0,6117
4.1	0,6128	0,6138	0,6149	0,6160	0,6170	0,6180	0,6191	0,6201	0,6212	0,6222
4.2	0,6232	0,6243	0,6253	0,6263	0,6274	0,6284	0,6291	0,6304	0,6314	0,6325
4.3	0,6335	0,6345	0,6355	0,6365	0,6375	0,6385	0,6395	0,6405	0,6415	0,6425
4.4	0,6435	0,6444	0,6454	0,6464	0,6474	0,6484	0,6493	0,6503	0,6513	0,6522
4.5	0,6532	0,6542	0,6551	0,6561	0,6571	0,6580	0,6590	0,6599	0,6609	0,6618
4.6	0,6628	0,6637	0,6646	0,6656	0,6665	0,6675	0,6684	0,6693	0,6702	0,6712
4.7	0,6721	0,6730	0,6739	0,6749	0,6758	0,6767	0,6776	0,6785	0,6794	0,6803
4.8	0,6812	0,6821	0,6830	0,6839	0,6848	0,6857	0,6866	0,6875	0,6884	0,6893
4.9	0,6902	0,6911	0,6920	0,6928	0,6937	0,6946	0,6955	0,6964	0,6972	0,6981
5.0	0,6990	0,6998	0,7007	0,7016	0,7024	0,7033	0,7042	0,7050	0,7059	0,7067
5.1	0,7076	0,7084	0,7093	0,7101	0,7110	0,7118	0,7126	0,7135	0,7143	0,7152
5.2	0,7160	0,7168	0,7177	0,7165	0,7193	0,7202	0,7210	0,7218	0,7226	0,7235
5.3	0,7243	0,7251	0,7259	0,7267	0,7275	0,7284	0,7292	0,7300	0,7308	0,7316
5.4	0,7324	0,7332	0,7340	0,7348	0,7356	0,7364	0,7372	0,7380	0,7388	0,7396

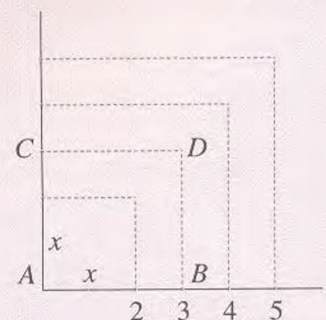
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	0,7404	0,7412	0,7419	0,7427	0,7435	0,7443	0,7451	0,7459	0,7466	0,7474
5.6	0,7482	0,7490	0,7497	0,7505	0,7513	0,7520	0,7528	0,7536	0,7543	0,7551
5.7	0,7559	0,7566	0,7574	0,7582	0,7589	0,7597	0,7604	0,7612	0,7619	0,7627
5.8	0,7634	0,7642	0,7649	0,7657	0,7664	0,7672	0,7679	0,7689	0,7694	0,7701
5.9	0,7709	0,7716	0,7723	0,7731	0,7738	0,7745	0,7752	0,7760	0,7767	0,7774
6.0	0,7782	0,7789	0,7796	0,7803	0,7810	0,7818	0,7825	0,7832	0,7839	0,7846
6.1	0,7853	0,7860	0,7868	0,7875	0,7882	0,7889	0,7896	0,7903	0,7910	0,7917
6.2	0,7924	0,7931	0,7938	0,7945	0,7952	0,7959	0,7966	0,7973	0,7980	0,7987
6.3	0,7993	0,8000	0,8007	0,8014	0,8021	0,8028	0,8035	0,8041	0,8048	0,8055
6.4	0,8062	0,8069	0,8075	0,8082	0,8089	0,8096	0,8102	0,8109	0,8116	0,8122
6.5	0,8129	0,8136	0,8142	0,8149	0,8156	0,8162	0,8169	0,8176	0,8182	0,8189
6.6	0,8195	0,8202	0,8209	0,8215	0,8221	0,8228	0,8235	0,8241	0,8248	0,8254
6.7	0,8261	0,8267	0,8274	0,8280	0,8287	0,8293	0,8299	0,8306	0,8312	0,8319
6.8	0,8325	0,8331	0,8338	0,8344	0,8351	0,8357	0,8363	0,8370	0,8376	0,8382
6.9	0,8388	0,8395	0,8401	0,8407	0,8414	0,8420	0,8426	0,8432	0,8439	0,8445
7.0	0,8451	0,8457	0,8463	0,8470	0,8476	0,8482	0,8488	0,8494	0,8500	0,8506
7.1	0,8513	0,8519	0,8525	0,8531	0,8537	0,8543	0,8549	0,8555	0,8561	0,8567
7.2	0,8573	0,8579	0,8585	0,8591	0,8597	0,8603	0,8609	0,8615	0,8621	0,8627
7.3	0,8633	0,8639	0,8645	0,8651	0,8657	0,8663	0,8669	0,8675	0,8681	0,8686
7.4	0,8692	0,8698	0,8704	0,8710	0,8716	0,8722	0,8727	0,8733	0,8739	0,8745
7.5	0,8751	0,8756	0,8762	0,8768	0,8774	0,8779	0,8785	0,8791	0,8797	0,8802
7.6	0,8808	0,8814	0,8820	0,8825	0,8831	0,8837	0,8842	0,8848	0.8854	0,8859
7.7	0,8865	0,8871	0,8876	0,8882	0,8887	0,8893	0,8899	0,8904	0,8910	0,8915
7.8	0,8921	0,8927	0,8932	0,8938	0,8943	0,8949	0,8954	0,8960	0,8965	0,8971
7.9	0,8976	0,8983	0,8987	0,8993	0,8998	0,9004	0,9009	0,9015	0,9020	0,9025
8.0	0,9031	0,9036	0,9042	0,9047	0,9053	0,9058	0,9063	0,9069	0,9074	0,9079
8.1	0,9085	0,9090	0,9096	0,9101	0,9106	0,9112	0,9117	0,9122	0,9128	0,9133
8.2	0,9138	0,9143	0,9149	0,9154	0,9159	0,9165	0,9170	0,9175	0,9180	0,9186
8.3	0,9196	0,9199	0,9201	0,9206	0,9212	0,9217	0,9222	0,9227	0,9232	0,9238
8.4	0,9243	0,9248	0,9253	0,9258	0,9263	0,9269	0,9274	0,9279	0,9284	0,9289
8.5	0,9294	0,9299	0,9304	0,9309	0,9315	0,9320	0,9325	0,9330	0,9335	0,9340
8.6	0,9345	0,9350	0,9355	0,9360	0,9365	0,9370	0,9375	0,9380	0,9385	0,9390
8.7	0,9395	0,9400	0,9405	0,9410	0,9415	0,9420	0,9425	0,9430	0,9435	0,9440
8.8	0,9445	0,9450	0,9455	0,9460	0,9465	0,9469	0,9474	0,9479	0,9484	0,9489
8.9	0,9494	0,9499	0,9504	0,9509	0,9513	0,9518	0,9523	0,9528	0,9533	0,9538
9.0	0,9542	0,9547	0,9552	0,9557	0,9562	0,9566	0,9571	0,9576	0,9581	0,9586
9.1	0,9590	0,9595	0,9600	0,9605	0,9609	0,9614	0,9619	0,9624	0,9628	0,9633
9.2	0,9638	0,9643	0,9647	0,9652	0,9657	0,9661	0,9666	0,9671	0,9675	0,9680
9.3	0,9685	0,9689	0,9694	0,9699	0,9703	0,9707	0,9713	0,9717	0,9722	0,9727
9.4	0,9731	0,9736	0,9741	0,9745	0,9750	0,9754	0,9759	0,9763	0,9768	0,9773
9.5	0,9777	0,9782	0,9786	0,9791	0,9795	0,9800	0,9805	0,9809	0,9814	0,9818
9.6	0,9823	0,9828	0,9832	0,9836	0,9841	0,9845	0,9850	0,9854	0,9859	0,9863
9.7	0,9868	0,9872	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	0,9908
9.8	0,9912	0,9917	0,9921	0,9926	0,9930	0,9934	0,9939	0,9943	0,9948	0,9952
9.9	0,9956	0,9961	0,9965	0,9969	0,9974	0,9978	0,9983	0,9987	0,9991	0,9996

فصل ششم

تابع و متحول (Fanction And Variable)

متحول (Variable): متحول یک سمبول بوده که به عوض هـر عنـصر یـک ست غیر خالی وضع گردد، مثلاً: $A=\{x/x\in N, x\geq 3\}$ که در ست مـذکور x از 3 الی بی‌نهایت اعداد طبیعی را گرفته می‌تواند و یا به عبـاره دیگـر کمیت کـه بتواند مستقلانه و بدون قید و شرط مقادیر (قیمت‌ها) مختلفه را اختیار نمایید، متحول نامیده می‌شود، مثلاً: مربع ABCD را در نظر می‌گیـریم، در صـورتیکه طـول یـک ضـلع آن را (x) بنـامیم، در ایـن صـورت واضـح اسـت کـه مـساحت آن $A=x\cdot x=x^2$ خواهد بود. هرگاه $x=2$ در نظر گرفتـه شـود در ایـن صـورت $A=x^2=(2)^2=4$ به همین ترتیب اگر اضلاع مربع را تغییر دهیم یعنی برای x قیمت‌های مختلف را وضـع نمـاییم، بـرای A قیمـت‌هـای مختلـف را دریافـت می‌نماییم، یعنی:

$$x=3\Rightarrow A=(3)^2=9$$
$$x=4\Rightarrow A=(4)^2=16$$
$$x=5\Rightarrow A=(5)^2=25$$



طوریکه در مثال فوق ملاحظه می‌گردد متحول مربوط به طور مستقل و آزادانـه می‌تواند قیمت‌های مختلف را به خود اختیار نماید. معمولاً متحول را با درنظرداشـت مفهوم موضوع مورد بحث به حروف کوچـک مانـنـد x، t، u، a، n و غیـره نمـایش می‌دهند.

ثابت: چون قیمت یک عدد تغییر نمی‌کند، مثلاً عدد (12) با عدد (11) و (13) هیچگاه مساوی نیست. پس می‌توان عدد (12) را ثابـت نامیـد، پـس تمـام اعـداد حقیقی ثابت گفته می‌شوند.

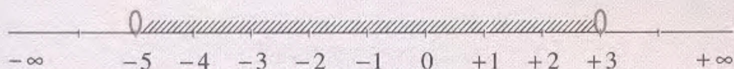
ســاحه متحــول (Interval): فاصـله را کـه در آن متحـول تغییـر و متحـول می‌نماید، به نام فاصله (ساحه، متحول) یا انترووال (Interval) یاد مـی‌گـردد. عمومـاً انترووال‌ها به شکل ذیل می‌باشند:

۱) انتروال باز (Open Interval): اگر a و b دو عدد باشند (طوریکه $a<b$ است) ست تمام اعداد مانند x بین a و b به نام انتروال باز یاد می‌شود و به (a,b) یا به شکل $a<x<b$ نشان داده می‌شود. نقاط a و b به نـام نقـاط انجـام‌هـای انتروال یاد می‌گردند. یک انتروال باز نقاط انجام‌های خود را در بر ندارد.

یک انتروال باز به طور خلاصه چنین تعریف می‌گردد:

$$(a,b)=\{x/x\in IR, a<x<b\}$$

مثلاً: ست $(-5,3)\Rightarrow A=\{x/x\in IR, -5<x<3\}$

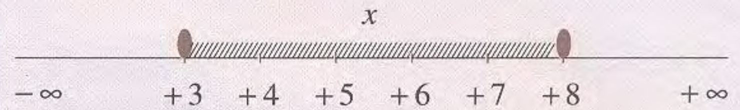


۲) انتروال بـسته (Closed Interval): اگـر a و b دو عـدد باشـند طوریکـه $a<b$ اند، ست تمام اعداد مانند x بین a و b به شمول نقاط انجـام‌هـا را انتـروال بسته می‌نامند و به شـکل $[a,b]$ یـا $a\leq x\leq b$ نمـایش داده مـی‌شـود. یـک انتروال بسته نقاط انجام‌های خود را در بر دارد.

یک انتروال بسته به طور خلاصه چنین تعریف می‌گردد:

$$[a,b]=\{x/x\in IR, a\leq x\leq b\}$$

مثلاً: ست $[+3,+8]\Rightarrow M=\{x/x\in IR, +3\leq x\leq +8\}$



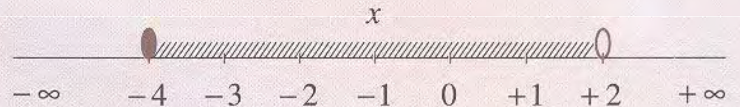
۳) انتروال‌های نیمه بسته (نیمه باز): اگر a و b دو عدد باشند (طوریکه $a < b$ است) ست تمام اعداد مانند x بین a و b به شمول یکی از نقاط انجام‌ها را انتروال نیمه بسته (نیمه باز) می‌نامند و به شکل $[a,b)$ یا $a \le x < b$ و یا $(a,b]$ یا $a < x \le b$ نمایش داده می‌شود.

یک انتروال نیمه بسته (نیمه باز) به طور خلاصه چنین تعریف می‌گردد:

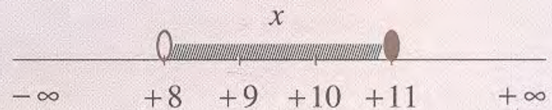
$[a,b) = \{x/x \in IR, a \le x < b\}$

ویا $(a,b] = \{x/x \in IR, a < x \le b\}$

مثال ۱: ست $[-4,+2) \Rightarrow D = \{x/x \in IR, -4 \le x < +2\}$



مثال ۲: ست $(+8,+11] \Rightarrow p = \{x/x \in IR, +8 < x \le +11\}$



مثال‌ها:

مثال ۱: انتروال‌های ذیل را توسط ست‌ها تعریف نمایید:

a- $(-8,-3)$
b- $(+3,+11)$
c- $[+5,+9]$
d- $(+4,+10]$
e- $[-5,0)$
f- $[-20,+20]$

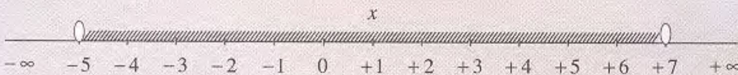
a) $(-8,-3) = \{x/x \in IR, -8 < x < -3\}$
b) $(+3,+11) = \{x/x \in IR, +3 < x < +11\}$
c) $[+5,+9] = \{x/x \in IR, +5 \le x \le +9\}$
d) $(+4,+10] = \{x/x \in IR, +4 < x \le +10\}$
e) $[-5,0) = \{x/x \in IR, -5 \le x < 0\}$
f) $[-20,+20] = \{x/x \in IR, -20 \le x \le +20\}$

مثال ۲: انتروال‌های ذیل را در شکل نشان دهید؟

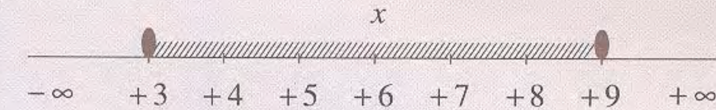
a) $(-5,+7)$
b) $[+3,+9]$
c) $[-3,+2]$
d) $[+4,\infty)$
e) $(-\infty,-5]$
f) $(-5,+4]$
g) $(-6,+6)$
h) $(-\infty,-2)$, $(+2,\infty)$

حل:

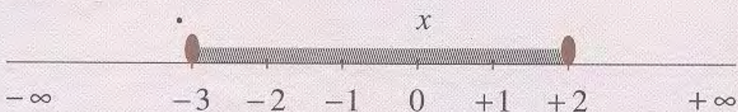
a) $(-5,+7) \Rightarrow$



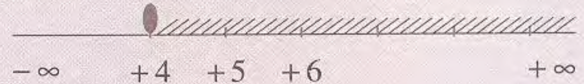
b) $[+3,+9] \Rightarrow$



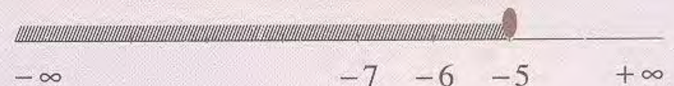
c) $[-3,+2] \Rightarrow$



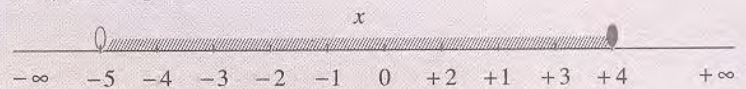
d) $[+4, \infty) \Rightarrow$



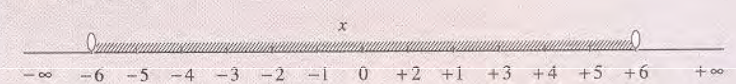
e) $(-\infty, -5] \Rightarrow$



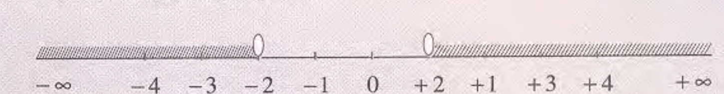
f) $(-5, +4] \Rightarrow$



g) $(-6, +6) \Rightarrow$



h) $(-\infty, -2), (+2, \infty) \Rightarrow$



مثال ۳: ست‌های داده شده ذیل را در شکل انتروال بنویسید؟

a) $A = \{x/x \in IR, -2 \le x \le +3\}$

b) $B = \{x/x \in IR, +5 < x < +13\}$

c) $C = \{x/x \in IR, -4 \le x < +5\}$

d) $D = \{x/x \in IR, +15 < x \le +45\}$

e) $E = \{x/x \in IR, -\infty < x < +\infty\}$

حل:

a) $[-2, +3]$　　b) $(+5, +13)$

c) $[-4, +5)$　　d) $(+15, +45]$

e) $(-\infty, +\infty)$

رابطه (Relation)

چون می‌دانیم (x,y) یک جوره مرتب روی سیستم کمیات وضعیه قایم می‌باشد، پس ستی که از جوره‌های مرتب اشیا و مفاهیم تشکیل شده باشند عبارت از رابطه می‌باشد و یا به عباره دیگر اگر A و B دو ست غیر خالی باشد، هر ست فرعی $A \times B$ (از A به B) یک رابطه است. یعنی اگر $a \in A$ و $b \in B$ باشند و $(a,b) \in IR$ باشد پس گفته می‌شود که a به همرای b رابطه دارد و به شکل (aRb) ارائه می‌گردد.

مثلاً اگر $A = \{m, n\}$ و $B = \{5,8,9\}$ باشد پس هر ست فرعی این ست عبارت از یک رابطه است.

$A \times B = \{(m,5), (m,8), (m,9), (n,5), (n,8), (n,9)\}$

$R_1 = \{(m, 5)\}$

$R_2 = \{(m,8)\}$

$R_3 = \{m, 5), (n,5)\}$

$R_4 = \{(m,8), (n,5), (n,9)\}$

⋮

در صورتیکه n تعداد عناصر ست A و m تعداد عناصر ست B باشد، پس در این صورت تمام ست‌های فرعی آن که یک رابطه را تشکیل می‌دهد عبارت از $2^{n \times m}$ بوده که در مثال فوق $64 = 2^6 = 2^{2 \times 3}$ بوده یعنی تمام رابطه‌های از A در B عبارت از 64 رابطه است.

معکوس یک رابطه (Inverse of a Relation): اگر R یک رابطه از A در B باشد معکوس R که به صورت R^{-1} نشان داده می‌شود عبارت از:

$R^{-1} = \{(y,x)/(x,y) \in R\}$

$(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R^{-1}$

مثال: اگر $R = \{(2,5), (7,3), (1,8)\}$ یک رابطه در ست اعداد طبیعی باشد معکوس رابطه مذکور $R^{-1} = \{(5,2), (3,7), (8,1)\}$ می‌باشد.

رابطـه معـادل (Equivalent Relation): رابطـه R در سـت A رابطـه معادل گفته می‌شود. در صورتیکه سه خاصیت ذیل را داشته باشد.

۱- خاصـیت انعکاسـی: بـرای هـر عنـصر $x \in A$ جـوره مرتـب $(x,x) \in R$ باشد.

۲- خاصیت تناظری: هرگاه جوره مرتب (x,y) شامل R باشـد، پـس (y,x) نیز شامل R باشد، یعنی: $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

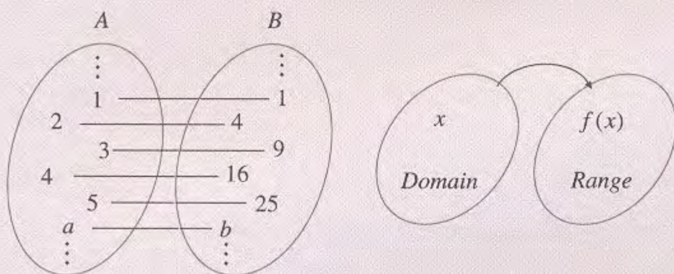
۳- خاصیت انتقالی: اگر $\left.\begin{matrix}(x,y) \in R \\ (y,z) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow (x,z) \in R$

تابع (Function): کمیت دومی که تحول آن بستگی به تغییرات کمیـت اول (متحول) داشته باشد، تابع نامیده می‌شود و بـا درنظرداشـت موضـوع بـه حروف بزرگ مانند A، C، Y، Z و غیره نمایش داده مـی‌شـود. مثـال شـروع فصل را یک بار دیگر در نظر می‌گیریم. طوریکه ملاحظـه فرمودیـد مـساحت مربع مذکور $A = x^2$ می‌باشد. بناءً در برابـر هـر قیمـت x بـرای کمیـت A (مساحت مربع) قیمت‌های مختلف دریافت گردید.

$$A = x^2$$
$$x = 1 \Rightarrow A = (1)^2 \Rightarrow A = 1$$
$$x = 2 \Rightarrow A = (2)^2 \Rightarrow A = 4$$
$$x = 3 \Rightarrow A = (3)^2 \Rightarrow A = 9$$
$$x = 4 \Rightarrow A = (4)^2 \Rightarrow A = 16$$
$$x = 5 \Rightarrow A = (5)^2 \Rightarrow A = 25$$

در مثال فوق کمیت A (مساحت مربع)، کیمت x (ضـلع مربـع) را تعقیـب می‌کند یعنی با تحول x تحول A حتمی است اگر x تغییر نکند A هـم تغییـر نمی‌کند. این نوع ارتباط را به نام تابع یاد می‌نمایند که این ارتباط را بـه طـور عموم طور ذیل تعریف می‌نماییم:

تابع عبارت از یک ارتباط بین دو ست مانند A و B مـی‌باشـد، طوریکـه برای هر عنصر از ست A تنها یک عنصر در ست B موجود گردد.



این ارتباط را توسط f، g، h و غیره نمایش می‌دهند. ست ماننـد A را بـه نام ناحیه تعریف تابع یا دومین تابع (domain) و ست مانند B را به نام ناحیه قیمت‌های تابع یا رنج تابع range یاد می‌نمایند.

هر عنصر ست B که به یک عنصر سـت A ارتبـاط دارد بـه نـام تـصویر همان عنصر ست B یاد می‌شود به طور کـل (b) تـصویر (a) اسـت و چنـین ارائه می‌گردد.

$$f(1) = 1$$
$$f(2) = 4$$
$$f(3) = 9$$
$$f(4) = 16$$
$$(f(5) = 25$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$f(a) = b$$

به صـورت عمـوم اگـر x از عناصـر سـت A و y یـا f(x) از تـصویر (x) نمایندگی نمایند. می‌توانیم بنویسیم که:

$$f: \begin{matrix} A \longrightarrow B \\ x \longrightarrow y = f(x) \end{matrix}$$

$$\text{function} \longrightarrow f: \quad \overset{domain}{A} \longrightarrow \overset{codomain(range)}{B}$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

در نظر داشته باشید که range همیشه مـساوی بـه Codomain نیـست

یعنی: $range \subseteq Codomain$

اگر ناحیه تعریف یک تابع تعیین نشده باشد یعنی ناحیـه تعریـف آن همـه اعداد حقیقی (IR) فرض می‌شود در صورتیکه تابع در آن اعداد تعریـف شـده باشد، $range = Codomain$ می‌گردد.

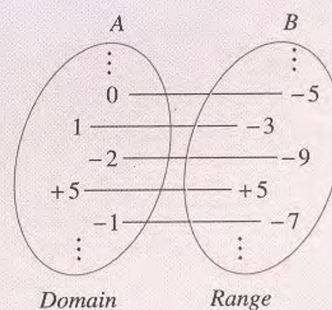
مثال‌ها:

مثال ۱: تابع $y = 2x - 5$ را در نظر گرفته قیمـت‌هـای تـابع را در نقـاط داده شده ذیل دریافته و در شکل (دیاگرام) نشان دهید:

$x = 0, x = 1, x = -2, x = +5, x = -1$

حل: چون $y = f(x)$ است پس می‌توان نوشت:

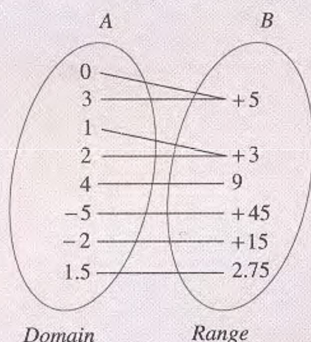
$$y = 2x - 5$$
$$\Rightarrow f(x) = 2x - 5$$
$$f(0) = 2(0) - 5 = 0 - 5 = -5$$
$$f(1) = 2(1) - 5 = 2 - 5 = -3$$
$$f(-2) = 2(-2) - 5 = -4 - 5 = -9$$
$$f(+5) = 2(5) - 5 = 10 - 5 = +5$$
$$f(-1) = 2(-1) - 5 = -2 - 5 = -7$$



مثال ۲: تابع $g(x) = (x-1)(x-2) + 3$ را در نظر گرفته قیمت‌های تـــابع مـــذکور را در نقـــاط $x = 0$ ، $x = 3$ ، $x = 1$ ، $x = 2$ ، $x = 4$ ، $x = -5$ ، $x = -2$ ، $x = 1,5$ دریابید و در شکل نشان دهید.

حل:

$$g(x) = (x-1)(x-2) + 3$$
$$g(0) = (0-1)(0-2) + 3 = (-1)(-2) + 3 = +2 + 3 = +5$$
$$g(3) = (3-1)(3-2) + 3 = (+2)(+1) + 3 = +2 + 3 = +5$$
$$g(1) = (1-1)(1-2) + 3 = 0 + 3 = +3$$
$$g(2) = (2-1)(2-2) + 3 = 0 + 3 = +3$$
$$g(4) = (4-1)(4-2) + 3 = (3)(2) + 3 = 9$$
$$g(-5) = (-5-1)(-5-2) + 3 = (-6)(-7) + 3 = +42 + 3 = +45$$
$$g(-2) = (-2-1)(-2-2) + 3 = (-3)(-4) + 3 = +12 + 3 = +15$$
$$g(1,5) = (1,5-1)(1,5-2) + 3 = (0,5)(-0,5) + 3 = -0,25 + 3 = +2,75$$

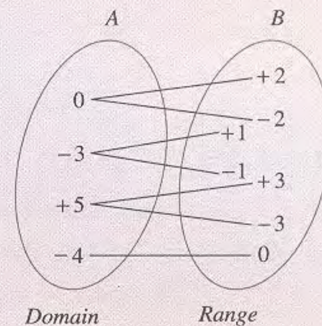


طوریکه ملاحظه می‌گردد در نقاط 0 و 3 و همچنـان 1 و 2 قیمـت‌هـای تابع دارای عین تصویر می‌باشد، که با درنظرداشت تعریف تابع این امر ممکـن می‌باشد، زیرا تصویر هر عنصر از ست domain یگانه می‌باشد.

مثال ۳: رابطه یا مساوات $y^2 = x + 4$ با در نظـرداشت نقـاط 0، 3، 5 و 4- محاسبه نموده و ابراز نظر نمایید که آیا مساوات فوق یک تابع خواهد بود؟

$$y^2 = x + 4$$
$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{x+4}$$
$$x = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{0+4} \Rightarrow y = \pm\sqrt{4} \Rightarrow y = \pm 2$$
$$x = -3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{-3+4} \Rightarrow y = \pm\sqrt{1} \Rightarrow y = \pm 1$$

$$x = 5 \Rightarrow y = \pm\sqrt{+5+4} \Rightarrow y = \pm\sqrt{9} \Rightarrow y = \pm 3$$
$$x = -4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{-4+4} \Rightarrow y = \pm\sqrt{0} \Rightarrow y = 0$$



پس در نتیجه مساوات فوق تعریف تابع را صدق نمی‌کند، زیرا برای بعضی از عناصر ست domain دو تصویر در ست range وجود دارد. یعنی بعضی از عناصر دارای تصویر یکتا نمی‌باشد. پس مساوات فقط یک رابطه می‌باشد، امـا این رابطه یک تابع نیست.

انواع توابع (Types of Functions)

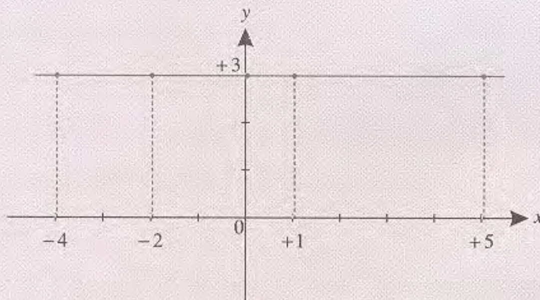
توابع انواع و اقسام مختلف دارند، که عبارت اند از:

توابع ثابت (Constant function): اگر x و y ست‌های اعـداد حقیقـی باشند، اگر $y = f(x) = c$ گردد درحالیکه $C \in IR$ باشد تابع مـذکور ثابـت نامیده می‌شود، مانند:

$$f(x) = +3,\ f(x) = -4,\ f(x) = +\frac{3}{7},\ f(x) = \sqrt{2}, ...$$

به گراف تابع $y = +3$ توجه نمایید.

x	...−4	−2	0	+1	+5 ......
y	...+3	+3	+3	+3	+3 ......



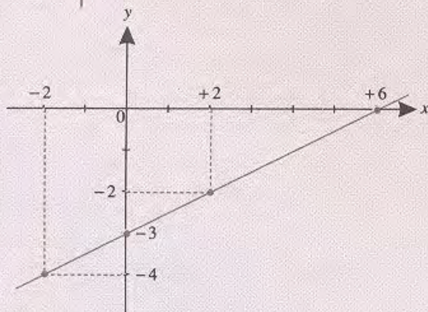
توابـــع پولینـــومیلی: توابـــع کـــه در شـــکل $P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + ... + a_n$ قرار داشته باشد بـه نـام تابع پولینومیلی یاد می‌گردد، مانند:

$$P(x) = 5x + 4,\ g(x) = x^2 - x + 1$$
$$h(x) = 3x - x^3,\ f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x + 5$$

به خاطر داشته باشید که توابع پولینومیلی درجـه اول $y = ax + b$ را بـه نام تابع خطی (Liner Function) نیز یاد می‌نمایند، زیرا گراف آن یک خـط مستقیم می‌باشد، مثلاً:

$y = \frac{1}{2}x - 3$

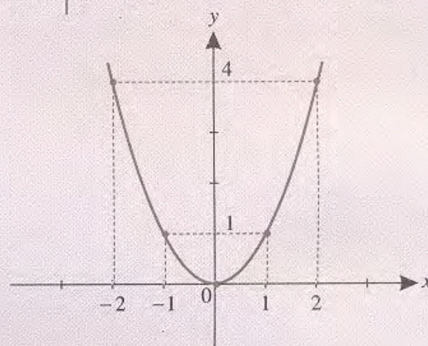
x	...−2	0	+2	+6 ......
y	...−4	−3	−2	0 ......



همچنان تابع درجـه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ (Quadratic Function) را به نام تابع پارابولی نیز یاد می‌نماید، زیرا گراف آن یـک پـارابول مـی‌باشـد، مثلاً:

x	...-2	-1	0	1	2 ......
$f(x)$	4	1	0	1	4 ......

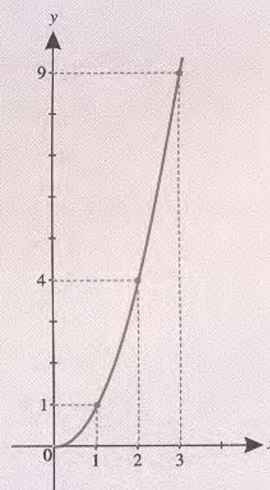
$f(x)=x^2$



توابع متزاید و متناقص (Increasing and decreasing functions):
یـک تـابع در یـک انتـروال متزایـد اسـت اگـر $x_1 < x_2$ باشـد، در نتیجـه $f(x_1) < f(x_2)$ گردد، یعنی: $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$

مثلاً: تابع $f(x)=x^2$ در انتروال $[0,\infty)$ متزاید است.

x	0	1	2	3	4 ......
$y=f(x)$	0	1	4	9	16 ......

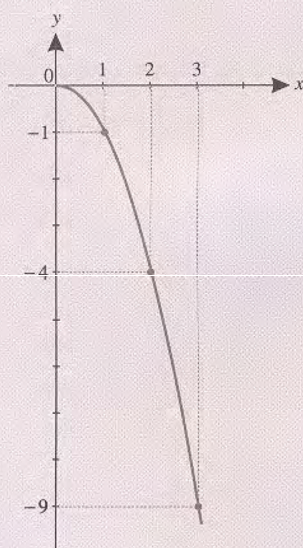


به همین ترتیب یک تابع در یک انتـروال متنـاقص گفتـه مـی‌شـود اگـر $x_1 < x_2$ باشد، در نتیجه $f(x_1) > f(x_2)$ گردد، یعنی:

$x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 > y_2$

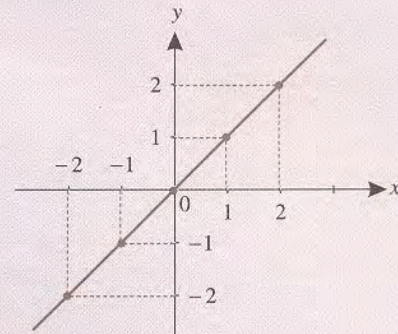
مثلاً: تابع $f(x)=-x^2$ در انتروال $[0,\infty)$ متناقص است:

x	0	1	2	3	4	5 ......
$y=f(x)$	0	-1	-4	-9	-16	-25 ......



تابع عینیت (Identity function): اگر در یک تابع هر عنـصر از ناحیـه تعریف (ست daomain) به خودش ارتباط گیرد مانند $f(x)=x$ به نام تابع عینیت یاد می‌گردد.

x	...-2	-1	0	1	2 ......
$y=f(x)$	...-2	-1	0	1	2 ......

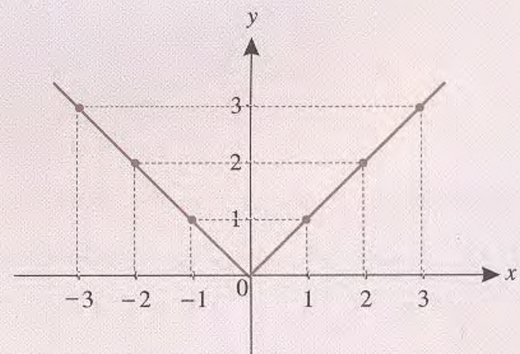


تــابع قیمــت مطلقــه (Absolute Value Function): تـابع مطلقـه $f(x)=|x|$ طوری ذیل تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases} x & , x\ge 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}$$

که گراف آن عبارت از: $f(x)=|x|$

x	...−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	......
$y=f(x)$	... 3	2	1	0	1	2	3	......

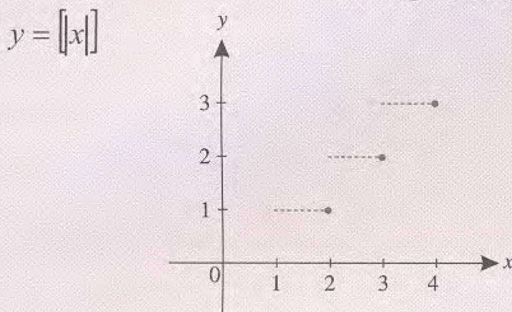


تابع زینه‌ای (تابع بزرگترین عدد تام): عبارت از تابعی است که برای هر عدد x، بزرگترین عدد تام کوچکترین یا مساوی x را مربوط می‌سازد و آن را به سمبول ذیل می‌نویسند:

$$f(x)=[\![x]\!]\ ,\ n\le x<n+1$$

که از این روش در اُجرت ارسال پست و پارسال، کرایـه انتقـال امـوال در طیاره، مصرف تیلفون همراه در فی دقیقه و غیره استفاده به عمل می‌آید، کـه گراف آن شکل ذیل را دارا می‌باشد.

$$y=[\![x]\!]$$



تابع چند معادله‌یی (Piecewise function): تابع که برای یک متحول به شکل جداگانه در ناحیه تعریف توسط دو یا چند معادله مشخص شده باشد تابع چند معادله‌یی گفته می‌شود.

مثلاً: تابع $f(x)=\begin{cases} 3x+6 : x<1 \\ x^2-1 : 2\le x\le 8 \end{cases}$ را در نظر گرفته $f(-3)$ و $f(5)$ را دریافته و ناحیه تعریف تابع f را دریابید:

حل: چون $-3<1$ مـی‌باشـد، پـس بـرای $x=-3$ معادلـه اول قابـل محاسبه می‌باشد، پس داریم که:

$$f(x)=3x+6 : x<1 \Rightarrow f(-3)=3(-3)+6$$
$$\Rightarrow f(-3)=-9+6=-3 \Rightarrow f(-3)=-3$$

از جانب دیگر چون عدد 5 در بـین 2 و 8 قـرار دارد پـس بـرای $x=5$ معادله دوم قابل محاسبه می‌باشد.

پس داریم که:

$$f(x)=x^2-1 : 2\le x\le 8 \Rightarrow f(5)=(5)^2-1$$
$$=25-1=24 \Rightarrow f(5)=24$$

همچنان تعریف f در معادله اول $(-\infty, 1)$ و در معادله دوم $[2, 8]$ می‌باشد.

تابع یک به یک: تابع $f(x)$ تابع یک به یک نامیده می‌شود، زمانی که اگر:

$$a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$$
$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

مثلاً: تابع $f(x) = 3x - 5$ تابع یک به یک است، زیرا:

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 3(2) - 5 = 6 - 5 = +1$$
$$x = 5 \Rightarrow f(5) = 3(5) - 5 = 15 - 5 = +10$$

اما تابع $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ تابع یک به یک نیست، زیرا:

$$x = -3 \Rightarrow g(-3) = \sqrt{25 - (-3)^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$
$$x = +3 \Rightarrow g(+3) = \sqrt{25 - (+3)^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

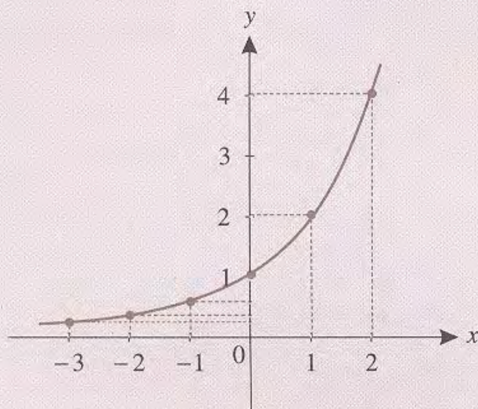
پس طوریکه ملاحظه می‌گردد $+3 \neq -3$ در حالیکه: $g(-3) = g(3)$ پس شرط $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ را صدق نمی‌کند. بناءً تابع مذکور یک به یک نیست.

توابع اکسپونیشل یا نمایی (Exponential Functions): به توابع گفته می‌شود که متحول آن در طاقت‌نما (نما) قرار داشته باشد، مانند:

$$f(x) = a^x, (a > 1)$$
$$g(x) = (3)^{2x}, h(x) = 2)^{x^2-6x+1}, P(x) = (5)^{x^3-1}, ...$$

مثلاً: گراف تابع $f(x) = 2^x$ را در نظر گرفته تابع مذکور یک تابع همیشه متزاید است.

x	...−3	−2	−1	0	1	2	3 ......
$y = f(x)$	... $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8 ......

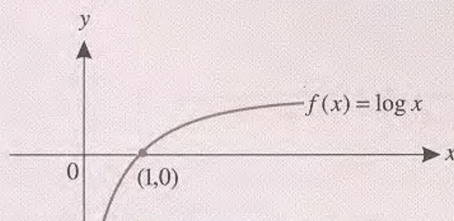


توابع لوگاریتمی (Logarithmic Functions): به توابع گفته می‌شود که متحول از جنس لوگاریتم ارائه گردیده باشد، مانند:

$$f(x) = \log_a x, f(x) = \log_2(5x+1),$$
$$f(x) = \log(x^2 + 5x - 3), f(x) = \ln x, ...$$

مثلاً: گراف تابع $f(x) = \log x$ را ترسیم می‌نماییم.

x	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	......
$y = f(x)$	...	-0,6	-0,3	0	0,3	0,4	0,6	0,69	......

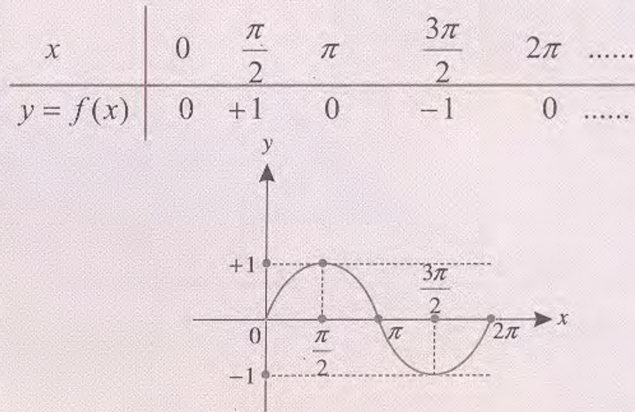


توابع مثلثاتی (Trigonometric Functions): به توابع گفته می‌شود که متحول مربوط آن از جنس نسبت‌های مثلثاتی ارائه گردیده باشد، مانند:

$$f(x) = \sin x, g(x) = 2\cos(x^3 + 1), h(x) = tg^3(x^2 + 2),$$
$$p(x) = \sec(2x + 5), ...$$

مثلاً: گراف تابع $f(x)=\sin x$ عبارت است از:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	......
$y=f(x)$	0	$+1$	0	-1	0	......



توابع ناطق یا توابع نسبتی (Rational Functions): بـه توابـع گفتـه می‌شود که از خـارج قـسمت دو تـابع پولینـومیلی تـشکیل شـده باشـد. اگـر $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ باشد (در حالیکه $g(x)\neq 0$) تابع $f(x)$ یک تابع ناطق گفته می‌شود، در صورتیکه $p(x)$ و $g(x)$ پولینوم‌ها باشند.

در ناحیه تعریـف تـابع نـاطق تمـام اعـداد حقیقـی وجـود دارد بـه جـز از قیمت‌های x که در آن مخرج تابع مساوی به صفر می‌گردد، مثلاً:

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$$g(x)=\frac{x-1}{2x+5},\ h(x)=\frac{2x^3-1}{x^2+5},\ .....$$

به خاطر داشته باشید که تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ یک تابع ناطق بوده که به نام تابع هوموگرافیک نیز یاد می‌گردد که گراف آن یک هایپرابول می‌باشد.

توابع غیر ناطق یا توابع غیر نسبتی (Irrational Functions):

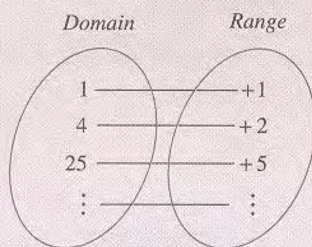
به توابع گفته می‌شود که متحول در تحت جذر قرار داشته باشد و یا تـابع مذکور به نسبت تبدیل گردیده نتواند، مانند:

$$f(x)=\sqrt{x+5},\ g(x)=\sqrt[3]{2x^2-1}$$

$$h(x)=\sqrt[4]{x^3-3x+10}.....$$

به خاطر داشته باشید که ست ناحیـه قیمـت‌هـا (Range) توابـع جـذری بـه جذرنمای جفت برای جذر اصـلی یـک عـدد (principal root of a number) موجود گردد. در غیر صورت تابع تعریف نمی‌گردد، مثلاً:

$$f(x)=\sqrt{x}$$



توابع صریح (آشکارا): هرگاه بین تابع و متحول مناسبت طـوری باشـد که تابع را بر حسب متحول مربوط آن ارائه نموده بتوانیم، تابع صریح (آشکارا) نامیده می‌شود.

مثلاً: مساوات $3x^2y-5xy-x^3=2$ را در نظر گرفته، می‌توان چنـین نوشت:

$$3x^2y-5xy-x^3=2$$

$$3x^2y-5xy=x^3+2$$

$$y(3x^2-5x)=x^3+2\Rightarrow y=\frac{x^3+2}{3x^2-5x}\Rightarrow f(x)=\frac{x^3+2}{3x^2-5x}$$

توابع غیر صریح (غیر آشکارا): هرگـاه مناسـبت بـین تـابع و متحـول طوری باشد که تابع را بر حسب متحول مربوط آن ارائه نمـوده نتـوانیم، تـابع غیر صریح (غیر آشکارا) نامیده می‌شود.

مثلاً: مساوات $5xy^2-15x^2y-25x=0$ را در نظـر گرفتـه، خـواهیم دید که:

$$5xy^2 - 15x^2y - 25x = 0 \Rightarrow 5xy^2 - 15x^2y = 25$$

$$y(5xy - 15x^2) = 25x \Rightarrow 5xy(y - 3x) = 25x$$

$$\Rightarrow y = \frac{25x}{5x(y - 3x)}$$

$$y = \frac{5}{y - 3x} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{f(x) - 3x}$$

طوریکه ملاحظه می‌گردد، نتوانستم تـابع y را از جـنس متحـول x ارائـه نماییم.

توابع جفت و طاق (Even and odd Functions):

تابع $y = f(x)$ را در نظر گرفته:

۱) هرگاه $f(-x) = f(x)$ گردد تابع مذکور جفت نامیده می‌شود. مانند:

$$f(x) = 5x^2,\ f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$$

$$f(x) = \cos x,\ f(x) = \sec x, ...$$

مثلاً: تابع $f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$ را در نظر گرفته، می‌توان نوشت:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{3^1 + 3^{-1}}{2} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{3} \Rightarrow f(1) = \frac{5}{3}$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{3^{-1} + 3^1}{2} = \frac{\frac{1}{3} + 3}{2} = \frac{5}{3} \Rightarrow f(-1) = \frac{5}{3}$$

طوریکه ملاحظه می‌گـردد $f(1) = f(-1)$ مـی‌گـردد، در نتیجـه تـابع $f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$ یک تابع جفت است.

به همین ترتیب تابع $f(x) = \cos x$ را در نظر گرفته، می‌توان نوشت:

$$x = 60^\circ \Rightarrow f(60^\circ) = \cos 60^\circ = 0,5 \Rightarrow f(60^\circ) = 0,5$$

$$x = -60^\circ \Rightarrow f(-60^\circ) = \cos(-60^\circ) = \cos 60 = 0,5$$

$$\Rightarrow f(-60^\circ) = 0,5$$

طوریکه ملاحظه می‌گردد $f(60^\circ) = f(-60^\circ)$ می‌شود، در نتیجه تابع $f(x) = \cos x$ یک تابع جفت می‌باشد.

۲) هرگاه $f(-x) = -f(x)$ گردد تابع مذکور طـاق نامیـده مـی‌شـود. مانند: $f(x) = 4x^3,\ f(x) = \sin x,\ f(x) = tg2x, ...$

مثال: تابع $f(x) = 4x^3$ را در نظر گرفتـه، فرضاً $x = 2$ و $x = -2$ باشد پس می‌توان نوشت:

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 4(2)^3 = 4 \cdot 8 = 32 \Rightarrow f(2) = 32..(1)$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = 4(-2)^3 = 4 \cdot (-8) = -32 \Rightarrow f(-2) = -32...(2)$$

با درنظرداشت رابطه (1) و (2) هرگـاه قیمـت $f(2) = 32$ را از رابطـه (1) در رابطه (2) وضع نماییم داریم که:

$$\Rightarrow f(-2) = -32$$

$$f(-2) = -f(2)$$

طوریکه ملاحظه مـی‌گـردد $f(-x) = -f(x)$ گردیـده اسـت پـس در نتیجه تابع $f(x) = 4x^3$ یک تابع طاق می‌باشد.

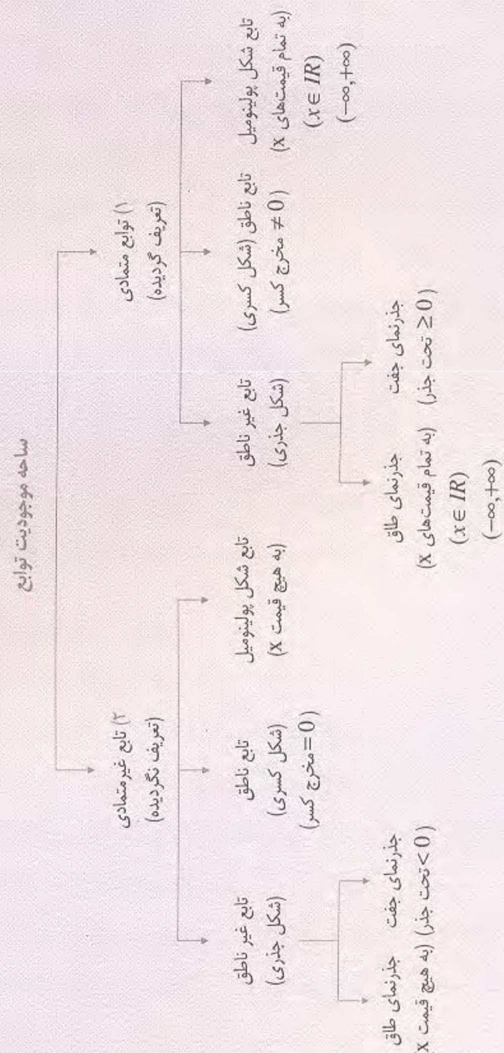
ساحهٔ موجودیت توابع

۱- تابع متمادی (Continuous Function): هرگاه تـابع $y = f(x)$ در یک فاصله $[a, b]$ موجود باشد، هرگاه در برابـر قیمـت‌هـای متحـول x برای تابع مربوط قیمت دریافت شده بتواند، در این صورت تـابع مـذکور به همان قیمت‌ها متمادی نامیده می‌شود و یا به عباره دیگـر بـه همـان قیمت‌ها تعریف گردیده است.

۲- تابع غیر متمادی (Discontinuous Function): تـابع $y = f(x)$ را در نظر گرفته، هرگاه در برابر بعـضی از قیمـت‌هـا یـا قیمـت‌هـای متحول x برای تابع مربوط در ساحه اعداد حقیقی قیمت دریافت شده

نتواند، در این صورت تابع مـذکور بـه همـان قیمت یـا قیمـت‌هـای غیرمتمادی نامیده می‌شود و یا به عبـاره دیگـر بـه همـان قیمـت‌هـا تعریف نگردیده است.

جهت وضاحت بیشتر جدول ذیل موضوعات فوق را چنین بیان می‌نماید.



مثال‌ها:

مثال ۱: تابع $f(x)=2x^3+5x-1$ به کدام قیمـت‌هـای x متمـادی است (تعریف گردیده است).

حل: چون تابع مذکور در شکل پولینومیل الجبـری قـرار داشـته بـه تمـام قیمت‌های x تعریف گردیده یا متمادی می‌باشد، یعنی:

$dom(f)=IR$

ویا $dom(f)=(-\infty,\infty)$

مثال ۲: تابع $g(x)=3x^2-5$ به کدام قیمت‌های x غیر متمادی است (تعریف نگردیده است).

حل: چون تابع مذکور در شکل پولینومیل الجبری قرار دارد به هیچ قیمت (x) غیر متمادی نمی‌باشد.

$dom\ (g)=IR\cap\phi=\phi$

مثال ۳) تابع $h(x)=\dfrac{3x^2+5}{2x-4}$ به کدام قیمت‌های x متمادی است.

حل: چون تابع در شکل کسری می‌باشد. بناءً: $0\neq$ مخرج

$2x-4\neq 0\Rightarrow 2x\neq +4\Rightarrow x\neq +2$

و ست (set) ناحیه تعریف آن عبارت از:

$dom\ (h)=(-\infty,\infty)\setminus\{x/h(x)=2\}$

مثال ۴: تابع $f(x)=\dfrac{9x^2+7x-1}{x^2-25}$ به کـدام قیمـت‌هـای x تعریـف نگردیده (غیر متمادی است).

حل: چون تابع در شکل کسری (نـاطق) مـی‌باشـد، پـس زمـانی تعریـف نگردیده یا غیر متمادی است که: $=0$ مخرج

$x^2-25=0\Rightarrow x^2=25\Rightarrow x=\pm 5$

$dom(f)=(-\infty,-5)\cup(-5,+5)\cup(-5,+\infty)$

مثال ۵: تابع $y=\dfrac{3}{2x^2+8}$ به کدام قیمت‌های x غیر متمادی است:

حل: چون تابع در شکل کسری می‌باشد، پس زمانی غیر متمادی می‌گردد که: مخرج $= 0$

$$2x^2+8=0 \Rightarrow 0 \Rightarrow 2x^2=-8 \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow x=\sqrt{-4}$$

(در ساحه اعداد حقیقی جذر ندارد) $= x$

پس تابع مذکور به هیچ قیمت x در ساحه اعداد حقیقی غیر متمادی نمی‌باشد و به تمام قیمت‌های x متمادی است.

$$\Rightarrow dom(y)=(-\infty,+\infty)$$

مثال ۶: تابع $g(x)=\sqrt{3x-15}$ به کدام قیمت‌های x متمادی است.

حل: چون تابع مذکور در شکل جذری (غیر ناطق) بـه جـذر نمـای جفـت می‌باشد، پس زمانی متمادی است که: تحت جذر ≥ 0

$$3x-15\geq 0 \Rightarrow 3x\geq 15 \Rightarrow x\geq 5$$

وسعت ناحیه تعریف آن عبارت از:

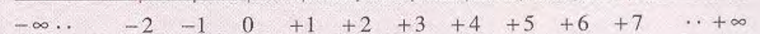
$$dom(g)=\{x/x\in IR,\ x\geq 5\}=[5,\infty)$$

مثال ۷: تابع $f(x)=\sqrt[4]{x^2+5x-14}$ به کدام قیمت‌هـای x تعریـف گردیده (متمادی است).

حل: چون تابع مذکور در شکل جذری (غیر ناطق) بـه جـذر نمـای جفـت می‌باشد، پس زمانی تعریف گردیده یا متمادی است که: تحت جذر ≥ 0

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow x^2+5x-14\geq 0\\&x^2+5x-14=0\\&(x-7)(x+2)=0\\&x-7=0,\ x+2=0\\&x=7,\ x=-2\end{aligned}\right\}$$

چون اشاره a و علامه نامساوی موافق اند نامساوی مذکور در خارج جذور حل دارد.



و ناحیه تعریف آن عبارت از:

$$dom(f)=\{x/x\in IR,\ x\leq -2 \vee x\geq +7\}$$

ویا $dom(f)=(-\infty,-2]\cup[+7,\infty)$

ویاهم $dom(f)=(-\infty,\infty)\setminus\{x/f(x)=-2<x<+7\}$

مثال ۸: تابع $f(x)=\sqrt[6]{-3x+3}$ به کدام قیمت‌های x غیر متمادی است.

حل: چون تابع مذکور در شکل جذری (غیر ناطق) بـه جـذر نمـای جفـت می‌باشد، پس زمانی غیر متمادی می‌گردد، که: تحت جذر < 0

$$-3x+3<0 \Rightarrow -3x<-3 \Rightarrow x>+1$$

مثال ۹: تابع $h(x)=\sqrt[3]{x+3}$ به کدام قیمت‌های متحول x متمادی است.

حل: چون تابع مذکور در شکل جذری (غیر ناطق) بـه جـذر نمـای طـاق می‌باشد، پس به تمام قیمت‌های متحول x متمادی است و ناحیـه تعریـف آن عبارت است از: $dom(h)=(-\infty,+\infty)$

مثلاً:

$$x=-11 \Rightarrow h(-11)=\sqrt[3]{-11+3}=\sqrt[3]{-8}=-2 \Rightarrow h(-11)=-2$$

$$x=0 \Rightarrow h(0)=\sqrt[3]{0+3}=\sqrt[3]{3}\cong 1{,}583 \Rightarrow h(0)\cong 1{,}583$$

$$x=5 \Rightarrow h(5)=\sqrt[3]{5+3}=\sqrt[3]{8}=+2 \Rightarrow h(5)=+2$$

$$x=24 \Rightarrow h(24)=\sqrt[3]{24+3}=\sqrt[3]{27}=+3 \Rightarrow h(24)=+3$$

مثال ۱۰: تابع $f(x)=\sqrt[5]{2x^2-x+1}$ به کدام قیمت‌های متحـول x غیر متمادی است:

حل: چون تابع مذکور در شکل غیر ناطق (غیر نسبتی) به جذر نمای طاق مـی‌باشـد. بنـاءً بـه تمـام قیمـت‌هـای x متمـادی بـوده و ناحیـه تعریـف آن $(-\infty,+\infty)$ می‌باشد، ازینرو به هیچ قیمت x غیر متمادی نمی‌باشد.

انتقال (Translation): هرگاه گراف تابع $y=f(x)$ را در نظر گرفتـه در صورتی‌که C یک عدد حقیقی باشد در این صورت گـراف تـابع مـذکور دو نوع انتقال ذیل را دارا می‌باشد:

۱. انتقال عمودی (Vertical Translation): این انتقال به طرف بالا و پائین قرار ذیل صورت می‌گیرد.

الف: اگر گراف تابع $y = f(x)$ به اندازه c واحد به شکل عمودی به طرف بالا انتقال نمایند، در این صورت تابع $y = f(x) + c$ حاصل می‌گردد.

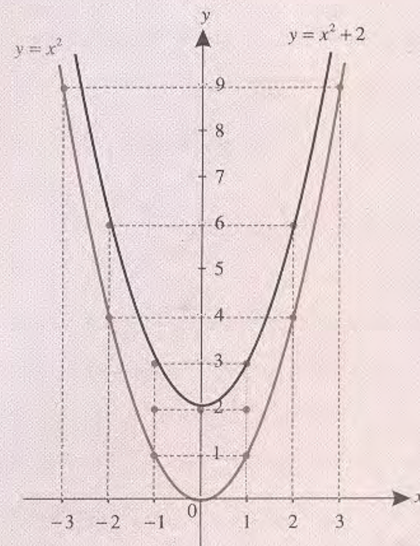
ب: اگر گراف تابع $y = f(x)$ به اندازه c واحد به شکل عمودی به طرف پایین انتقال نمایند، در این صورت تابع $y = (x) - c$ حاصل می‌گردد.

مثال: با درنظرداشت گراف تابع $y = x^2$ اگر تابع مذکور به اندازه (2) واحد به طرف بالا و پایین انتقال نماید، تابع انتقال یافته آن به طرف بالا و پایین قرار ذیل است:

انتقال به طرف بالا: $y = x^2 + 2$

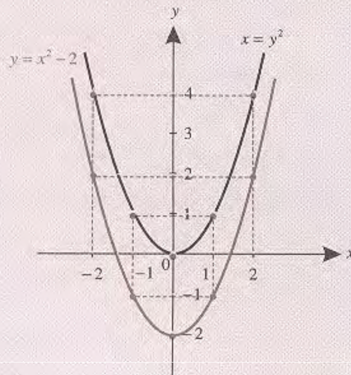
x	...-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y = x^2 - 2$	11	6	3	2	3	6	11

$y = x^2 + 2y = x^2$



انتقال به طرف پایین: $y = x^2 - 2$

x	...-2	-1	0	1	2....
$y = x^2$	9	4	0	1	4
$y = x^2 + 2$	11	6	-2	-1	2



۲) انتقال افقی (Horizontal Translation): این انتقال به طرف راست و چپ قرار ذیل صورت می‌گیرد:

الف: اگر گراف تابع $y = f(x)$ به اندازه c واحد به شکل افقی به طرف راست انتقال نمایید، در این صورت تابع $y = f(x-c)$ حاصل می‌گردد.

ب: اگر گراف تابع $y = f(x)$ به اندازه c واحد به شکل افقی به طرف چپ انتقال نمایند، در این صورت تابع $y = f(x+c)$ حاصل می‌گردد.

مثال: با درنظرداشت گراف تابع $y = x^2$ اگر تابع مذکور به اندازه 2 واحد به طرف راست و چپ انتقال نمایید، تابع انتقال یافته آن به طرف راست و چپ قرار ذیل است:

انتقال به طرف راست: $y = (x-2)^2$

x	...-2...	-1	0	1	2	3	4....
$y = x^2$	4	1	0	1	4	9	16
$y=(x-2)^2$	16	9	4	1	0	1	4

عملیه‌های الجبری توابع: در توابع مانند افاده‌های الجبری می‌توانیم عملیات اساسی (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) را اجرا نماییم که اجرای هر یک از این عملیه‌ها را به نام الجبره توابع نیز یاد می‌کنند، آنچه در عملیه‌های توابع ضروری است تعیین ناحیه تعریف (domain) حاصل جمع، حاصل تفریق، حاصل ضرب و حاصل تقسیم توابع است، که قرار ذیل تعریف گردیده اند:

1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)\Rightarrow dom(f+g)(x)$
$=dom\, f\bigcap dom\, g$

2) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow dom(f-g)(x)$
$=dom\, f\bigcap dom\, g$

3) $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)\Rightarrow dom(f\cdot g)(x)$
$=dom\, f\bigcap dom\, g$

4) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0\Rightarrow dom(\frac{f}{g})(x)$
$=dom\, f\bigcap dom\, g-\{x/g(x)\neq 0\}$

مثال: اگر توابع f و g در ست اعداد حقیقی طور ذیل تعریف گردیده باشند:
$f(x)=3x^3-1$ و $g(x)=x^2+3x-4$ پس‌داریم که:

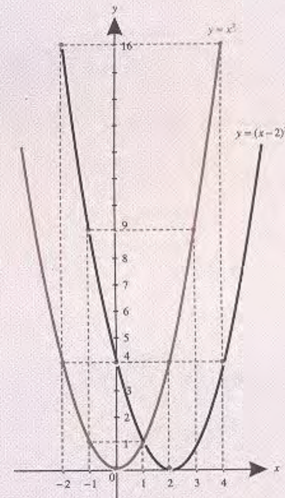
1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
$=3x^3-1+x^2+3x-4=3x^3+x^2+3x-5$

و ناحیه تعریف آن:

$dom(f+g)=dom(f)\bigcap dom(g)=IR\bigcap IR=IR$

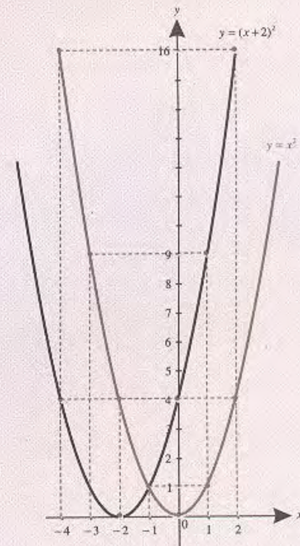
2) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
$=3x^3-1-(x^2+3x-4)=3x^3-1-x^2-3x+4$
$=3x^3-x^2-3x+3$

و ناحیه تعریف آن:



انتقال به طرف چپ: $y=(x+2)^2$

x	... −4	−3	-2	-1	0	1	2 ....
$y=x^2$	16	9	4	1	0	1	4
$y=(x+2)^2$	4	1	0	1	4	9	16



$$dom(f-g)=dom(f)\bigcap dom(g)=IR\bigcap IR=IR$$

$$3)\ (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$
$$=(3x^3-1)(x^2+3x-4)=3x^5+9x^4-12x^3-x^2-3x+4$$

و ناحیه تعریف آن:

$$dom(f\cdot g)=dom(f)\bigcap dom(g)=IR\bigcap IR=IR$$

$$4)\ (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$=\frac{3x^3-1}{x^2+3x-4}=(3x-9)+\frac{39x-37}{x^2+3x-4}$$

و ناحیه تعریف آن:

$$dom(\frac{f}{g})=\{dom(f)\bigcap dom(g)\}\setminus\{x/g(x)=0\}$$
$$=IR\bigcap IR\setminus\{-4,1\}$$
$$=IR\setminus\{-4,1\}$$

توابع مرکب یا ترکیب توابع (Composite Functions)

تا فعلاً توابع را مورد مطالعه قرار دادیم کـه دارای یـک متحـول مـستقل بودند. توابعی دیگری هم وجود دارند که متحول آن دوباره تابع یـک متحـول دیگر می‌باشد.

مثلاً: اگر یک موتر به طور متوسط در فی سـاعت 20km فاصـله را طـی نماید، واضح است که:

در دو ساعت: $20km\cdot 2=40km$

در سه ساعت: $20km\cdot 3=60km$

در چهار ساعت: $20km\cdot 4=80km$

و بالاخره در (t) ساعت $20km\cdot t=20km\cdot t$ فاصـله را طـی خواهـد نمود. اگر فاصله طی شده را به x نشان دهیم، پس می‌توانیم بنویسیم که:

$$x=f(t)\Rightarrow x=20\cdot t$$

حالا اگر موتر مذکور به طور متوسط در هـر 10 کیلـومتر یـک لیتـر تیـل پطرول (در هر کیلومتر 0,1 لیتر تیل) مصرف نمایند، واضح است که:

در دو کیلومتر: $2\cdot(0{,}1\,Lit)=0{,}2\,Lit$

در سه کیلومتر: $3\cdot(0{,}1\,Lit)=0{,}3\,Lit$

در چهار کیلومتر: $4\cdot(0{,}1\,Lit)=0{,}4\,Lit$

بالاخره در x کیلومتر $x(0{,}1\,Lit)=0{,}1\,x\,Lit$ مصرف خواهد شد. اگـر تیل پطرول مصرف شده را به g نشان دهیم، پس می‌توان نوشت:

$$g(x)=0{,}1x$$

چون:

$$x=f(t)\Rightarrow x=20\cdot t$$
$$\Rightarrow g(f(t))=0{,}1\cdot 20\cdot t$$
$$g(f(t))=2\cdot t$$

اگر $p=g(f(t))$ نامیده شود، پس در نتیجه P را تـابع مرکـب g و f می‌گویند. بناءً به طور عموم اگر دو تابع f و g را در نظـر داشـته باشـیم، پـس ترکیب توابع مذکور طور ذیل ارائه می‌گردد:

$$f(g(x))=(fog)(x)$$

چنین خوانده می‌شود: f ترکیب با g از x (یا f بعد از g از x)

همچنان می‌توان نوشت: $g(f(x))=(gof)(x)$

و چنین خوانده می‌شود g ترکیب با f (یا g بعداز از x)

مثال‌ها:

ترکیب توابع ذیل را دریافت نمایید.

مثال اول: اگـر $f(x)=3x-2$ و $g(x)=x^2$ باشـد در ایـن صـورت $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ را دریابید:

$$(fog)(x)=f(g(x))=3(g(x))-2=3x^2-2$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=(f(x))^2=(3x-2)^2=9x^2-12x+4$$

مثال دوم: اگر $f(x)=5x^2-1$ و $g(x)=x+4$ باشد در این صورت $(fog)(2)$ و $(gof)(-3)$ را دریابید:

$$(fog)(x)=f(g(x))=5(g(x))^2-1=5(x+4)^2-1$$
$$=5(x^2+8x+16-1=5x^2+40x+80-1=5x^2+40x+79$$
$$\Rightarrow (fog)(x)=5x^2+40x+79$$
$$(fog)(2)=5(2)^2+40(2)+79=20+80+79=179$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=f(x)+4=5x^2-1+4=5x^2+3$$
$$\Rightarrow (gof)(x)=5x^2+3$$
$$(gof)(-3)=5(-3)^2+3=5\cdot 9+3=45+3=48$$

مثال سوم: اگر $f(x)=\sqrt{x+4}$ و $g(x)=x^4$ باشد، در این صورت $(fog)(x)$، $(gof)(x)$، $(fof)(x)$ و $(gog)(x)$ را دریابید.

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)+4}=\sqrt{x^4+4}$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=(f(x))^4=(\sqrt{x+4})^4=(x+4)^2$$
$$2x^2+8x+16$$
$$(fof)(x)=f(f(x))=\sqrt{f(x)+4}=\sqrt{\sqrt{x+4}+4}$$
$$(gog)(x)=g(g(x))=(g(x))^4=(x^4)^4=x^{16}$$

مثال چهارم: اگر $f(x)=\frac{x-2}{x}$، $g(x)=x^2$ و $h(x)=x+5$ باشد. در این صورت $(fog\,oh)(x)$، $(gof\,oh)(x)$ و $(hofog)(x)$ را دریابید.

$$(fogoh)(x)=?$$
$$\Rightarrow (goh)(x)=g(h(x))=(h(x))^2=(x+5)^2$$
$$=x^2+10x+25$$

$$(fogoh)(x)=f(goh)(x)=\frac{(goh)x-2}{(goh)x}$$
$$=\frac{x^2+10x+25-2}{x^2+10x+25}=\frac{x^2+10x+23}{x^2+10x+25},\ x\neq -5$$
$$(gofoh)(x)=?$$
$$\Rightarrow (foh)(x)=f(h(x))=\frac{h(x)-2}{h(x)}=\frac{x+5-2}{x+5}$$
$$=\frac{x+3}{x+5},\ x\neq -5$$
$$(gofoh)(x)=g(foh)(x)=[(foh)(x)]^2=(\frac{x+3}{x+5})^2$$
$$=\frac{x^2+6x+9}{x^2+10x+25},\ x\neq -5$$
$$(hofog)(x)=?$$
$$\Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)-2}{g(x)}=\frac{x^2-2}{x^2},\ x\neq 0$$
$$(hofog)(x)=h(fog)(x)=(fog)x+5=\frac{x^2-2}{x^2}+5$$
$$=\frac{x^2-2+5x^2}{x^2}=\frac{6x^2-2}{x^2},\ x\neq 0$$

مثال پنجم: هرگاه $f(x)=3x+4$ و $f(g(x))=6x+1$ باشد در این صورت $g(x)=?$

$$f(x)=3x+4$$
$$f(g(x))=3(g(x))+4$$
$$\Rightarrow 6x+1=3(g(x))+4$$
$$3(g(x))=6x+1-4$$
$$3(g(x))=6x-3/:3\Rightarrow g(x)=2x-1$$

توابـع معکـوس (Inverse Functions): دو تـابع f و g کـه یکـی در بازگشت دیگرش قرار داشته باشند، توابع معکوس همدیگر نامیده می‌شود.

معمولاً می‌نویسیم که: $f^{-1} = g,\ g^{-1} = f$

واضح است که: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ باشد.

و یا: $x = f(y) \Leftrightarrow y = f^{-1}(x)$ باشد.

قابل یادآوری است که هرنوع تابع دارای معکوس نمی‌باشد و اگر یک تابع دارای تابع معکوس باشد لازم و کافی است که تابع مذکور از نوع یک به یک باشد و دو تابع زمانی معکوس گفته می‌شوند که دو شرط ذیل را صدق نمایند:

1) $f[g(x)] = x$

2) $g[f(x)] = x$

مثال‌ها:

مثـــال ۱: دو تـــابع $f(x) = 3x + 2$ و $g(x) = \dfrac{x-2}{3}$ معکـــوس همدیگر اند، زیرا:

$$f[g(x)] = 3(g(x)) + 2 = 3(\frac{x-2}{3}) + 2 = x$$

$$g[f(x)] = \frac{f(x)-2}{3} = \frac{3x+2-2}{3} = x$$

که می‌توان f^{-1} را چنین دریافت نمود:

$$f(x) = 3x + 2$$

$$\because f(y) = x$$

$$3y + 2 = x \Rightarrow 3y = x - 2 /: 3 \Rightarrow y = \frac{x-2}{3}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$

مثال ۲: معکوس تابع $f(x) = x^2$ برای $x > 0$ دریابید.

$$f(x) = x^2$$

$$\because f(y) = x$$

$$y^2 = x \Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{x} \Rightarrow y = \sqrt{x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

مثال ۳: معکوس تابع $f(x) = 5x^3 - 7$ را دریابید.

$$\because f(y) = x \Rightarrow 5y^3 - 7 = x \Rightarrow 5y^3 = x + 7 /: 5$$

$$y^3 = \frac{x+7}{5} \Rightarrow \sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{\frac{x+7}{5}} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x+7}{5}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+7}{5}}$$

مثال ۴: معکوس تابع $f(x) = \log_a x$ را دریابید.

$$\because f(y) = x \Rightarrow \log_a y = x \Rightarrow y = a^x \Rightarrow f^{-1}(x) = a^x$$

مثال ۵: معکوس تابع $f(x) = \sin x$ را دریابید:

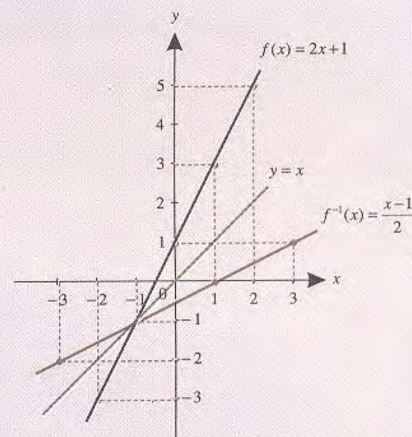
$$\because f(y) = x \Rightarrow \sin y = x \Rightarrow y = \arcsin x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = arc \sin x$$

گراف توابع معکوس: توابـع کـه معکـوس همـدیگر انـد، دارای گـراف متناظر نظر به خط مستقیم $y = x$ می‌باشند، مثلاً به طور نمونه گـراف تـابع $f(x) = 2x + 1$ و معکوس آن $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$ را ترسیم می‌نماییم.

x	... −2	−1	0	1	2	......
$f(x)$	−3	−1	+1	3	5	......

x	... −3	−1	1	3	......
$f^{-1}(x)$	−2	−1	0	1	......



مجانب‌های توابع (Asymptotes of Functions):

مجانب عبارت از خطوط مستقیمی است که حیثیت رهنمای منحنی را داشته و در بی‌نهایت با منحنی گراف تابع مماس می‌گردد و توابع که برای بعضی از قیمت‌های متحول x غیر متمادی می‌گردد و خصوصاً توابع ناطق (نستبی) که گراف آن منفصل می‌باشد، دارای مجانب می‌باشند.

مجانب‌ها به طور عموم به سه نوع عمودی، افقی و مایل اند، پس اگر $g(x)=b_1x^n+b_2x^{n-1}+.....+b_n$ و $p(x)=a_1x^n+a_2x^{n-1}+....+a_n$ دو تابع پولینومیلی و $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ یک تابع ناطق را ارائه نمایند. پس مجانب‌های تابع $y=f(x)$ چنین به دست می‌آید:

۱) **مجانب عمودی (Vertical Asymptotes):** تابع $y=f(x)$ به قیمت $x=a$ زمانی دارای مجانب عمودی می‌باشد که $p(a)\neq 0$ و $g(a)=0$ گردد. یا به عباره دیگر اگر $f(x)\to\pm\infty$ نماید، در این صورت باید $g(x)=0$ باشد. پس برای دریافت مجانب‌های عمودی یک تابع ناطق مخرج کسر را مساوی به صفر قرار می‌دهیم. در اینصورت تعداد مجانب‌های عمودی مساوی به جذور مخرج می‌باشد، که همین خطوط مستقیم (مجانب‌های عمودی) موازی با محور y می‌باشند.

۲) **مجانب افقی (Horizontal Asymptotes):** هرگاه در تابع ناطق $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ بلندترین درجه پولینوم P(x) یعنی (n) و درجه پولینوم g(x) یعنی (m) را در نظر بگیریم با درنظرداشت قیمت‌های m و n سه حالت ذیل وجود دارد:

الف: اگر $n=m$ باشد مجانب افقی تابع $y=f(x)$ عبارت از ضرایب بلندترین طاقت‌نمایی صورت و مخرج می‌باشد، یعنی:

$y=\frac{a_1}{b_1}$ که این خط مستقیم موازی با محور x می‌باشد.

ب: اگر $m<n$ باشد در این صورت مجانب افقی تابع ناطق عبارت $y=0$ (خط محور y) می‌باشد.

ج: اگر $m>n$ باشد تابع مجانب افقی ندارد.

۳) **مجانب مایل (Slant or Oblique Asymptotes):** یک تابع ناطق زمانی دارای مجانب مایل می‌باشد که درجه متحول صورت (n) به اندازه یک واحد بیشتر از درجه متحول مخرج (m) باشد، یعنی:

$n=m+1$ که بدینوسیله حاصل تقسیم $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ یک تابع $y_1=mx+b$ با ضریب زاویوی (میل) m بوده که بر اساس آن خط مستقیم به شکل مایل ترسیم می‌گردد.

به خاطر داشته باشید که اگر یک تابع مجانب افقی داشته باشد مجانب مایل ندارد و برعکس اگر تابع مذکور مجانب مایل داشته باشد، مجانب افقی ندارد.

مثال‌ها:

مجانب‌های توابع ذیل را دریافت نمایید:

مثال ۱: مجانب عمودی تابع ذیل را دریابید.

$$f(x)=\frac{5x^2-1}{2x+6}$$

$$f(x)\longrightarrow\pm\infty$$

$$\Rightarrow g(x)=0\Rightarrow 2x+6=0\Rightarrow 2x=-6/:2\Rightarrow x=-3$$

مثال ۲: مجانب‌های تابع ذیل را دریابید.

$$f(x)=\frac{2-x}{5x+4}$$

$$f(x)\longrightarrow\pm\infty$$

$$\Rightarrow g(x)=0\Rightarrow 5x+4=0\Rightarrow 5x=-4/:5$$

مجانب عمودی: $\Rightarrow x=-\frac{4}{5}$

چون $n=m$ می‌باشد، پس: $y=\frac{a_1}{b_1}=\frac{-1}{5}$

مجانب افقی: $\Rightarrow y=-\frac{1}{5}$

چون درجه پولینوم صورت مساوی به درجه پولینوم مخرج می‌باشد، بناءً تابع مجانب مایل ندارد.

مثال ۳: تابع ذیل دارای چند مجانب عمودی می‌باشد:

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{x^3-x}$$

$$f(x)\longrightarrow\pm\infty$$

$$\Rightarrow g(x)=0\Rightarrow x^3-x=0\Rightarrow x(x^2-1)=0$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x+1)=0$$

$$x=0\,,\ x-1=0\Rightarrow x=1\,,\ x+1=0\Rightarrow x=-1$$

در نتیجه تابع مذکور دارای سه مجانب عمودی می‌باشد.

مثال ۴: مجانب افقی تابع ذیل را دریابید.

$$f(x)=\frac{3x^2+5x-1}{x^2+3}$$

چون $n=m$ است پس مجانب افقی تابع فوق عبارت از:

$$y=\frac{a_1}{b_1}=\frac{3}{1}=3\Rightarrow y=3$$

مثال ۵: تابع ذیل دارای چند مجانب می‌باشد؟

$$f(x)=\frac{3x+4}{x^2+4}$$

$$f(x)\longrightarrow\pm\infty$$

$$\Rightarrow g(x)=0\Rightarrow x^2+4=0\Rightarrow x^2-4\Rightarrow x=\sqrt{-4}$$

چون معادله جذر حقیقی ندارد، بناءً تابع فوق مجانب عمودی ندارد.

از جانب دیگر چون $n<m$ می‌باشد، پس $y=0$ (محور x) مجانب افقی تابع فوق می‌باشد. همچنان چون تابع مجانب افقی دارد پس مجانب مایل ندارد.

مثال ۶: معادله مجانب مایل تابع ذیل را دریافته آن را ترسیم نمایید:

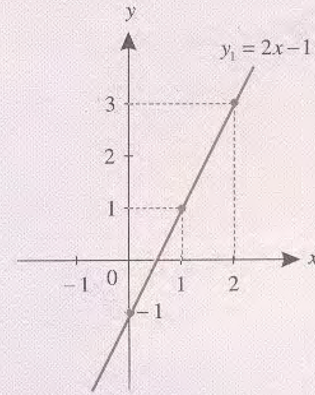
$$f(x)=\frac{2x^3+5x^2-1}{x^2+3x+1}$$

جهت دریافت مجانب مایل پولینوم p(x) را تقسیم g(x) نموده حاصل تقسیم آن عبارت از معادله مجانب مایل می‌باشد.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+5x^2+0x-1 & x^2+3x+1 \\ \underline{-2x^3\pm 6x^2\pm 2x} & 2x-1 \\ -x^2-2x-1 & \\ \underline{\mp x^2\pm 3x\mp 1} & \\ +x & \end{array}$$

معادله مجانب مایل: $\Rightarrow y_1=2x-1$

x	$\cdots 2$	0	$1\ \ldots\ldots$
y_1	3	-1	$1\ \ldots\ldots$



مثال ۷: نوعیت مجانب‌های تابع ذیل را دریابید:

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1}$$

$$f(x)\longrightarrow \pm\infty$$

$$\Rightarrow g(x)=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{1}$$

$$\Rightarrow x=\pm 1,\ x=+1,\ x=-1$$

چون $n>m$ است پس تابع مجانب افقی ندارد.

از جانب دیگر چون مجانب افقی ندارد، پس مجانب مایل دارد، که معادله آن عبارت از:

$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2+0x+1 & x^2+0x-1 \\ \cline{2-2} \underline{\pm x^3 \pm 0.x^2 \mp x} & x \\ +x+1 & \end{array}$$

معادله مجانب مایل $\Rightarrow y_1 = x$

در نتیجه تابع فوق دارای دو مجانب عمودی و یک مجانب مایل می‌باشد.

تمرینات فصل ششم

انتروال‌های ذیل را توسط ست‌ها تعریف نمایید:

1) $(-\infty, +\infty)$
2) $[-8, -5]$
3) $[7, 8]$
4) $(-19, 0]$
5) $(-2, +2)$
6) $(+7, 0)$
7) $[-4, 0]$
8) $[-5, -1]$

انتروال‌های ذیل را در شکل نشان دهید:

9) $(-3, +4)$
10) $[-7, -1]$
11) $[-3, +3]$
12) $(-1, +5)$
13) $[+2, +8]$
14) $(-\infty, +\infty)$
15) $[-2.5, 0]$
16) $[0, +6)$

ست‌های داده شده ذیل را در شکل قوس‌های انتروال بنویسید.

17) $A = \{x/x \in IR, -5 \le x \le +8\}$
18) $A = \{x/x \in IR, -\frac{5}{2} < x \le +1\}$
19) $B = \{x/x \in IR, -\infty < x \le 0\}$
20) $C = \{x/x \in IR, 0 \le x \le 5.5\}$
21) $D = \{x/x \in IR, -\infty < x \le 0\}$
22) $B = \{x/x \in IR, -2 \le x < \infty\}$
23) $M = \{x/x \in IR, +2 \le x > +10\}$
24) $N = \{x/x \in IR, +3 < x < \infty\}$

روابط ست‌های ذیل را دریافت نمایید:

25) $A = \{2\}, B = \{a, b\}$
26) $A = \{5,7\}, B = \{k, p\}$
27) $A = \{x, y\}, B = \{1, 2, 3\}$
28) $A = \{m, n\}, B = \{a, b, c, d\}$

معکوس روابط ذیل را دریافت نمایید:

29) $A = \{(1, 4), (7,5)\}$
30) $B = \{(2,3), (5,12)\}$
31) $R = \{(4,3), (1,0), (9,2)\}$
32) $M = \{(a,b), (m, n), (p,k)\}$

قیمت توابع ذیل را در نقاط داده شده دریابید:

33) $f(x) = (x-3)(x-1) + 2 \Rightarrow f(5) = ?$
34) $g(x) = 5x^2 - x + 5 \Rightarrow g(\frac{3}{2}) = ?$
35) $h(x) = \frac{5x+4}{2x+5} \Rightarrow h(2,3) = ?$
36) $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 5}{3} \Rightarrow f(1) = ?$
37) $g(x+1) = 5(x+2)^2 - 3x + 8 \Rightarrow g(-2) = ?$
38) $f(3x-1) = 8(x+1)^3 - x^2 + 1 \Rightarrow f(5) = ?$
39) $f(x) - x = 2f(x) + x^2 + 1 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = ?$

با درنظرداشت توابع ذیل و قیمت‌های داده شده برای توابع ست Domain و Range آن را در شکل نشان دهید:

40) $y = 2x^2 - 5$
$x = -3, x = 1, x = 0, x = -4, x = +4, x = 3$

41) $f(x) = x^3$
$x = 0, x = -5, x = +2, x = -1, x = +1, x = +5$

42) $y = x^2 - 5x + 6$
$x = 1, x = 2, x = 3, x = -1, x = -5$

۴۳) مساوات $y^2 = 2x + 1$ را با درنظرداشت $x = 0$، $x = 4$، $x = 6$، $x = 24$ محاسبه نموده دیاگرام ست‌های ناحیه تعریف و قیمت‌های آن را دریافته آیا مساوات فوق یک تابع خواهد بود؟

گراف توابع ذیل را ترسیم نمایید:

44) $f(x) = -2$

45) $g(x) = \frac{5}{2}$

46) $f(x) = x$

47) $g(x) = x + 1$

48) $h(x) = 2x + 6$

49) $p(x) = 2x^2$

کدام یک از توابع ذیل یک تابع جفت و کدام یک تابع طاق می‌باشد و چرا؟

50) $f(x) = 3x^2$

51) $f(x) = 5x^4$

52) $f(x) = 2x^3$

53) $g(x) = 4x$

54) $h(x) = 5^x + (\frac{1}{5})^x$

55) $f(x) = 2^x + \frac{1}{2^x}$

56) $p(x) = \operatorname{cosec} x$

57) $g(x) = \operatorname{cotg} x$

58) $l(x) = -3\sin x$

59) $k(x) = 2\cos x$

توابع ذیل به کدام قیمت‌های از متحول x متمادی و به کدام قیمت‌های x غیر متمادی می‌باشد؟

60) $f(x) = 4x - 1$

61) $f(x) = 5x^2 + x$

62) $g(x) = \frac{3x^2 - 2}{2}$

63) $g(x) = x^3$

64) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

65) $h(x) = \frac{3}{x - 3}$

66) $h(x) = \sqrt{5x - 5}$

67) $g(x) = \frac{2x + 5}{x^2 + 9}$

68) $p(x) = \sqrt[6]{x + 4}$

69) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - x - 2}$

70) $h(x) = \sqrt[5]{x^3 - 3x + 1}$

71) $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

ست ناحیه تعریف (Domian) توابع ذیل را تعیین نمایید.

72) $g(x) = x^2$

73) $f(x) = 2x - 5$

74) $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 1}$

75) $h(x) = \frac{-2}{2x - 6}$

76) $h(x)=\sqrt[4]{x^2-16}$

77) $g(x)=\sqrt{4x-12}$

78) $f(x)=\sqrt[5]{x+1}$

79) $p(x)=\sqrt[3]{x}$

ترکیب توابع ذیل را دریابید:

80) $\left.\begin{array}{l} f(x)=2x+4 \\ g(x)=\sqrt{x-1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} (fog)(x)=? \\ (gof)(x)=? \end{array}$

81) $\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-3x+1 \\ g(x)=3x-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (fog)(x)=? \\ (gof)(x)=? \end{array}$

82) $\left.\begin{array}{l} f(x)=x+5 \\ g(x)=\dfrac{1}{x+5} \end{array}\right\} \begin{array}{l} (fog)(x)=? \\ (gof)(x)=? \end{array}$

83) $\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3 \\ g(x)=\dfrac{2}{x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} (fog)(x)=? \\ (gof)(x)=? \end{array}$

84) $\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{x^2+1} \\ g(x)=tgx \end{array}\right\} (fog)(x)=?$

85) $\left.\begin{array}{l} f(x)=\log x \\ g(x)=x^2-3x+1 \end{array}\right\} (gof)(x)=?$

معکوس توابع ذیل را دریابید:

86) $f(x)=5x-8$

87) $g(x)=\dfrac{x+5}{3}$

88) $f(x)=x^3-1$

89) $f(x)=2^x$

90) $h(x)=\log_5(2x)$

91) $g(x)=\cos x$

مجانب‌های توابع ذیل را دریابید:

92) $f(x)=\dfrac{5x+8}{x-2}$

93) $f(x)=\dfrac{3-x}{4x+2}$

94) $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^3-1}$

95) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2+4}$

96) $f(x)=\dfrac{3x^2+x+1}{x^2+x+2}$

97) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+x}$

98) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

99) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

100) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-x}$

فصل هفتم

لیمت تابع (Limit of Function)

قبل بر این که لیمت یک تابع را تعریف نماییم به مفاهیم ذیل توجه نمایید:

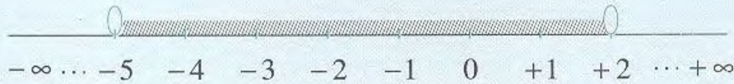
مقدار بی‌نهایت کوچک: یک متحول مانند x را در نظر گرفته، زمانی متحول مذکور را بی‌نهایت کوچک گفته می‌توانیم که در مراحل تحولش بالاخره قیمتی را اختیار نماید که قیمت مطلقه آن کوچکتر از هر عدد بسیار کوچک انتخابی مثبت مانند ε (اپسیلون) گردد، یعنی: $|x|<\varepsilon$

مقدار بی‌نهایت بزرگ: یک متحول مانند x را زمانی بی‌نهایت بزرگ گفته می‌توانیم که در مراحل تحولش بالاخره قیمتی را اختیار نماید که قیمت مطلقه آن بزرگتر از هر مقدار بسیار بزرگ انتخابی مثبت مانند (N) بزرگتر گردد، یعنی $|x|>N$ گردد.

بخاطر بسپارید که (∞) و $(-\infty)$ یک مقدار نیست بلکه یک سمبول بوده و برای نشان دادن یک مقدار بسیار بزرگ که ما آن را تعیین کرده نمی‌توانیم (∞) و برای مقدار بسیار کوچک که خود مقدار را تعیین کرده نمی‌توانیم $(-\infty)$ را به کار می‌بریم.

مجاورت: اگر x یک عدد باشد، پس هر انتروال باز (a,b) که x در آن شامل باشد، به نام یک مجاورت x یاد می‌شود.

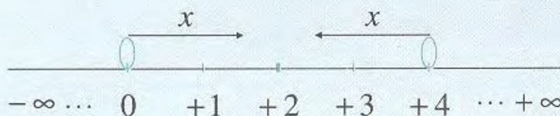
مثلاً: در انتروال باز $(-5,2)$ اعداد مانند -4، -3، -2، -1، 0 و 1 هر یک مجاورت انتروال فوق نامیده می‌شود.



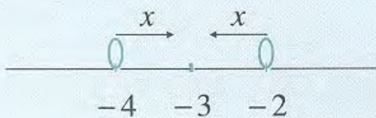
مجاورت متناظر: هرگاه انتروال باز (a,b) یک مجاورت عدد x باشد، طوریکه x نقطه وسطی (a,b) را نشان دهد، در این صورت (a,b) به نام مجاورت متناظر x یاد می‌شود.

مثال‌ها:

مثال ۱: انتروال باز $(0,4)$ عبارت از یک مجاورت متناظر عدد (2) می‌باشد.



مثال ۲: انتروال باز $(-4,-2)$ یک مجاورت متناظر -3 است.



لیمت (Limit)

لیمت که معنی آن حد یا هدف می‌باشد. یکی از مباحث بسیار عمده در ریاضیات بوده که توسط عالم انگلیسی به نام «ویرس ترس» به طور مفصل توضیح گردیده است. تحلیل مشتق و انتیگرال متکی به مفهوم لیمت است. از جانب دیگر اهمیت لیمت در قسمت رفع اشکال مبهم و دریافت قیمت حدی (تقریبی) برای این نوع توابع محسوس است.

تعریف: هرگاه در تابع $y=f(x)$ متحول x در مراحل تحولش بالاخره قیمتی را اختیار نماید که از طرف راست و چپ (مجاورت متناظر) چنان به یک عدد ثابت مانند a نزدیک گردد که تفاوت آن بی‌نهایت کوچک گردد، حتی کوچکتر از یک عدد بسیار کوچک انتخابی مثبت مانند ε طوریکه $|x-a|<\varepsilon$ در این صورت تابع مربوط یعنی y نیز به یک عدد ثابت دیگر مانند b نزدیک می‌گردد، طوریکه تفاوت آن نیز بی‌نهایت کوچک گردد، حتی کوچکتر از یک عدد بسیار کوچک انتخابی مثبت مانند δ (دلتا) طوریکه $|y-b|<\delta$.

پس می‌توان گفت که تابع y دارای لیمت b است، زمانیکه متحول x به طرف عدد مانند a تقرب نمایند و به عبارت ریاضی چنین ارائه می‌گردد: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} y=b$

جهت وضاحت تعریف فوق به مثال‌های ذیل توجه نمایید:

مثال ۱) در تابع $y=2x-1$ زمانیکه $x\to 3$ نماید، تابع مربوط به طرف عدد (5) تقرب خواهد نمود که این تقرب را از طرف راست و چپ توسط جدول ذیل ملاحظه می‌نماییم.

x	....−2	−1	0	1	2	2.5	2.9	2.99	2.999	2.999999 $\to 3^-$
y	....−5	−3	−1	1	3	4	4.8	4.98	4.998	4.999998 $\to 5$

طوریکه $|x-a|=|3-2.999999|=|+0.000001|=0.000001$

به همین ترتیب $|y-b|=|5-4.999998|=|+0.000002|=0.000002$

x	8	7	6	5	4	3.5	3.1	3.01	3.001	3.000001 $\to 3^+$
y	17	13	11	9	7	6	5.2	5.02	5.002	5.000002 $\to 5$

طوریکه $|x-a|=|3-3.000001|=|-0.000001|=0.000001$

به همین ترتیب $|y-b|=|5-5.000002|=|-0.000002|=0.000002$

طوریکه ملاحظه می‌گردد از طرف راست و چپ (مجاورت متناظر) تفاوت متحول و تفاوت تابع به آنچه که هدف (حد) می‌باشد بسیار کوچک گردیده است. پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 3} y=\lim_{x\to 3}(2x-2)=2(3)-1=6-1=5 \Rightarrow \lim_{x\to 3} y=5$$

مثال ۲: در تابع $y=x^2$ زمانیکه $x\to 1$ نماید، تابع مربوطه به طرف عدد (1) تقرب خواهد نمود که این تقرب را از طرف راست و چپ توسط جدول‌های ذیل ملاحظه می‌نماییم.

x	....−3	−2	−1	0	0.5	0.9	0.99	0.999	0.999999 $\to 1^-$
y	....+9	+4	+1	0	0.25	0.81	0.9801	0.998001	0.9999980000 01 $\to 1$

x	5	4	3	2	1.5	1.1	1.01	1.001	1.000001 $\to 1^+$
y	25	16	9	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001	1.0000020000 01 $\to 1$

طوریکه ملاحظه می‌گردد:

$$|x-a|\begin{cases} =|1-0.999999|=|+0.000001|=0.000001 \\ =1-1.000001|=-0.000001|=0.000001 \end{cases}$$

به همین ترتیب:

$$|y-b|\begin{cases} =|1-0.9999980000\ \ 01|=|+0.000001999999|=0.000001999999 \\ =|1-1.0000020000\ \ 01|=|-0.000002000001|=0.000002000001 \end{cases}$$

در نتیجه تفاوت متحول و تفاوت تابع به آنچه هدف می‌باشد بسیار کوچک گردیده است، پس در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 1} y=\lim_{x\to 1} x^2=(1)^2=1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} y=1$$

قضایای لیمت توابع (Theorems of Limit): در صورتیکه c و n اعداد ثابت را ارائه نمایند و توابع مانند $f(x)$ و $g(x)$ در یک نقطه مانند (a) لیمت داشته باشند، یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=d$ گردد، در این صورت قضایای لیمت قرار ذیل اند:

1- $\lim\limits_{x\to a} C=C$

2- $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=b+d$

همچنان:

$$\lim_{x\to a}(f-g)(x)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=b-d$$

3- $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=b\cdot d$

4- $\lim\limits_{x\to a}\left[c\cdot f(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} c\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)=c\cdot b$

5- $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{b}{d}$

در صورتیکه $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ باشد:

6- $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n=(b)^n$

7- $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{b}$

8- $\lim\limits_{x\to a}\left[\log_m\left(f(x)\right)\right]=\log_m\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]=\log_m b$

مثال‌ها:

با استفاده از قضایای لیمت، قیمت حدی توابع ذیل را دریابید:

1- $\lim\limits_{x\to 2}\left(-\dfrac{5}{3}\right)=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 2}\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{5}{3}$$

2- $\lim\limits_{x\to 5}(3x+4)=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 5}(3x+4)=\lim_{x\to 5}3x+\lim_{x\to 5}4=3(5)+4=15+4=19$$

3- $\lim\limits_{x\to -2}\left(7x^2-3x-5\right)=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to -2}\left(7x^2-3x-5\right)=\lim_{x\to -2}7x^2-\lim_{x\to -2}3x-\lim_{x\to -2}5$$

$$\Rightarrow 7(-2)^2-3(-2)-5$$

$$=7(+4)+6-5=+28+6-5=+29$$

4- $\lim\limits_{x\to 1}\left[-8\left(x^3+1\right)\right]=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}\left[-8\left(x^3+1\right)\right]=-8\lim_{x\to 1}\left(x^3+1\right)$$

$$=-8\left(\lim_{x\to 1}x^3+\lim_{x\to 1}1\right)=-8\left[(+1)^3+1\right]$$

$$=-8(+1+1)=-8(+2)=-16$$

5- $\lim\limits_{x\to 3}\left[\left(3x^3-8x^2+1\right)\left(x^2-5\right)\right]=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 3}\left[\left(3x^3-8x^2+1\right)\left(x^2-5\right)\right]=\lim_{x\to 3}\left(3x^3-8x^2+1\right)\cdot\lim_{x\to 3}\left(x^2-5\right)$$

$$=\left[3(3)^3-8(3)^2+1\right]\left[(3)^2-5\right]=\left[3(27)-8(9)+1\right]\left[9-5\right]$$

$$=(81-72+1)(4)\Rightarrow(10)(4)=40$$

6- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^4-7x^2+3x-1}{2x^3-x+5}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{5x^4-7x^2+3x-1}{2x^3-x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(5x^4-7x^2+3x-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x^3-x+5)}$$

$$=\frac{5(2)^4-7(2)^2+3(2)-1}{2(2)^3-2+5}=\frac{5\cdot 16-7\cdot 4+6-1}{2\cdot 8-2+5}$$

$$=\frac{80-28+6-1}{16-2+5}=\frac{86-29}{21-2}=\frac{57}{19}=3$$

7- $\lim_{x\to\frac{1}{3}}(3x+1)^7=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{1}{3}}(3x+1)^7=\left[\lim_{x\to\frac{1}{3}}(3x+1)\right]^7$$

$$=\left(3\cdot\frac{1}{3}+1\right)^7=(1+1)^7=(2)^7=128$$

8- $\lim_{x\to 0.5}\left[3(5x-2)^6\right]=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0.5}[3(5x-2)^6]=3\cdot\lim_{x\to 0.5}(5x-2)^6$$

$$=3\cdot[\lim_{x\to 0.5}(5x-2)]^6=3[5(0.5)-2]^6$$

$$=3(2.5-2)^6=3(0.5)^6=3(0.015625)=0.046875$$

9- $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{5x^2+2x+3}=?$

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{5x^2+2x+3}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}(5x^2+2x+3)}$$

$$\sqrt[3]{5(2)^2+2(2)+3}$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{20+4+3}=\sqrt[3]{27}=3$$

10- $\lim_{x\to 2}\left[\log_5\left(3x^5-x^2+10x+13\right)\right]=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}[\log_5(3x^5-x^2+10x+13)]=$$

$$\log_5[\lim_{x\to 2}(3x^5-x^2+10x+13)]$$

$$=\log_5\left[3(2)^5-(2)^2+10(2)+13\right]$$

$$=\log_5\left(3\cdot 32-4+20+13\right)$$

$$=\log_5(96+29)=\log_5(125)=\log_5(5)^3$$

$$=3\cdot\log_5 5=3\cdot 1=3$$

11- $\lim_{x\to 3}\left[\log\left(\frac{700}{x^3-20}\right)\right]=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\left[\log\left(\frac{700}{x^3-20}\right)\right]=\log\left[\lim_{x\to 3}\left(\frac{700}{x^3-20}\right)\right]=$$

$$\log\left[\frac{700}{(3)^3-20}\right]$$

$$\Rightarrow\log\left(\frac{700}{27-20}\right)=\log\left(\frac{700}{7}\right)$$

$$=\log 100=\log 10^2=2\log 10=2$$

قضیه ساندویچ: هرگاه توابع $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ بـرای هـر x از یک انتروال باز که عدد a را در بر دارد، شـرطی $f(x)\le g(x)\le h(x)$ را صـدق کنـد، در صـورتیکه $\lim_{x\to a}f(x)=b=\lim_{x\to a}h(x)$ باشـد، پـس $\lim_{x\to a}g(x)=b$ است.

مثال: اگر تابع g(x) دارای خاصیت $2-\frac{x^2}{5}\le g(x)\le 2+\frac{x^2}{4}$ باشـد $\lim_{x\to 0}g(x)$ را تعیین نماید.

هرگاه $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(2-\frac{x^2}{5})=2-\frac{0}{5}=2-0=2$

و $\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0}(2+\frac{x^2}{4})=2+\frac{0}{4}=2+0=2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(2-\frac{x^2}{5})=2=\lim_{x\to 0}(2+\frac{x^2}{4})$$

بناءً نظر به قضیه ساندویچ $\lim_{x\to 0}g(x)=2$ است.

اشکال نامعین (مبهم)

گاهی اتفاق می‌افتد که بعضی از توابع برای بعضی از قیمت‌هـای متحـول مربوط، اشکال ذیل را به خود اختیار می‌نمایند:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 1^{\infty}, 0\cdot\infty, \infty^{\infty}, 0^{\infty}, \infty^{0}$$

که این نوع اشکال را به نام اشکال نامعین (مبهم) یاد می‌نمایند.

مثال‌ها:

به قیمت گذاری توابع ذیل توجه نمایید:

1- $f(x)=\dfrac{2^x-2}{x-1}$

$x=1 \quad \Rightarrow f(1)=\dfrac{2^1-2}{1-1}=\dfrac{0}{0}$

2- $f(x)=\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$

$x=2 \quad \Rightarrow f(2)=\left(\dfrac{1}{2-2}-\dfrac{12}{2^3-8}\right)=\left(\dfrac{1}{0}-\dfrac{12}{0}\right)=\infty-\infty$

3- $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2x}}$

$x=0 \quad \Rightarrow f(0)=(1+0)^{\frac{1}{2(0)}}=(1)^{\frac{1}{0}}=(1)^{\infty}$

4- $f(x)=x\cdot\cot x$

$x=0 \quad \Rightarrow f(0)=0\cdot\cot 0=0\cdot\infty$

5- $f(x)=\left(\dfrac{5}{x-3}\right)^{2x-6}$

$x=3 \quad \Rightarrow f(3)=\left(\dfrac{5}{3-3}\right)^{2(3)-6}=\left(\dfrac{5}{0}\right)^{6-6}=\infty^{0}$

طوریکه در قیمت‌گذاری توابع فوق ملاحظه می‌گردد هریک از اشکال بـه دست آمده را به نام شکل نامعین (مبهم) یاد می‌نمایند، که می‌توان با اسـتفاده از لیمت برای هریک از این اشکال به روش‌های خاص امکانات رفـع ابهـام را مساعد نمود و قیمت حدی (قیمتی که بسیار نزدیک به واقعیت است، طوریکه فرق شان بی‌نهایت کوچک می‌باشد) برای توابع مربوط دریافت نمود.

رفع شکل نامعین $\left(\frac{0}{0}\right)$: هرگاه نسبت توابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ بـرای قیمـت $x=a$ شکل نامعین $\left(\frac{0}{0}\right)$ را اختیار نماید، یعنی:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{0}{0}$$

جهـت رفـع ایـن نـوع ابهـام بـه کمـک تجزیـه پولینـوم‌هـای الجبـری، مطابقت‌های الجبری، تقسیم ترکیبی، ضرب مـزدوج صـورت یـا مخـرج و یـا صورت و مخرج و تعویض نمودن متحول به یک متحـول جدیـد، هرکـدام از توابع مذکور را به عوامل ضربی آن تجزیه نمود و بعد از اختصار عامل مشترک صورت و مخرج، می‌توان قیمت حدی توابع (لیمت توابع) را دریافت نمود.

مثال‌ها:

لیمت توابع ذیل را دریافت نمایید:

1- $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^2-9}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2-9}=\frac{\lim\limits_{x\to -3}(x^3+27)}{\lim\limits_{x\to -3}(x^2-9)}$$

$$=\frac{(-3)^3+27}{(-3)^2-9}=\frac{-27+27}{+9-9}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2-9}=\lim_{x\to -3}\frac{x^3+(3)^3}{x^2-(3)^2}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{(x+3)(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-3x+9}{x-3}$$

$$=\frac{(-3)^2-3(-3)+9}{-3-3}=\frac{+9+9+9}{-6}=\frac{+27}{-6}=-\frac{9}{2}=-4.5$$

2- $\lim_{x\to 4}\frac{x^2+5x-36}{x^2-x-12}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{x^2+5x-36}{x^2-x-12}=\frac{(4)^2+5(4)-36}{(4)^2-4-12}=\frac{16+20-36}{16-16}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{x^2+5x-36}{x^2-x-12}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+9)}{(x-4)(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x+9}{x+3}=\frac{4+9}{4+3}=\frac{13}{7}$$

3- $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{5x^2+x-22}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{5x^2+x-22}=\frac{3(2)^2-5(2)-2}{5(2)^2+(2)-22}=\frac{12-10-2}{20+2-22}=\frac{0}{0}$$

صورت $\Rightarrow 3x^2-5x-2$ مخرج $\Rightarrow 5x^2+x-22$

$3x \quad -2 = -6x$

$x \quad +1 = \frac{+x}{-5x}$

$=(3x+1)(x-2)$

$5x \quad -2 = -10x$

$x \quad +11 = \frac{+11x}{+x}$

$=(5x+11)(x-2)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{5x^2+x-22}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x+1)(x-2)}{(5x+11)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x+1}{5x+11}$$

$$=\frac{3(2)+1}{5(2)+11}=\frac{6+1}{10+11}=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$$

4- $\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+5x-7}{x^4-5x^3+x+3}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{2x^3+5x-7}{x^4-5x^3+x+3}=\frac{2(1)^3+5(1)-7}{(1)^4-5(1)^3+(1)+3}=\frac{2+5-7}{1-5+1+3}=\frac{0}{0}$$

چون توابع صورت و مخرج پولینوم‌ها بلندتر از درجه دوم مـی‌باشـند، بنـاءً تجزیه آن مشکلاتی را در قبال دارد، بناءً یگانه طریقه ساده تجزیه بـه کمـک تقسیم ترکیبی می‌باشد. با قبول این که $x\to 1$ پس تقریبـاً $x=1$ اسـت، در نتیجه $(x-1)$ حیثیت مقسوم الیه را دارد. پس برخلاف اشاره عدد ثابت مقسوم الیه و یا به عباره دیگر به تقرب عدد ثابت لیمت عملیه تقسیم ترکیبی را چنین انجام می‌دهیم:

صورت $\Rightarrow 2x^3+5x-7=2x^3+0x^2+5x-7$

+2	0	+5	−7	1
↓	+2	+2	+7	
+2	+2	+7	(0)	

باقیمانده $R=0$ و خارج قسمت (حاصل تقسیم) $(2x^2+2x+7)$

چون باقیمانده صفر گردیده، پس:

مقسوم = خارج قسمت × مقسوم الیه

$$\Rightarrow 2x^3+5x-7=(x-1)(2x^2+2x+7)$$

به همین ترتیب می‌توان مخرج را نیز چنین به دو قوس تجزیه نمود:

مخرج $\Rightarrow x^4-5x^3+x+3=x^4-5x^3+0x^2+x+3$

+1	−5	0	+1	+3	1
↓	+1	−4	−4	−3	
+1	−4	−4	−3	(0)	

باقیمانده $R=0$ و خارج قسمت (x^3-4x^2-4x-3)

$$\Rightarrow x^4-5x^3+x+3=(x-1)(x^3-4x^2-4x-3)$$

در نتیجه می‌توان چنین نوشت:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{2x^3+5x-7}{x^4-5x^3+x+3}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x^2+2x+7)}{(x-1)(x^3-4x^2-4x-3)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+2x+7}{x^3-4x^2-4x-3}=\frac{2(1)^2+2(1)+7}{(1)^3-4(1)^2-4(1)-3}=-\frac{11}{10}$$

5- $\lim_{x\to -2}\frac{x^5-2x^3+16}{x^4-16}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{x^5-2x^3+16}{x^4-16}=\frac{(-2)^5-2(-2)^3+16}{(-2)^4-16}$$

$$=\frac{-32+16+16}{+16-16}=\frac{0}{0}$$

مثال ۴: به کمک عملیه تقسیم ترکیبی می‌توان بـه تجزیـه پولینـوم‌هـای صورت و مخرج اقدام نمود:

صورت $\Rightarrow x^5-2x^3+16=x^5+0x^4-2x^3+0x^2+0x+16$

1	0	−2	0	0	+16	−2
↓	−2	+4	−4	+8	−16	
1	−2	+2	−4	+8	(0)	

باقیمانده $R=0$ و خارج قسمت $(x^4-2x^3+2x^2-4x+8)$

مخرج $\Rightarrow x^4-16=x^4+0x^3+0x^2+0x-16$

1	0	0	0	−16	−2
↓	−2	+4	−8	+16	
1	−2	+4	−8	(0)	

باقیمانده $R=0$ و خارج قسمت (x^3-2x^2+4x-8)

در نتیجه می‌توان چنین نوشت:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{x^5-2x^3+16}{x^4-16}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^4-2x^3+2x^2-4x+8)}{(x+2)(x^3-2x^2+4x-8)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^4-2x^3+2x^2-4x+8}{x^3-2x^2+4x-8}$$

$$=\frac{(-2)^4-2(-2)^3+2(-2)^2-4(-2)+8}{(-2)^3-2(-2)^2+4(-2)-8}$$

$$=\frac{+16+16+8+8+8}{-8-8-8-8}=\frac{56}{-32}=-\frac{7}{4}=-1.75$$

6- $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\frac{4-4}{\sqrt{4}-2}=\frac{0}{2-2}=\frac{0}{0}$$

چون تابع مخرج در شکل جذری می‌باشد، بناءً می‌توان بـه کمـک ضـرب مزدوج مخرج، تابع مخرج را از شکل جذری رفع نموده و لیمت توابع مذکور را محاسبه نماییم:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-(2)^2}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2)=\sqrt{4}+2=2+2=4$$

و یا قیمت حدی توابع فوق را به کمک تجزیه نیز می‌توان چنین به دست آورد:

$$\Rightarrow\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x})^2-(2)^2}{\sqrt{x}-2}\ \lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2)=\sqrt{4}+2=2+2=4$$

7- $\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}=\frac{\sqrt{5-1}-2}{(5)^2-25}=\frac{2-2}{25-25}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}=\lim_{x\to5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x^2-25)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{(\sqrt{x-1})^2-(2)^2}{(x-5)(x+5)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{x-1-4}{(x-5)(x+5)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)}{(x-5)(x+5)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$=\frac{1}{(x+5)(\sqrt{5-1}+2)}=\frac{1}{(10)(2+2)}=\frac{1}{40}$$

8- $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x+1}-2}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x+1}-2}=\frac{\sqrt{2(3)+3}-3}{\sqrt{3+1}-2}=\frac{\sqrt{9}-3}{\sqrt{4}-2}=\frac{3-3}{2-2}=\frac{0}{0}$$

در این حالت به کمک ضرب مزدوج صورت و مخرج می‌توان به نتیجه رسید، یعنی:

$$\Rightarrow\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x+1}-2}=$$

$$\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{2x+3}+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{2x+3}+3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{[(\sqrt{2x+3})^2-(3)^2]\,(\sqrt{x+1}+2)}{[(\sqrt{x+1})^2-(2)^2]\,(\sqrt{2x+3}+3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(2x-6)\,(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)\,(\sqrt{2x+3}+3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)\,(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)\,(\sqrt{2x+3}+3)}=\lim_{x\to3}\frac{2(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{2x+3}+3}$$

$$=\frac{2(\sqrt{3+1}+2)}{\sqrt{2(3)+3}+3}=\frac{8}{3+3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

9- $\lim_{x\to125}\frac{\sqrt[3]{x}-5}{2x-250}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to125}\frac{\sqrt[3]{x}-5}{2x-250}=\frac{\sqrt[3]{125}-5}{2(125)-250}=\frac{5-5}{250-250}=\frac{0}{0}$$

هرگاه درجه جذر (جذر نما) بلندتر از درجه دوم باشد، می‌توان به کمک تعویض به یک متحول جدید که بتواند جذر را رفع نماید حل مطلب نمود. یعنی:

اگر $x=u^3$ تعویض گردد، پس می‌توان نوشت، چون $x\to125$ می‌نماید، پس $u^3\to125$، در نتیجه $u\to5$ می‌نماید.

$$\Rightarrow\lim_{x\to125}\frac{\sqrt[3]{x}-5}{2x-250}=\lim_{u\to5}\frac{\sqrt[3]{u^3}-5}{2(u^3)-250}=\lim_{u\to5}\frac{u-5}{2(u^3-125)}$$

$$=\lim_{u\to5}\frac{u-5}{2(u-5)(u^2+5u+25)}=\lim_{u\to5}\frac{1}{2(u^2+5u+25)}$$

$$=\frac{1}{2(5^2+5\cdot5+25)}=\frac{1}{2\cdot75}=\frac{1}{150}$$

10- $\lim_{x\to16}\frac{3x-48}{\sqrt[4]{x}-2}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to16}\frac{3x-48}{\sqrt[4]{x}-2}=\frac{3(16)-48}{\sqrt[4]{16}-2}=\frac{48-48}{2-2}=\frac{0}{0}$$

$$\begin{cases}u^4=x\\ x\to16\\ u^4\to16\\ u\to2\end{cases}\text{ هرگاه}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to16}\frac{3x-48}{\sqrt[4]{x}-2}=\lim_{u\to2}\frac{3(u^4)-48}{\sqrt[4]{u}-2}=\lim_{u\to2}\frac{3(u^4-16)}{u-2}$$

$$=\lim_{u\to2}\frac{3(u-2)(u+2)(u^2+4)}{u-2}=\lim_{u\to2}\left[3(u+2)(u^2+4)\right]$$

$$=3(2+2)(4+4)=3\cdot4\cdot8=96$$

11- $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[5]{3x-2}-1}{x-1}=?$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[5]{3x-2}-1}{x-1}=\frac{\sqrt[5]{3(1)-2}-1}{1-1}=\frac{\sqrt[5]{3-2}-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\begin{array}{l|l}u^5=3x-2 & x\to1\\ 3x=u^5+2 & u^5\to3(1)-2\\ x=\dfrac{u^5+2}{3} & u^5\to1\\ & u\to1\end{array}\text{ هرگاه}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[5]{3x-2}-1}{x-1}=\lim_{u\to1}\frac{\sqrt[5]{u^5}-1}{\frac{u^5+2}{3}-1}$$

$$=\lim_{u\to1}\frac{u-1}{\frac{u^5+2-3}{3}}=\lim_{u\to1}\frac{3(u-1)}{u^5-1}$$

$$=\lim_{u\to1}\frac{3(u-1)}{(u-1)(u^4+u^3+u^2+u+1)}=\lim_{u\to1}\frac{3}{u^4+u^3+u^2+u+1}$$

$$=\frac{3}{(1)^4+(1)^3+(1)^2+1+1}=\frac{3}{1+1+1+1+1}=\frac{3}{5}$$

12- $\lim_{x\to64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\frac{\sqrt{64}-8}{\sqrt[3]{64}-4}=\frac{8-8}{4-4}=\frac{0}{0}$$

$$\begin{cases}x=u^6\\ x\to64\\ u^6\to64\\ u\to2\end{cases}\text{ هرگاه}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\lim_{u\to2}\frac{\sqrt{u^6}-8}{\sqrt[3]{u^6}-4}$$

$$=\lim_{u\to2}\frac{u^3-8}{u^2-4}=\lim_{u\to2}\frac{(u-2)(u^2+2u+4)}{(u-2)(u+2)}$$

$$=\lim_{u\to2}\frac{u^2+2u+4}{u+2}=\frac{(2)^2+2(2)+4}{2+2}=\frac{12}{4}=3$$

13- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8x+8}-2}{\sqrt[4]{x+1}-1}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8x+8}-2}{\sqrt[4]{x+1}-1}=\frac{\sqrt[3]{8(0)+8}-2}{\sqrt[4]{0+1}-1}=\frac{\sqrt[3]{8}-2}{\sqrt[4]{1}-1}=\frac{2-2}{1-1}=\frac{0}{0}$$

هرگاه:

$$\begin{cases} x+1=u^{12} \\ x\to0 \\ u^{12}\to1 \\ u\to1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8x+8}-2}{\sqrt[4]{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8(x+1)}-2}{\sqrt[4]{x+1}-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt[3]{x+1}-2}{\sqrt[4]{x+1}-1}=\lim_{u\to1}\frac{2\sqrt[3]{u^{12}}-2}{\sqrt[4]{u^{12}}-1}$$

$$=\lim_{u\to1}\frac{2\cdot u^4-2}{u^3-1}=\lim_{u\to1}\frac{2(u^4-1)}{u^3-1}$$

$$=\lim_{u\to1}\frac{2(u-1)(u^3+u^2+u+1)}{(u-1)(u^2+u+1)}$$

$$=\lim_{u\to1}\frac{2(u^3+u^2+u+1)}{u^2+u+1}=\frac{2(1+1+1+1)}{1+1+1}=\frac{8}{3}$$

14- $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{3h}{\sqrt[5]{3h+x}-\sqrt[5]{x}}=?$

$$\Rightarrow \lim_{h\to0}\frac{3h}{\sqrt[5]{3h+x}-\sqrt[5]{x}}=\frac{3(0)}{\sqrt[5]{3(0)+x}-\sqrt[5]{x}}=\frac{0}{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{x}}=\frac{0}{0}$$

هرگاه:

$$\left.\begin{matrix} 3h+x=u^5 \\ x=m^5 \\ m=\sqrt[5]{x} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 3h=u^5-x \\ h=\dfrac{u^5-m^5}{3} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} h\to0 \\ u^5\to m^5 \\ u\to m \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to0}\frac{3h}{\sqrt[5]{3h+x}-\sqrt[5]{x}}=\lim_{h\to0}\frac{3\left(\dfrac{u^5-m^5}{3}\right)}{\sqrt[5]{u^5}-\sqrt[5]{m^5}}=\lim_{u\to m}\frac{u^5-m^5}{u-m}$$

$$=\lim_{u\to m}\frac{(u-m)(u^4+u^3\cdot m+u^2\cdot m^2+u\cdot m^3+m^4)}{u-m}$$

$$=\lim_{u\to m}(u^4+u^3\cdot m+u^2\cdot m^2+u\cdot m^3+m^4)$$

$$=m^4+m^4+m^4+m^4+m^4$$

$$5m^4=5\sqrt[5]{x^4}$$

15- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{a^2-ax}-\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt{a^3-a^2x}}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{a^2-ax}-\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt{a^3-a^2x}}=\frac{\sqrt[3]{a^2-a^2}-\sqrt{a^2-a^2}}{\sqrt[3]{a^2-a^2}+\sqrt{a^3-a^3}}$$

$$=\frac{0-0}{0+0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{a^2-ax}-\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt{a^3-a^2x}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{a(a-x)}+\sqrt{(a-x)(a+x)}}{\sqrt[3]{(a+x)(a-x)}+\sqrt{a^2(a-x)}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3\cdot2]{[a(a-x)]^2}+\sqrt[3\cdot2]{[(a-x)(a+x)]^3}}{\sqrt[3\cdot2]{[(a+x)(a-x)]^2}+\sqrt[3\cdot2]{[a^2(a-x)]^3}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[6]{a^2(a-x)^2}+\sqrt[6]{(a-x)^2(a+x)^2}}{\sqrt[6]{(a+x)^2(a-x)^2}+\sqrt[6]{a^6(a-x)^3}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt[6]{(a-x)^2}\left[\sqrt[6]{a^2} + \sqrt[6]{(a-x)(a+x)^3}\right]}{\sqrt[6]{(a-x)^2}\left[\sqrt[6]{(a+x)^2} + \sqrt[6]{a^6} \cdot \sqrt[6]{a-x}\right]}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{(a-x)(a+x)^3}}{\sqrt[3]{a+x} + a \cdot \sqrt[6]{a-x}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{(a-a)(a+a)^3}}{\sqrt[3]{a+a} + a \cdot \sqrt[6]{a-a}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{0 \cdot 8a^3}}{\sqrt[3]{2a} + a \cdot \sqrt[6]{0}} = \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{0}}{\sqrt[3]{2a} + a \cdot 0} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2a}} = \sqrt[3]{\frac{a}{2a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

لیمت یک تابع در بی‌نهایت (∞)

طوریکه قبلاً ذکر نمودیم (∞) یک عدد نیست بلکه یک سمبول برای یک مقدار بی‌نهایت بزرگ بوده که ما آن را تعیین نموده نمی‌توانیم؛ مثلاً تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر گرفته لیمت تابع مذکور را زمانی که $(x \to 0)$ نماید، توسط جدول ذیل ملاحظه می‌نماییم:

x	1	0.5	0.25	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001	$0.000000001 \to 0$
$f(x)$	1	2	4	5	10	100	1000	10000	$1000000000 \to \infty$

پس در نتیجه:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

به همین ترتیب ممکن است زمانیکه متحول x به طرف بی‌نهایت تقرب نماید، تابع $f(x)$ یک قیمت مشخص را به خود اختیار نماید، مثلاً تابع $f(x)=5+\frac{1}{x}$ را در نظر گرفته لیمت تابع مذکور را زمانیکه $x \to \infty$ نماید، توسط جدول ذیل ملاحظه می‌نماییم:

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty}\left(5+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} 5 + \lim_{x \to \infty}\frac{1}{x} = 5 + \lim_{x \to \infty}\frac{1}{x}$$

x	1	2	4	5	10	100	1000	10000	$1000000000 \to \infty$
$\frac{1}{x}$	1	0.5	0.25	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001	$0.000000001 \to 0$

پس در نتیجه:

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty}\left(5+\frac{1}{x}\right) = 5+\frac{1}{\infty} = 5+0 = 5$$

همچنان ممکن است زمانیکه متحول x به طرف بی‌نهایت تقرب نماید، تابع $f(x)$ نیز به طرف بی‌نهایت تقرب نماید.

مثلاً: لیمت تابع پولینومیل ذیل را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \left(3x^4 + 7x^3 - 4x^2 - x + 2\right)$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = ?$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty}\left(3x^4 + 7x^3 - 4x^2 - x + 2\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left[x^4\left(3+\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} x^4 \cdot \lim_{x \to \infty}\left(3+\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)$$

$$= (\infty)^4 \cdot \left(3+\frac{7}{\infty}-\frac{4}{\infty^2}-\frac{1}{\infty^3}+\frac{2}{\infty^4}\right)$$

$$\Rightarrow \infty \cdot \left(3+\frac{7}{\infty}-\frac{4}{\infty}-\frac{1}{\infty}+\frac{2}{\infty}\right)$$

$$= \infty \cdot (3+0-0-0+0) = \infty \cdot (3) = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty}\left(3x^4 + 7x^3 - 4x^2 - x + 2\right) = \infty$$

رفع شکل نامعین $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

هرگاه نسبت توابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ در صورتیکه $x\to\infty$ نماید، شکل نامعین $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ را اختیار نماید، یعنی:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty\\ \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

در این حالت جهت رفع این نوع ابهام در صورت و مخرج کسر متحول را که دارای بلندترین نما (طاقت‌نما) می‌باشد، مشترک می‌گیریم و یا به عباره دیگر صورت و مخرج کسر را تقسیم آن متحول می‌نماییم که دارای بلندترین طاقت‌نما باشد.

مثال‌ها:

لیمت توابع ذیل را دریافت نمایید:

1- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{2x^2+3x-1}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+4}{2x^2+3x-1}=\frac{3(\infty)^2+5(\infty)+4}{2(\infty)^2+3(\infty)-1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+4}{2x^2+3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{3+\frac{5}{\infty}+\frac{4}{\infty^2}}{2+\frac{3}{\infty}-\frac{1}{\infty^2}}=\frac{3+0+0}{2+0-0}=\frac{3}{2}=1.5$$

و یا به طریقه دیگر:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+4}{2x^2+3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+5x+4}{x^2}}{\frac{2x^2+3x-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{3+\frac{5}{\infty}+\frac{4}{\infty^2}}{2+\frac{3}{\infty}-\frac{1}{\infty^2}}=\frac{3+0+0}{2+0-0}=\frac{3}{2}=1.5$$

2- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3+6x^2-4}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^3+6x^2-4}=\frac{2(\infty)^2-3(\infty)+1}{(\infty)^3+6(\infty)^2-4}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^3+6x^2-4}\Longrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x+1}{x^3}}{\frac{x^3+6x^2-4}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{6x^2}{x^3}-\frac{4}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{6}{x}-\frac{4}{x^3}}=\frac{\frac{2}{\infty}-\frac{3}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^3}}{1+\frac{6}{\infty}-\frac{4}{\infty^3}}=\frac{0-0+0}{1+0-0}=\frac{0}{1}=0$$

3- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+8x+10}{3x^3-1}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{4x^5+8x+10}{3x^3-1}=\frac{4(\infty)^5+8(\infty)+10}{3(\infty)^3-1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5+8x+10}{3x^3-1}\Longrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^5+8x+10}{x^5}}{\frac{3x^3-1}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^5}{x^5}+\frac{8x}{x^5}+\frac{10}{x^5}}{\frac{3x^3}{x^5}-\frac{1}{x^5}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{8}{x^4}+\frac{10}{x^5}}{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^5}} = \frac{4+\frac{8}{\infty^4}+\frac{10}{\infty^5}}{\frac{3}{\infty^2}-\frac{1}{\infty^5}} = \frac{4+0+0}{0-0} = \frac{4}{0} = \infty$$

یادداشت: از حل مثال‌های فوق نتایج ذیل به دست می‌آید:

۱- هرگاه بزرگترین طاقت‌نما در صورت و مخرج کسر یک تابع ناطق باشد، پس لیمت تابع مساوی است به خارج قسمت ضرایب حدودی که دارای طاقت‌نما بزرگتر می‌باشند.

۲- هرگاه بزرگترین طاقت‌نما متحول در یک تابع ناطق تنها در مخرج کسر باشد، لیمت تابع صفر است.

۳- هرگاه بزرگترین طاقت‌نما متحول در یک تابع ناطق تنها در صورت کسر باشد، لیمت تابع (∞) است، مثلاً:

$$1-\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+4}{2x^2+3x-1} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$2-\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^3+6x^2-4} = 0$$

$$3-\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x^5+8x+10}{3x^3-1}\ \infty$$

هرگاه در لیمت‌های شکل نامعین $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ صورت یا مخرج و یا صورت و مخرج در شکل غیر ناطق (جذری) قرار داشته باشد، باز هم جهت دریافت قیمت حدی توابع مذکور به درک بلند ترین طاقت‌نما و تقسیم نمودن صورت و مخرج بر آن می‌توان لیمت توابع مذکور را دریافت نمود.

مثال‌ها:

لیمت توابع ذیل را دریابید:

$$1-\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{25x^2+8x-2}}{3x+5} = ?$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{25x^2+8x-2}}{3x+5} = \frac{\sqrt{25(\infty)^2+8(\infty)-2}}{3(\infty)+5}$$

$$= \frac{\sqrt{\infty+\infty-2}}{\infty+5} = \frac{\sqrt{\infty}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

طوریکه ملاحظه می‌گردد بلندترین طاقت $\sqrt{x^2}$ یعنی x بوده که در صورت و مخرج کسر می‌باشد، پس می‌توان چنین نوشت:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{25x^2+8x-2}}{3x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{25x^2+8x-2}}{x}}{\frac{3x+5}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{25x^2+8x-2}{x^2}}}{\frac{3x}{x}+\frac{5}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{25x^2}{x^2}+\frac{8x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}}{3+\frac{5}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{25+\frac{8}{x}-\frac{2}{x^2}}}{3+\frac{5}{x}} = \frac{\sqrt{25+\frac{8}{\infty}-\frac{2}{\infty^2}}}{3+\frac{5}{\infty}}$$

$$= \frac{\sqrt{25+0-0}}{3+0} = \frac{\sqrt{25}}{3} = \frac{5}{3}$$

$$2-\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{\sqrt[3]{8x^6-5x^3+x-1}} = ?$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{\sqrt[3]{8x^6-5x^3+x-1}} =$$

$$\frac{3(\infty)^2-4(\infty)+1}{\sqrt[3]{8(\infty)^6-5(\infty)^3+(\infty)-1}} = \frac{\infty}{\sqrt{\infty}} = \frac{\infty}{\infty}$$

طوریکه ملاحظه می‌گردد، بلندترین طاقت‌نما $\sqrt[3]{x^6}$ یعنی x^2 بوده که در صورت و مخرج کسر می‌باشد، پس می‌توان چنین نوشت:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{\sqrt[3]{8x^6-5x^3+x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2-4x+1}{x^2}}{\frac{\sqrt[3]{8x^6-5x^3+x-1}}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\frac{8x^6-5x^3+x-1}{x^6}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\frac{8x^6}{x^6}-\frac{5x^3}{x^6}+\frac{x}{x^6}-\frac{1}{x^6}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{8-\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}-\frac{1}{x^6}}}$$

$$=\frac{3-\frac{4}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}{\sqrt[3]{8-\frac{5}{\infty^3}+\frac{1}{\infty^5}-\frac{1}{\infty^6}}}$$

$$=\frac{3-0+0}{\sqrt[3]{8-0+0-0}}=\frac{3}{\sqrt[3]{8}}=\frac{3}{2}=1.5$$

3- $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^5+8x^3-x+1}}{2x^3+5x-1}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^5+8x^3-x+1}}{2x^3+5x-1}=\frac{\sqrt[4]{(\infty)^5+8(\infty)^3-(\infty)+1}}{2(\infty)^3+5(\infty)-1}$$

$$=\frac{\sqrt[4]{\infty}}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

طوریکه ملاحظه می‌گردد، بلندترین طاقت‌نما (x^3) بوده که تنها در مخرج کسر می‌باشد، پس می‌توان چنین نوشت:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^5+8x^3-x+1}}{2x^3+5x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[4]{x^5+8x^3-x+1}}{x^3}}{\frac{2x^3+5x-1}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{\frac{x^5+8x^3-x+1}{x^{12}}}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{5x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{\frac{x^5}{x^{12}}+\frac{8x^3}{x^{12}}-\frac{x}{x^{12}}+\frac{1}{x^{12}}}}{2+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{x^7}+\frac{8}{x^9}-\frac{1}{x^{11}}+\frac{1}{x^{12}}}}{2+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}}$$

$$=\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{\infty}+\frac{8}{\infty}-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}}{2+\frac{5}{\infty}-\frac{1}{\infty}}$$

$$=\frac{\sqrt[4]{0+0-0+0}}{2+0-0}=\frac{\sqrt[4]{0}}{2}=\frac{0}{2}=0$$

4- $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{5x^9+7x^5-x+4}}{\sqrt{5x^3+4x^6-2x^4-1}}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{5x^9+7x^5-x+4}}{\sqrt{5x^3+4x^6-2x^4-1}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{5(\infty)^9+7(\infty)^5-(\infty)+4}}{\sqrt{5(\infty)^3+4(\infty)^6-2(\infty)^4-1}}=\frac{\sqrt[3]{\infty}}{\sqrt{\infty}}=\frac{\infty}{\infty}$$

طوریکه ملاحظه می‌گردد بلندترین طاقت‌نما $\sqrt[3]{x^9}$ یا $\sqrt{x^6}$ یعنی (x^3) می‌باشد، که در صورت و مخرج کسر قرار دارد، پس می‌توان چنین نوشت:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{5x^9+7x^5-x+4}}{\sqrt{5x^3+4x^6-2x^4-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{5x^9+7x^5-x+4}}{x^3}}{\frac{\sqrt{5x^3+4x^6-2x^4-1}}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{5x^9+7x^5-x+4}{x^9}}}{\sqrt{\frac{5x^3+4x^6-2x^4-1}{x^6}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{5x^9}{x^9}+\frac{7x^5}{x^9}-\frac{x}{x^9}+\frac{4}{x^9}}}{\sqrt{\frac{5x^3}{x^6}+\frac{4x^6}{x^6}-\frac{2x^4}{x^6}-\frac{1}{x^6}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{5+\frac{7}{x^4}-\frac{1}{x^8}+\frac{4}{x^9}}}{\sqrt{\frac{5}{x^3}+4-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^6}}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{5+\frac{7}{\infty}-\frac{1}{\infty}+\frac{4}{\infty}}}{\sqrt{\frac{5}{\infty}+4-\frac{2}{\infty}-\frac{1}{\infty}}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{5+0-0+0}}{\sqrt{0+4-0-0}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$$

5- $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^8+x^2+1}}{\sqrt[3]{x^9+3x^2+5}}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^8+x^2+1}}{\sqrt[3]{x^9+3x^2+5}}=\frac{\sqrt{2(\infty)^8+(\infty)^2+1}}{\sqrt[3]{(\infty)^9+3(\infty)^2+5}}=\frac{\sqrt{\infty}}{\sqrt[3]{\infty}}=\frac{\infty}{\infty}$$

طوریکه ملاحظه می‌گردد بلندترین طاقت‌نما $\sqrt{x^8}$ یعنی (x^4) می‌باشد، پس می‌توان چنین نوشت:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^8+x^2+1}}{\sqrt[3]{x^9+3x^2+5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{2x^8+x^2+1}}{x^4}}{\frac{\sqrt[3]{x^9+3x^2+5}}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{2x^8+x^2+1}{x^8}}}{\sqrt[3]{\frac{x^9+3x^2+5}{x^{12}}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{2x^8}{x^8}+\frac{x^2}{x^8}+\frac{1}{x^8}}}{\sqrt[3]{\frac{x^9}{x^{12}}+\frac{3x^2}{x^{12}}+\frac{5}{x^{12}}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^{10}}+\frac{5}{x^{12}}}}=\frac{\sqrt{2+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty}+\frac{5}{\infty}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2+0+0}}{\sqrt[3]{0+0+0}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{0}}=\frac{\sqrt{2}}{0}=\infty$$

6- $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\frac{\sqrt{\infty}}{\sqrt{\infty+\sqrt{\infty+\sqrt{\infty}}}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x}{x}}}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2}}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^4}}}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x}{x^4}}}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{\infty}+\sqrt{\frac{1}{\infty}}}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0+0}}=\frac{1}{\sqrt{1}}=\frac{1}{1}=1$$

7- $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+4+.....+n}{3n^2+5n-1}=?$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+4+.....+n}{3n^2+5n-1}=\frac{1+2+3+4+.....+\infty}{3(\infty)^2+5(\infty)-1}=\frac{\infty}{\infty}$$

چون $1+2+3+4+.....+n$ حاصل جمع (سلسله) اعداد مسلسل طبیعی می‌باشد، که نظر به مطالعه فصل چهارم:

$$1+2+3+4+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+4+.....+n}{3n^2+5n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{3n^2+5n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{6n^2+10n-2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{\frac{6n^2}{n^2}+\frac{10n}{n^2}-\frac{2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{6+\frac{10}{n}-\frac{2}{n^2}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{6+\frac{10}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1+0}{6+0-0}=\frac{1}{6}$$

8- $\lim_{n\to\infty}\frac{5n+n^2-7}{1+3+5+7+.....+2n-1}=?$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{5n+n^2-7}{1+3+5+7+.....+2n-1}$$

$$=\frac{5(\infty)+(\infty)^2-7}{1+3+5+7+.....+2(\infty)-1}=\frac{\infty}{\infty}$$

طوریکه ملاحظه می‌گردد $1+3+5+7+.....+2n-1$ حاصل‌جمع (سلسله) اعداد مسلسل طبیعی می‌باشد، پس حاصل‌جمع آن نظر به مطالعه فصل تصاعد عبارت از: $1+3+5+7+.....2n-1=n^2$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{5n+n^2-7}{1+3+5+7+.....+2n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+n^2-7}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}-\frac{7}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}+1-\frac{7}{n^2}\right)=\frac{5}{\infty}+1-\frac{7}{\infty}=0+1-0=1$$

9- $\lim_{n\to\infty}\frac{2+4+6+8+.....+2n}{3n^2+8n-5}=?$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2+4+6+8+.....+2n}{3n^2+8n-5}=\frac{2+4+6+8+....+2(\infty)}{3(\infty)^2+8(\infty)-5}=\frac{\infty}{\infty}$$

چون $2+4+6+8+.....+2n$ حاصل جمع (سلسله) اعداد مسلسل جفت را نشان می دهد، پس حاصل جمع آن نظر به مطالعه فصل تصاعد عبارت از: $2+4+6+8+.....+2n=n(n+1)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2+4+6+8+.....+2n}{3n^2+8n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{3n^2+8n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{3n^2+8n-5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{8n}{n^2}-\frac{5}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{8}{n}-\frac{5}{n^2}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{3+\frac{8}{\infty}-\frac{5}{\infty}}$$

$$=\frac{1+0}{3+0-0}=\frac{1}{3}$$

$$10\text{- }\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+6+.....+2n}{n+1}-\frac{n+1}{n^2}\right)=?$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+6+.....+2n}{n+1}-\frac{n+1}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+4+6+.....+2n}{n+1}-\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=\frac{\infty}{\infty}-\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+6+.....+2n}{n+1}-\frac{n+1}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)}{n+1}-\frac{n+1}{n^2}\right]$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(n-\frac{n+1}{n^2})=\lim_{n\to\infty}(\frac{n^3-n-1}{n^2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3}{n^3}-\frac{n}{n^3}-\frac{1}{n^3}}{\frac{n^2}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{\infty^2}-\frac{1}{\infty^3}}{\frac{1}{\infty}}=\frac{1-0-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

رفع شکل نامعین $(\infty-\infty)$

طوریکه قبلاً ذکر نمودیم (∞) یک عدد نبوده بلکه سمبول یک مقدار بی‌نهایت بزرگ بوده که قیمت آن را تعیین نمی‌توانیم، بناءً می‌توان نوشت که $\infty\neq\infty$ و $\infty-\infty\neq 0$ است و یک شکل نامعین را دارا می‌باشد، مثلاً: آیا گفته می‌توانید از تمام دانه‌های ریگ کوه بابا تمام دانه ریگ کوه هندوکش را تفریق نماییم چند دانه ریگ باقی خواهد ماند؟ در حالیکه کوه بابا (∞) دانه ریگ و کوه هندوکش نیز (∞) دانه ریگ دارد، یقیناً که این حاصل‌تفریق معین گردیده نمی‌تواند و شکل نامعین را دارد.

هرگاه حاصل تفریق توابع $(f-g)(x)$ در صورتیکه $x\to a$ یا $x\to\infty$ نمایند، شکل نامعین $(\infty-\infty)$ را اختیار نماید، جهت رفع این نوع ابهام اولاً با استفاده از مخرج مشترک یا ضرب مزدوج شکل تفریق توابع را به شکل حاصل تقسیم تبدیل نموده تا شکل نامعین $(\infty-\infty)$ به شکل نامعین $\left(\frac{0}{0}\right)$ و یا $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ تبدیل گردد. بعداً در رفع ابهام آن طوریکه قبلاً مطالعه نموده ایم، اقدام می‌نماییم.

مثال‌ها:

لیمت توابع ذیل را دریافت نمایید:

$$1\text{- }\lim_{x\to5}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{10}{x^2-25}\right)=?$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to5}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{10}{x^2-25}\right)=\frac{1}{5-5}-\frac{10}{25-25}=\frac{1}{0}-\frac{10}{0}=\infty-\infty$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to5}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{10}{x^2-25}\right)$$

$$=\lim_{x\to5}\left(\frac{x+5-10}{x^2-25}\right)=\lim_{x\to5}\frac{x-5}{x^2-25}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to5}\frac{x-5}{x^2-25}=\lim_{x\to5}\frac{x-5}{(x-5)(x+5)}=\lim_{x\to5}\frac{1}{x+5}=\frac{1}{5+5}=\frac{1}{10}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2}{x+3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0.5$$

4- $\lim_{x\to3}\left(\frac{5x}{x-3}-\frac{60}{x^2-2x-3}\right)=?$

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{5x}{x-3}-\frac{60}{x^2-2x-3}\right)=\frac{15}{3-3}-\frac{60}{9-6-3}$$

$$=\frac{15}{0}-\frac{60}{0}=\infty-\infty$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to3}\left(\frac{5x}{x-3}-\frac{60}{x^2-2x-3}\right)$$

$$=\lim_{x\to3}\left[\frac{5x}{x-3}-\frac{60}{(x-3)(x+1)}\right]$$

$$=\lim_{x\to3}\left[\frac{5x(x+1)-60}{(x-3)(x+1)}\right]=\lim_{x\to3}\frac{5x^2+5x-60}{x^2-2x-3}$$

$$=\frac{45+15-60}{9-6-3}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{5x^2+5x-60}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to3}\frac{5(x^2+x-12)}{(x-3)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{5(x+4)(x-3)}{(x-3)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{5(x+4)}{x+1}=\frac{5(3+4)}{3+1}=\frac{35}{4}=8.75$$

5- $\lim_{x\to1}\left(\frac{2x+5}{x^3-1}-\frac{3}{x^2-1}\right)=?$

2- $\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)=\frac{1}{2-2}-\frac{12}{2^3-8}=\frac{1}{0}-\frac{12}{0}=\infty-\infty$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2+2x+4-12}{x^3-8}\right)$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}$$

$$=\frac{2+4}{4+4+4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}=0.5$$

3- $\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x-1}-\frac{8}{x^2+2x-3}\right)=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x-1}-\frac{8}{x^2+2x-3}\right)=\frac{2}{1-1}-\frac{8}{1+2-3}$$

$$=\frac{2}{0}-\frac{8}{0}=\infty-\infty$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x-1}-\frac{8}{x^2+2x-3}\right)=\lim_{x\to1}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{8}{(x-1)(x+3)}\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{2(x+3)-8}{(x-1)(x+3)}\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x+6-8}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{x^2+2x-3}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{-1+\frac{1}{\infty}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty^2}}}=\frac{-1+0}{1+\sqrt{1+0-0}}$$

$$=\frac{-1}{1+\sqrt{1}}=\frac{-1}{1+1}=\frac{-1}{2}=-0.5$$

7- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-1}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-1}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\infty^2+5(\infty)-1}-\sqrt{\infty^2-2(\infty)+1}\right)$$

$$=\sqrt{\infty}-\sqrt{\infty}=\infty-\infty$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-1}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x-1}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{x^2-2x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{x^2-2x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x-1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2x+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{x^2-2x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+5x-1\right)-\left(x^2-2x+1\right)}{\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{x^2-2x+1}}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-1-x^2+2x-1}{\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{x^2-2x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7x-2}{\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{x^2-2x+1}}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1}\left(\frac{2x+5}{x^3-1}-\frac{3}{x^2-1}\right)=\frac{2+5}{1-1}-\frac{3}{1-1}=\frac{7}{0}-\frac{3}{0}=\infty-\infty$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{2x+5}{x^3-1}-\frac{3}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\left[\frac{2x+5}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{3}{(x-1)(x+1)}\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{(x+1)(2x+5)-3(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+7x+5-3x^2-3x-3}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2x^2+4x+2}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{-2+4+2}{0\cdot2\cdot3}=\frac{4}{0}=\infty$$

6- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x-1}\right)=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x-1}\right)=\infty-\sqrt{\infty^2+\infty-1}=\infty-\sqrt{\infty}=\infty-\infty$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+x-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x-1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+x-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)^2-(\sqrt{x^2+x-1})^2}{x+\sqrt{x^2+x-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-x+1}{x+\sqrt{x^2+x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{x+\sqrt{x^2+x-1}}$$

$$=\frac{-\infty+1}{\infty+\sqrt{\infty^2+\infty-1}}=\frac{\infty}{\infty+\sqrt{\infty}}=\frac{\infty}{\infty+\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{x+\sqrt{x^2+x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+8x+2}\right)^2-(2x-1)^2}{\sqrt{4x^2+8x+2}+(2x-1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+8x+2-(4x^2-4x+1)}{\sqrt{4x^2+8x+2}+(2x-1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+8x+2-4x^2+4x-1}{\sqrt{4x^2+8x+2}+2x-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x+1}{\sqrt{4x^2+8x+2}+2x-1}$$

$$=\frac{12(\infty)+1}{\sqrt{4(\infty)^2+8(\infty)+2}+2(\infty)-1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{12x+1}{\sqrt{4x^2+8x+2}+2x-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{12x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{8x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}+\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{8}{x}+\frac{2}{x^2}}+2-\frac{1}{x}}=\frac{12+\frac{1}{\infty}}{\sqrt{4+\frac{8}{\infty}+\frac{2}{\infty^2}}+2-\frac{1}{\infty}}$$

$$=\frac{12+0}{\sqrt{4+0+0}+2-0}$$

$$=\frac{12}{\sqrt{4}+2}=\frac{12}{2+2}=\frac{12}{4}=3$$

9- $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=?$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$$

$$=\frac{7(\infty)-2}{\sqrt{(\infty)^2+5(\infty)-1}+\sqrt{(\infty)^2-2(\infty)+1}}$$

$$=\frac{\infty}{\sqrt{\infty}+\sqrt{\infty}}=\frac{\infty}{\infty+\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{7x-2}{\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{x^2-2x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x}{x}-\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{7-\frac{2}{\infty}}{\sqrt{1+\frac{5}{\infty}-\frac{1}{\infty^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}}$$

$$=\frac{7-0}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1-0+0}}=\frac{7}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{7}{1+1}=\frac{7}{2}=3.5$$

8- $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{4x^2+8x+2}-(2x-1)\right]=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{4x^2+8x+2}-(2x-1)\right]$$

$$=\left[\sqrt{4(\infty)^2+8(\infty)+2}-(2(\infty)-1)\right]=\infty-\infty$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\sqrt{4x^2+8x+2}-(2x-1)\right]\left[\sqrt{4x^2+8x+2}+(2x-1)\right]}{\left[\sqrt{4x^2+8x+2}+(2x-1)\right]}$$

$$=\sqrt{\infty+1}-\sqrt{\infty-1}=\sqrt{\infty}-\sqrt{\infty}=\infty-\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{\infty+1}+\sqrt{\infty-1}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\infty}+\sqrt{\infty}}=\frac{2}{\infty+\infty}=\frac{2}{\infty}=0$$

لیمت توابع مثلثاتی (Limit of Trigonometrical Functions)

جهت دریافت لیمت توابع مثلثاتی قضایای ذیل را در نظر می‌گیریم:

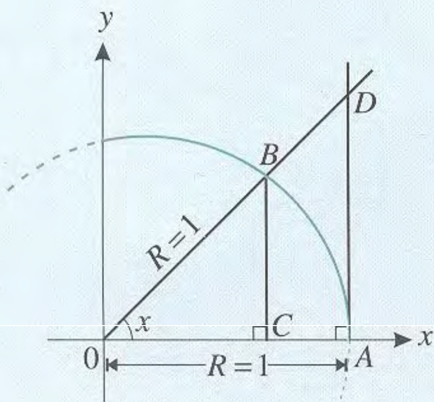
ثبوت می‌نماییم که:

1- $\lim_{x\to 0}\sin x=0$

2- $\lim_{x\to 0}\cos x=1$

3- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

ثبوت (Proof): برای اثبات قضایای فوق دایره مثلثاتی (دایره که شعاع آن یک واحد است) را در روی سیستم کمیات وضعیه قایم طوری در نظر می‌گیریم که مرکز دایره در مبدأ کمیات وضعیه قایم قرار داشته باشد. روی این دایره زاویه حاده (x) را در حالت استندرد رسم می‌نماییم، طوریکه ضلع نهایی این زاویه محیط دایره را در نقطه (B) قطع می‌نماید، مرتسم نقطه (B) را بالای ضلع ابتدایی زاویه رسم نموده که در نقطه (C) قطع می‌نماید. همچنان از نقطه (A) ضلع ابتدایی زاویه (x)، به دایره مذکور یک مماس رسم می‌نماییم که امتداد ضلع نهایی این زاویه را در نقطه مانند (D) قطع می‌نماید. بخاطر بسپارید که مماس در نقطه تماس (A) بالای شعاع دایره (R) عمود می‌باشد.



طوریکه در شکل ملاحظه می‌گردد، زمانیکه $x\to 0$ نماید، در مثلث قایم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OCB}$ ضلع مقابل آن $BC\to 0$ نموده و ضلع مجاور آن $\overline{OC}=\overline{OA}=R=1$ می‌گردد، در نتیجه اثبات قضایای (۱) و (۲) کاملاً وضاحت دارد، یعنی:

1- $\lim_{x\to 0}\sin x=\lim_{x\to 0}\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}=\frac{0}{1}=0$

2- $\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}=\frac{1}{1}=1$

اما در قضیه (3) زمانی که $x\to 0$ نماید، ملاحظه می‌گردد که:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}$$

قبل بر این که به اثبات قضیه فوق بـه شـکل الجبـری بپـردازیم توسـط قیمت‌گذاری به زاویه مذکور (از جنس رادیـان) مـی‌تـوان بـه حقیقـت ثبـوت نزدیک گردیم.

$$x=180^{\circ}=\pi \Rightarrow \frac{\sin x}{x}=\frac{\sin \pi}{\pi}=\frac{0}{3.14}=0$$

$$x=90^{\circ}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}=\frac{2}{3.14}=0.6369$$

$$x=60^{\circ}=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}=\frac{3\cdot 1.7}{2\cdot 3.14}=\frac{5.1}{6.28}=0.8121$$

$$x=45^{\circ}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}=\frac{2\cdot 1.4}{3.14}=\frac{2.8}{3.14}=0.8917$$

$$x=30^{\circ}=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(\frac{\pi}{6})}{\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{\pi}=\frac{3}{3.14}=0.9554$$

$$x=18^{\circ}=\frac{\pi}{10} \Rightarrow \frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(\frac{\pi}{10})}{\frac{\pi}{10}}$$

$$=\frac{0.309}{\frac{\pi}{10}}=\frac{10(0.309)}{\pi}=\frac{3.09}{3.14}=0.9841$$

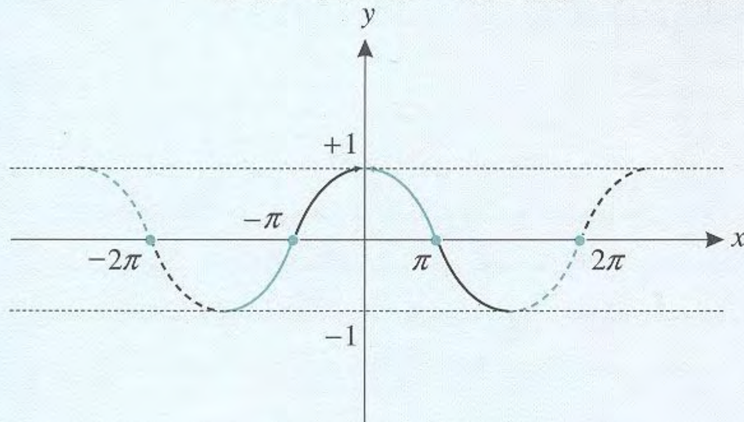
$$x=1.8^{\circ}=\frac{\pi}{100} \Rightarrow \frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(\frac{\pi}{100})}{\frac{\pi}{100}}$$

$$=\frac{100(0.0314)}{\pi}=\frac{3.14}{3.14159265}=0.999493$$

$$x=0.18^{\circ}=\frac{\pi}{1000} \Rightarrow \frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(\frac{\pi}{1000})}{\frac{\pi}{1000}}$$

$$=\frac{1000(0.00314)}{\pi}=\frac{3.14}{3.14159265}=0.9999983551\approx 1$$

طوریکه ملاحظه می‌گردد، به هر اندازهٔ که زاویه (x) کوچـک و کـوچکتر می‌گردد مساوات فوق به طرف عدد یک نزدیک می‌شود.



جهـت اثبـات الجبـری قـضیه فـوق بـا اسـتفاده از مـساحت مثلـث‌هـای قـایم‌الزاویـه $\overset{\Delta}{OCB}$ و $\overset{\Delta}{OAD}$ و همچنـان مـساحت قطـاع دایـره OAB بـا ملاحظه شکل فوق می‌توان چنین نوشت:

مساحت مثلث قـایم‌الزاویـه $\overset{\Delta}{OAD}$ > مـساحت قطـاع دایـره OAB > مساحت مثلث قایم الزاویه $\overset{\Delta}{OCB}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot \overline{OC}\cdot\overline{BC} < \frac{1}{2}\cdot\hat{x}\cdot R^2 < \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AD} \;/\cdot 2$$

$$\overline{OC}\cdot\overline{BC} < x\cdot 1^2 < 1\cdot\overline{AD} \Rightarrow \overline{OC}\cdot\overline{BC} < x < \overline{AD} \;.............(I)$$

با استفاده از تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث‌های قایم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OCB}$ و $\overset{\Delta}{OAD}$ می‌توان چنین نوشت:

در مثلث قایم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OCB}$
$$\begin{cases}\Rightarrow \sin x = \dfrac{\overline{BC}}{R} = \dfrac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC} \Rightarrow \sin x = \overline{BC}\\ \Rightarrow \cos x = \dfrac{\overline{OC}}{R} = \dfrac{\overline{OC}}{1} = \overline{OC} \Rightarrow \cos x = \overline{OC}\end{cases}$$

در مثلث قایم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OAI}$ $\Rightarrow \tan x = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{AD}}{R} = \dfrac{\overline{AD}}{1} = \overline{AD} \Rightarrow \tan x = \overline{AD}$

با وضع نمودن قیمت‌های $\overline{OC}, \overline{BC}$ و $\overline{AD}$ در نامساوات (I) داریم که:

$$\overline{OC}\cdot\overline{BC} < x < \overline{AD} \;..............(I)$$

$$\Rightarrow \cos x\cdot\sin x < x < \tan x$$

$$\cos x\cdot\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \;/:\sin x$$

$$\frac{\cos x\cdot\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

اطراف نامساوات اخیر را معکوس می‌نماییم:

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

از اطراف نامساوات اخیر لیمت می‌گیریم، زمانی که $(x \to 0)$ نماید:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0}\cos x$$

$$\frac{1}{\cos 0} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \cos 0$$

$$\frac{1}{1} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > 1 \Rightarrow 1 > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > 1 \;............(II)$$

از نامساوات (II) دو نتیجه ذیل به دست می‌آید:

1- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} > 1$

و این نامساوی بدین معنی است که تقریباً:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.0000001 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

2- $1 > \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} < 1$

و این نامساوی بدین مفهوم است که تقریباً:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 0.9999999 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

در نتیجه از طرف راست و چپ ثبوت گردید که:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

از جانب دیگر نظر به قضیهٔ ساندویچ در نامساوات II می‌توانیم بنویسیم که:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}1=1\\ \lim\limits_{x\to a} h(x)=\lim\limits_{x\to 0}1=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=b=\lim\limits_{x\to a} h(x)\\ \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)=b\\ \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\end{array}$$

قابل یادآوری می‌دانم، که جهت دریافت لیمت‌های توابـع مثلثـاتی و رفـع ابهام به کمک قضیه فوق می‌توان به نتیجه رسید.

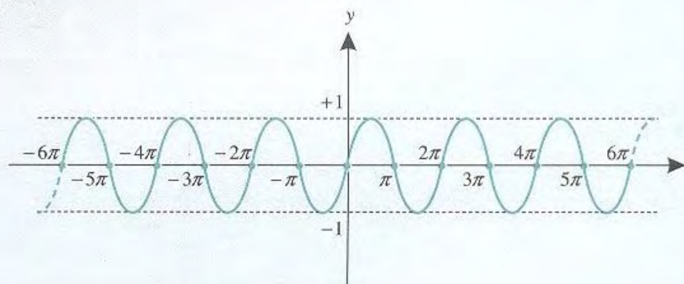
یادداشت: در جهت دریافت لیمت‌های توابع مثلثاتی بخاطر داشته باشـید کـه $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ و $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ نامحـدود بـوده و لیمـت آن تعیـین نمی‌گردد؛ زیرا با استفاده از تحول نسبت‌های مثلثاتی می‌دانیم که ساحه تحول $\sin x$ در انتروال بسته $[-1, +1]$ می‌باشـد و از لیمـت‌هـای فـوق نتیجـه می‌گردد، که:

$$\lim_{x\to\infty}\sin x=\sin(\infty)$$

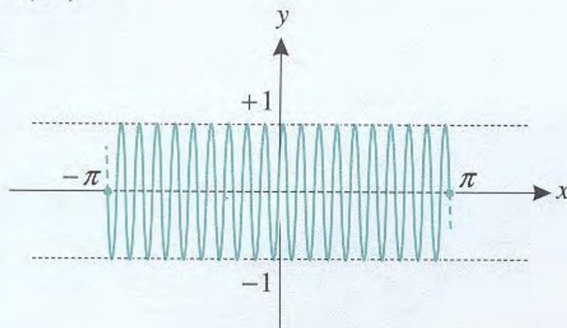
$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\sin\left(\frac{1}{0}\right)=\sin(\infty) \text{ و}$$

در این صورت نسبت مثلثاتی ساین بـی‌نهایـت مراتبـه در انتـروال بـسته $[-1, +1]$ تحول می‌نماید. وضاحت موضـوع را در اشـکال ذیـل ملاحظـه نمایید:

$$\lim_{x\to\infty}\sin x$$



$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



مثال‌ها:

لیمت توابع مثلثاتی ذیل را دریافت نمایید:

1- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\frac{\tan 0}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1$$

2- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sin x}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=\frac{\tan 0}{\sin 0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1$$

3- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\frac{\sin 3(0)}{5(0)}=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{5x}=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{5}\cdot 1=\frac{3}{5}$$

4- $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 7x}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 7x}=\frac{2(0)}{\tan 7(0)}=\frac{0}{\tan 0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{\sin 7x}{\cos 7x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\cos 7x}{\sin 7x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\cos 7x}{7x\cdot\frac{\sin 7x}{7x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\cos 7x}{7\cdot\frac{\sin 7x}{7x}}=\frac{2}{7}\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\cos 7x}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}}=\frac{2}{7}\cdot\frac{\cos 0}{1}=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{7}$$

5- $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{x+\sin 5x}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{x+\sin 5x}=\frac{2\sin 3(0)}{0+\sin 5(0)}=\frac{2\sin 0}{\sin 0}=\frac{2\cdot 0}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{x+\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 3x\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{x+5x\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}=\lim_{x\to 0}\frac{6x\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{x(1+5\cdot\frac{\sin 5x}{5x})}$$

$$=6\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{1+5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=6\left(\frac{1}{1+5\cdot 1}\right)=6\left(\frac{1}{6}\right)=1$$

6- $\lim_{x\to 0}\frac{5x-2\tan x}{\sin 2x+3\sin x}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{5x-2\tan x}{\sin 2x+3\sin x}=\frac{5(0)-2\tan(0)}{\sin 2(0)+3\sin(0)}$$

$$=\frac{0-2(0)}{\sin 0+3(0)}=\frac{0-0}{0+0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{5x-2\tan x}{\sin 2x+3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x-2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}{2x\cdot\frac{\sin 2x}{2x}+3x\cdot\frac{\sin x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x-2x\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)}{x\,(2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}+3\cdot\frac{\sin x}{x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left[5-2\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)\right]}{x\,(2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}+3\cdot\frac{\sin x}{x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}}{2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}+3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{5-2\cdot 1\cdot\frac{1}{1}}{2\cdot 1+3\cdot 1}=\frac{5-2}{2+3}=\frac{3}{5}$$

7- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}=\frac{\sin^2\frac{0}{3}}{0^2}=\frac{\sin^2 0}{0}=\frac{0^2}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{9\cdot\frac{x^2}{9}}=\frac{1}{9}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}{\left(\frac{x}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{9}\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}\right)^2=\frac{1}{9}(1)^2=\frac{1}{9}\cdot1=\frac{1}{9}$$

و یا به طریقه دیگر:

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{3}\cdot\sin\frac{x}{3}}{9\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}}=\frac{1}{9}\left[\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{9}\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}=\frac{1}{9}\cdot1\cdot=\frac{1}{9}$$

8- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$$

$$=\frac{\sin(a+0)-\sin(a-0)}{0}=\frac{\sin a-\sin a}{0}=\frac{0}{0}$$

از مطالعه فورمول‌های حاصل‌جمع و حاصل‌تفریق زوایا در نسبت‌های مثلثاتی می‌دانیم که:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin a\cdot\cos x+\cos a\cdot\sin x-(\sin a\cdot\cos x-\cos a\cdot\sin x)}{x}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\sin a\cdot\cos x+\cos a\cdot\sin x-\sin a\cdot\cos x+\cos a\cdot\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{2\cos a\cdot\sin x}{x}=2\cos a\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$$

$$=2\cos a\cdot1=2\cos a$$

9- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{\tan0-\sin0}{0^3}=\frac{0-0}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cdot\cos x}$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\cdot\cos x\cdot(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2\cdot\cos x\cdot(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2\cdot\cos x\cdot(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos 0(1+\cos 0)}=(1)^2\cdot\frac{1}{1(1+1)}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

10- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos(0)}{(0)^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos 0}$$

$$=(1)^2\cdot\frac{1}{1+1}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

11- $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=?$

$$\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{\sin(x+0)-\sin x}{0}$$

$$=\frac{\sin x-\sin x}{0}=\frac{0}{0}$$

چون می‌دانیم که: $\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$

$$\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\cdot\sin\frac{x+h-x}{2}}{2\cdot\frac{h}{2}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\cos\frac{2x+h}{2}\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)=\lim_{h\to 0}\cos\frac{2x+h}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$=\cos\frac{2x+0}{2}\cdot 1=\cos x$$

12- $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=\frac{\sin(1-1)}{1-1}=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}$$

برای حل سوال فوق و رسیدن به شکل قضیه لیمت توابع مثلثاتی تعویض ذیل را در نظر می‌گیریم:

اگر $y=x-1$ تعویض گردد.

پس می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} x \to 1 \\ y \to x-1 \\ y \to 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

13- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a} = ?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \frac{\sin a - \sin a}{a-a} = \frac{0}{0}$$

اگر $y=x-a$ تعویض گردد، پس $x=y+a$ گردیده و داریم که:

$$\begin{cases} y \to x-a \\ x \to a \\ y \to 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y+a) - \sin a}{y}$$

چون با استفاده از فورمول‌های تحویل (ضرب) در مثلثات می‌دانیم که:

$$\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2} \cdot \cos\frac{A+B}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{2\sin\frac{y+a-a}{2} \cdot \cos\frac{y+a+a}{2}}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{2\sin\frac{y}{2} \cdot \cos\frac{y+2a}{2}}{2 \cdot \frac{y}{2}}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \cdot \lim_{y\to 0} \cos\frac{y+2a}{2} = 1 \cdot \cos\frac{0+2a}{2} = \cos a$$

14- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin \pi x} = ?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x} = \frac{1-1}{\sin \pi} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x} = \lim_{x\to 1} \frac{(1+x)(1-x)}{\sin \pi x}$$

$$= \lim_{x\to 1} (1+x) \cdot \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\sin \pi x} = 2 \cdot \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\sin \pi x}$$

اگر $y=1-x$ وضع گردد. پس $x=1-y$ گردیده، لذا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} y \to 1-x \\ x \to 1 \\ y \to 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin \pi(1-y)} = 2 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin(\pi - \pi y)}$$

چون می‌دانیم که: $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$$\Rightarrow 2 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin \pi \cdot \cos \pi y - \cos \pi \cdot \sin \pi y}$$

$$= 2 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{y}{0 \cdot \cos \pi y - (-1) \cdot \sin \pi y}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin \pi y} = 2 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{y}{\pi y \cdot \frac{\sin \pi y}{\pi y}}$$

$$=2\cdot\frac{1}{\pi\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin\pi y}{\pi y}}=2\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

15- $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\tan\pi x}{x+2}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to -2}\frac{\tan\pi x}{x+2}=\frac{\tan\pi(-2)}{-2+2}=\frac{\tan(-2\pi)}{0}=\frac{-\tan 2\pi}{0}=\frac{0}{0}$$

اگر $y=x+2$ وضع گردد، در نتیجه $x=y-2$ گردیده، لذا داریم که:

$$\begin{cases} y\to x+2\\ x\to -2\\ y\to 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to -2}\frac{\tan\pi x}{x+2}=\lim_{y\to 0}\frac{\tan\pi(y-2)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\tan(\pi y-2\pi)}{y}$$

با استفاده از فورمول حاصل‌تفریق زوایا می‌دانیم که:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\Rightarrow\lim_{y\to 0}\frac{\tan(\pi y-2\pi)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\tan\pi y-\tan 2\pi}{1+\tan\pi y\cdot\tan 2\pi}}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\tan\pi y-0}{1+\tan\pi y\cdot 0}}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\tan\pi y}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin\pi y}{y\cdot\cos\pi y}=\lim_{y\to 0}\frac{\pi y\cdot\frac{\sin\pi y}{\pi y}}{y\cdot\cos\pi y}$$

$$=\pi\cdot\frac{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin\pi y}{\pi y}}{\lim\limits_{y\to 0}\cos\pi y}$$

$$=\pi\cdot\frac{1}{\cos 0}=\pi\cdot\frac{1}{1}=\pi$$

16- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{1-\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

اگر $y=x-\frac{\pi}{2}$ وضع گردد، در نتیجه $x=\frac{\pi}{2}+y$ گردیده پس داریم که:

$$\begin{cases} y\to x-\frac{\pi}{2}\\ y\to\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\\ y\to 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}+y)}{y}$$

از مطالعه مثلثات می‌دانـیم کـه: $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=+\cos\alpha$ است، پس می‌توان چنین نوشت:

$$\Rightarrow\lim_{y\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}+y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{y(1+\cos y)}$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to 0}\frac{1-\cos^2 y}{y(1+\cos y)}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin^2 y}{y(1+\cos y)}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{1+\cos y}$$

$$=1\cdot\frac{\sin 0}{1+\cos 0}=\frac{0}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

17- $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{0}=\frac{0}{0}$$

اگر $y=x-\frac{\pi}{4}$ وضع گردد، در نتیجه $x=y+\frac{\pi}{4}$ گردیده، پس داریم که:

$$\begin{cases} y\to x-\frac{\pi}{4}\\ x\to\frac{\pi}{4}\\ y\to\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\\ y\to 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y+\frac{\pi}{4})-\cos(y+\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}$$

از مطالعه علم مثلثات می‌دانیم که:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to 0}\frac{\sin y\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos y\cdot\sin\frac{\pi}{4}-(\cos y\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin y\cdot\sin\frac{\pi}{4})}{y}$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin y}{y}=\sqrt{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$$

18- $\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=\infty\cdot\sin\frac{1}{\infty}=\infty\cdot\sin 0=\infty\cdot 0$$

هرگاه $y=\frac{1}{x}$ وضع گردد، در نتیجه:

$$x=\frac{1}{y}\quad\Rightarrow x\to\infty\quad\Rightarrow y\to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{y}\cdot\sin y\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

19- $\lim_{x\to 1}\left[(1-x)\cdot\tan\frac{\pi x}{2}\right]=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left[(1-x)\cdot\tan\frac{\pi x}{2}\right]=(1-1)\cdot\tan\frac{\pi}{2}=0\cdot\infty$$

هرگاه $y=1-x$ وضع گردد، در نتیجه:

$$-x=y-1\quad\Rightarrow x=1-y\quad\Rightarrow x\to 1\quad\Rightarrow y\to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left[(1-x)\cdot\tan\frac{\pi x}{2}\right]=\lim_{y\to 0}\left[y\cdot\tan\frac{\pi(1-y)}{2}\right]$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[y\cdot\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2})\right]$$

از مطالعه علم مثلثات می‌توان نوشت:

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = +\cot\alpha$$

$$= \lim_{y\to0}\left[y\cdot \tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2})\right] = \lim_{y\to0}\left[y\cdot\cot\frac{\pi y}{2}\right]$$

$$=\lim_{y\to0}\left[y\cdot\frac{\cos\frac{\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi y}{2}}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to0}\left[y\cdot\frac{\cos\frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}}}\right] = \lim_{y\to0}\left[\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos\frac{\pi y}{2}}{\frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}}}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\lim\limits_{y\to0}\cos\frac{\pi y}{2}}{\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos0}{1}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{\pi}$$

20- $\lim\limits_{x\to0}\left[\cot2x\cdot\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\left[\cot2x\cdot\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\cot0\cdot\cot\frac{\pi}{2}=\infty\cdot0$$

با استفاده از علم مثلثات می‌دانیم که: $\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=+\tan\alpha$

$$=\lim_{x\to0}\left[\cot2x\cdot\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos2x}{\sin2x}\cdot\tan x\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos2x}{2\sin x\cdot\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\cos2x}{2\cos^2x}=\frac{\cos2(0)}{2\cos^2(0)}$$

$$=\frac{\cos0}{2(1)^2}=\frac{1}{2\cdot1}=\frac{1}{2}$$

رفع شکل نامعین $(1)^\infty$

جهت دریافت لیمت‌های شکل نـامعین $(1)^\infty$ قـضایای ذیـل را بـه اثبـات می‌رسانیم.

قضیه I: ثبوت می‌نماییم کـه: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ طوریکـه e یـک عدد غیر نسبتی ....e=2.718281 می‌باشد.

ثبوت: طوریکه ملاحظه می‌گردد:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty=(1+0)^\infty=(1)^\infty$$

بناءً جهت اثبات قضیه فـوق بـا اسـتفاده از انکـشاف بینومیـل $(a+b)^n$ می‌توان چنین نوشت:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=(1)^n+\frac{n}{1!}(1)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^1+\frac{n(n-1)}{2!}$$

$$(1)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(1)^{n-3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}(1)^{n-4}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^4+.................+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4).......[n-(n-1)]}{n!}(1)^0\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\ldots n}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

چون n یک عدد بی‌نهایت بزرگ است، پس:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\le 1,\ \left(1-\frac{2}{n}\right)\le 1,$$

$$\left(1-\frac{3}{n}\right)\le 1,\ \ldots\ldots,\ \left(1-\frac{n-1}{n}\right)\le 1$$

پس در نتیجه می‌توان چنین نوشت:

$$\Rightarrow\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\ldots\cdot n}\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

از جانبی دیگر می‌دانیم که:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}<\frac{1}{2^4}\ \ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\ldots\cdot n}<\frac{1}{2^{n-1}}$$

پس در نتیجه رابطه (I) را می‌توان چنین نوشت:

$$\Rightarrow 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots\ldots\ldots+$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\ldots(II)$$

طوریکه ملاحظه می‌گردد طرف راست نامساوی فوق یک سلسله نـامعین (متقارب) هندسی بوده که می‌توان، آن را چنین محاسبه نمود:

$$\Rightarrow 1+1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}_{S_n}=1+S_n$$

$$1+S_n=1+\frac{a}{1-r}$$

در حالیکه $a=1$ و $r=\frac{1}{2}$ می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$1+S_n=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 1+S_n=1+\frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 1+S_n=3$$

پس در نتیجه می‌توان رابطه (II) را چنین نوشت:

$$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+S_n$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+2\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (III)$$

از جانب دیگر در رابطه (I) به وضاحت دیده می‌شود که:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$$

پس در نتیجه ملاحظه روابط (I) و (II) می‌توان چنین نوشت:

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

بناءً به اثر ساده ساختن قیمت‌های رابطه (I) زمانیکه $(n\to\infty)$ نمایند، داریم که:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}+\frac{1}{40320}+\ldots\ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+0.5+0.1666+0.0416+0.00833+0.00138889+0.00019841+0.0000248+\ldots\ldots\ldots=2.718281\ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718281\ldots\ldots$$

اگر $e=2,718281\ldots.$ (که به نام عدد ایلر (Euler) یاد می‌گردد) وضع گردد، داریم که:

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

قضیه II: با استفاده از قضیه I می‌توان ثبوت نمود که: $\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}=e$ طوریکه $e=2.718281\ldots..$ می‌باشد.

ثبوت: جهت اثبات قضیه فوق تعویض ذیل را در نظر می‌گیریم:

اگر: $u=\frac{1}{n}\ \Rightarrow n=\frac{1}{u}$

همچنان: $n\to 0\ \Rightarrow u\to\frac{1}{0}\ \Rightarrow u\to\infty$

پس در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e$$

همین ترتیب با در نظرداشت لیمتسس تابع اکسپوننشیل $\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ که شکل مبهم $(1)^{\infty}$ را به خود اختیار نماید با در نظرداشت قضیه ذیل می‌توان لیمت توابع مذکور را به سهولت دریافت نمود.

قضیه: لیمت تابع اکسپوننشیل عبارت از:

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=e^p$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

ثبوت: اگر $\alpha=u-1$ در نظر گرفته شود پس داریم که:

$$\lim_{x\to a}u^v=\lim_{x\to a}[(1+u-1)]^{(u-1)(\frac{v}{u-1})}=\lim_{x\to a}[(1+\alpha)]^{\alpha\cdot\frac{v}{\alpha}}$$

$$=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v\cdot\alpha)}$$

چون: $\begin{cases}\alpha=u-1\\ u\to 1\\ \alpha\to 0\end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=\left[\lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}=e^p$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=e^p\ ,\ P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

مثال‌ها:

لیمت توابع ذیل را دریافت نمایید:

1- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}=\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty+5}=(1+0)^{\infty}=(1)^{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}$$

$$=e\cdot\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{5}=e\cdot(1+0)^{5}=e\cdot(1)^{5}=e\cdot 1=e$$

2- $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}=(1-0)^{\infty}=(1)^{\infty}$$

اگر $\Rightarrow x=-\frac{1}{y}$ $y=-\frac{1}{x}$ تعویض گردد، در نتیجه:

$$x\to\infty \Rightarrow y\to-\frac{1}{\infty}\Rightarrow y\to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-1}$$

$$=\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

3- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\left(1+\frac{2}{\infty}\right)^{\infty}=(1+0)^{\infty}=(1)^{\infty}$$

اگر $x=2y$ وضع گردد، $\Rightarrow y\to\infty$ $x\to\infty$ پس داریم که:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{2}{2y}\right)^{2y}$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}=\lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{2}$$

$$=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{2}=e^{2}$$

4- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{x}{x}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}+1}\right)^{x}=\left(\frac{1}{\frac{1}{\infty}+1}\right)^{\infty}$$

$$=\left(\frac{1}{0+1}\right)^{\infty}=\left(\frac{1}{1}\right)^{\infty}=(1)^{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{-x}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{x}\right)^{x}\right]^{-1}$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

5- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=?$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty+5}=(1+0)^{\infty}=(1)^{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}$$

$$=e\cdot\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{5}=e\cdot(1)^{5}=e$$

6- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1+2}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+1}+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1}=\left(1+\frac{2}{\infty+1}\right)^{\infty+1}$$

$$=\left(1+\frac{2}{\infty}\right)^{\infty}=(1+0)^{\infty}=(1)^{\infty}$$

هرگاه
$$\left.\begin{array}{l}2y=2x+1\\ x=\dfrac{2y-1}{2}\\ x\to\infty\\ y\to\infty\end{array}\right\}\Rightarrow=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{2y}{2}-\frac{1}{2}+1}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{2}{2y}\right)^{\frac{2y-1}{2}+1}$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+\frac{1}{2}}=\lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=e\cdot\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{1}{2}}=e\cdot(1+0)^{\frac{1}{2}}=e\cdot(1)^{\frac{1}{2}}=e\cdot1=e$$

طریقه دوم:

هرگاه $u=\dfrac{2x+3}{2x+1}$ و $v=x+1$ گرفته شود. پس داریم که:

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

$$P=\lim_{x\to\infty}\left[(x+1)\left(\frac{2x+3}{2x+1}-1\right]\right.$$

$$P=\lim_{x\to\infty}\left[(x+1)\left(\frac{2x+3-2x-1}{2x+1}\right]\right.$$

$$P=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+2}{2x+1}=\frac{2}{2}=1$$

$$\Rightarrow P=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=e^{p}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=e^{p}=e^{1}=e$$

7- $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln(n+1)-\ln n]\}=?$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\{n[\ln(n+1)-\ln n]\}=\lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^{n}$$

$$=e^{-4}\cdot\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{-3}=e^{-4}\cdot(1+0)^{-3}$$

$$=e^{-4}\cdot(1)^{-3}=\frac{1}{e^4}\cdot 1=\frac{1}{e^4}$$

طریقه دوم:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\alpha}[u(x)]^{v(x)}=e^{p}$$

$$P=\lim_{x\to\alpha}[v(u-1)]$$

$$u=\frac{x-1}{x+3} \quad \text{و} \quad v=x+2$$

$$\Rightarrow P=\lim_{x\to\infty}\left[(x+2)\left(\frac{x-1}{x+3}-1\right)\right]$$

$$P=\lim_{x\to\infty}\left[(x+2)\frac{(x-1-x-3)}{x+3}\right]$$

$$P=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x-8}{x+3}=\frac{-4}{1}=-4$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=e^{p}=e^{-4}=\frac{1}{e^4}$$

9- $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}}=(1+3(0))^{\frac{5}{0}}=(1+0)^{\infty}=(1)^{\infty}$$

هرگاه $\left.\begin{array}{l}3x=y\\ x=\frac{y}{3}\\ x\to 0\\ y\to 0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}}=\lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{5}{\frac{y}{3}}}\right]=\lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{15}{y}}\right]=\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{15}=e^{15}$

$$=\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]=\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]=(1)^{\infty}$$

$$=\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]=\ln(e)=1$$

8- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3-4}{x+3}\right)^{x+2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+3}-\frac{4}{x+3}\right)^{x+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x+3}\right)^{x+2}=\left(1-\frac{4}{\infty}\right)^{\infty}=(1-0)^{\infty}=(1)^{\infty}$$

هرگاه $\left.\begin{array}{l}x+3=-4y\\ x=-4y-3\\ x\to\infty\\ y\to\infty\end{array}\right\}\Rightarrow =\lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{4}{-4y}\right)^{-4y-3} \quad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x+3}\right)^{x+2}$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-4y-3}=\lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-4y}\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-3}\right]$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-4y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-3}$$

$$=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-4}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-3}$$

$$u = 1+7x^2,\quad v = \frac{2}{x^2} \Rightarrow P = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{x^2}(1+7x^2-1)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{x^2}\cdot(7x^2)\right] = 14$$

$$\Rightarrow P = 14$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+7x^2)^{\frac{2}{x^2}} = e^p = e^{14}$$

11- $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\csc x} = ?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\csc x} = (1+\sin 0)^{2\csc 0} = (1+0)^{\infty} = (1)^{\infty}$$

هرگاه $y = \sin x$، $x \to 0$، $y \to \sin 0$، $y \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\csc x} = \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{2}{\sin x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}} = \left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^2 = e^2$$

طریقه دوم:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\cos ecx} = \lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = e^p$$

$$u = 1+\sin x,\quad v = 2\cos ecx \quad P = \lim_{x\to a}[u(v-1)]$$

$$P = \lim_{x\to 0}[2\cos ecx(1+\sin x-1)] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{\sin x}\cdot\sin x\right]$$

$$p = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\cos ecx} = e^p = e^2$$

12- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x} = ?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x} = \left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)^{3\sec\frac{\pi}{2}}$$

طریقه دوم:

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = e^P$$

$$P = \lim_{x\to\alpha}[v(u-1)]$$

$u = 1+3x$ و $v = \frac{5}{x}$

$$\Rightarrow P = \lim_{x\to 0}\left[\frac{5}{x}(1+3x-1)\right] = 15$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 9}(1+3x)^{\frac{5}{x}} = e^P = e^{15}$$

10- $\lim_{x\to 0}(1+7x^2)^{\frac{2}{x^2}} = ?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+7x^2)^{\frac{2}{x^2}} = (1+7(0))^{\frac{2}{0}} = (1+0)^{\infty} = (1)^{\infty}$$

هرگاه $7x^2 = y$، $x^2 = \frac{y}{7}$، $x \to 0$، $y \to 0$

$$= \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{14}{y}} \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+7x^2)^{\frac{2}{x^2}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{\frac{y}{7}}}$$

$$= \lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{14} = \left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{14} = (e)^{14}$$

طریقه دوم:

$$\lim_{x\to 0}(1+7x^2)^{\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\alpha}[u(x)]^{v(x)} = e^p$$

$$P = \lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

$$=(1+0)^{3(\infty)}=(1)^{\infty}$$

هرگاه

$$\left.\begin{array}{l} y=\cos x \\ x\to\frac{\pi}{2} \\ y\to\cos\frac{\pi}{2} \\ y\to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}} =\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{3}{y}}=\lim_{y\to0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^3=\left[\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^3=e^3$$

طریقه دوم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}=\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=e^P$$

$$\left.\begin{array}{l} u=1+\cos x \\ v=3\sec x \end{array}\right\} P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[3\sec x(1+\cos x-1)]$$

$$P=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{3}{\cos x}\cdot\cos x\right]=3$$

$$P=3$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}=e^P=e^3$$

$$13-\ \lim_{x\to0}\left(1+5\tan^2 x\right)^{\cot^2 x}=?$$

$$\Rightarrow \lim\left(1+5\tan^2 x\right)^{\cot^2 x}=(1+5\cdot 0)^{\infty^2}=(1+0)^{\infty}=(1)^{\infty}$$

هرگاه

$$\left.\begin{array}{l} y=5\tan^2 x \\ x\to0 \\ y\to5\tan^2 0 \\ y\to0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to0}\left(1+5\tan^2 x\right)^{\cot^2 x}=\lim_{x\to0}\left(1+5\tan^2 x\right)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$$

$$=\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{\frac{y}{5}}}=\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{5}{y}}=\lim_{y\to0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^5$$

$$=\left[\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^5=e^5$$

طریقه دوم:

$$\lim_{x\to0}(1+5\tan^2 x)^{\cot g^2 x}=\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=e^P$$

$$\left.\begin{array}{l} u=1+5\tan^2 x \\ v=\cot g^2 x \end{array}\right\} P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

$$P=\lim_{x\to0}[\cot g^2 x(1+5\tan^2 x-1)]$$

$$P=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\tan^2 x}(5\tan^2 x)\right]=5\Rightarrow p=5$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}(1+5\tan^2 x)^{\cot g^2 x}=e^P=e^5$$

یادداشت: با استفاده از قضیه (I) و (II) در رفع شکل نـامعین $(1)^{\infty}$ می‌توان لیمت توابع ذیل را نیز دریافت نمود.

مثال‌ها:

$$1-\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+nx)}{x}=?$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+nx)}{x}=\frac{\ln[1+n(0)]}{0}=\frac{\ln(1+0)}{0}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}$$

هرگاه

$$\left.\begin{array}{l} y=nx \\ x=\frac{y}{n} \\ x\to0 \\ y\to0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+nx)}{x}=\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{\frac{y}{n}}=\lim_{y\to0}\left[\frac{n}{y}\ln(1+y)\right]$$

$$=\lim_{y\to0}\left[n\cdot\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]=n\cdot\ln\left[\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]=n\ln e=n\cdot1=n$$

2- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+10x)}{x}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+10x)}{x}=\frac{\log(1+0)}{0}=\frac{\log 1}{0}=\frac{0}{0}$$

هرگاه
$$\left.\begin{array}{l} y=10x \\ x=\dfrac{y}{10} \\ x\to 0 \\ y\to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+10x)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{\dfrac{y}{10}}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[\frac{10}{y}\cdot\log(1+y)\right]=\lim_{y\to 0}\left[10\cdot\log(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]$$

$$=10\cdot\log\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]=10\cdot\log e=\frac{10}{\ln 10}$$

3- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^0-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=e^x-1 \\ e^x=y+1 \\ \ln e^x=\ln(y+1) \\ x\cdot\ln e=\ln(y+1) \\ x=\ln(y+1) \\ x\to 0 \\ y\to e^0-1 \\ y\to 1-1 \\ y\to 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(y+1)} \\ =\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{1}{y}\cdot\ln(y+1)} \\ \Rightarrow \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{\ln(y+1)^{\frac{1}{y}}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\left[\ln(y+1)^{\frac{1}{y}}\right]} \end{array}$$

$$=\frac{1}{\ln\left[\lim\limits_{y\to 0}(y+1)^{\frac{1}{y}}\right]}=\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{1}=1$$

4- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{0}\cdot\ln\sqrt{\frac{1+0}{1-0}}\right)=\infty\cdot\ln(1)=\infty\cdot 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)-\frac{1}{x}\ln(1-x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-\ln(1-x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left\{\ln\left[1+(-x)\right]^{\frac{-1}{-x}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]-\frac{1}{2}\ln\left\{\lim_{x\to 0}\left[1+(-x)\right]^{\frac{1}{-x}}\right\}^{-1}$$

هرگاه
$$\left.\begin{array}{l} t=a^y-1 \\ t+1=a^y \\ \ln(t+1)=\ln a^y \\ \ln(t+1)=y\ln a \\ y=\dfrac{\ln(t+1)}{\ln a} \\ y\to 0 \\ t\to a^0-1 \\ t\to 1-1 \\ t\to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{y\to 0}\frac{a^y-1}{y}=\lim_{t\to 0}\left[\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}}\right] =\lim_{t\to 0}\left[\frac{t\cdot\ln a}{\ln(t+1)}\right]=\lim_{t\to 0}\left[\frac{\ln a}{\frac{1}{t}\cdot\ln(t+1)}\right]$$

$$=\frac{\ln a}{\lim\limits_{t\to 0}\left[\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}\right]}=\frac{\ln a}{\ln\left[\lim\limits_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}\right]}=\frac{\ln a}{\ln e}=\frac{\ln a}{1}=\ln a$$

متمادیت توابع (Continuitg of Functions)

تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ متمادی گفته می‌شود، زمانیکه:

۱) f(a) موجود گردد یعنی نقطه a در ساحه تعریف f(x) شامل باشد.

۲) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود گردد یعنی تابع در نقطـه $x=a$ لیمـت داشـته باشد.

۳) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ گردد.

مثال‌ها:

مثـال ۱: دریافـت نماییـد کـه تـابع $f(x)=x^2-5x+2$ در نقطـه $x_0=3$ متمادی است.

1) $3\in Dom\ f(x)=IR$

$$\Rightarrow f(3)=(3)^2-5(3)+2=9-15+2=-4$$

هرگاه
$$\left.\begin{array}{l} y=-x \\ x\to 0 \\ y\to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln e-\frac{1}{2}\ln\left\{\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right\}^{-1}=\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2}\ln(e^{-1}) =\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

5- $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n(\sqrt[n]{a}-1)\right]=?$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[n(\sqrt[n]{a}-1)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n(a^{\frac{1}{n}}-1)\right]$$

$$=\infty\,(a^{\frac{1}{\infty}}-1)=\infty\,(a^0-1)=\infty\,(1-1)=\infty\cdot 0$$

هرگاه
$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{n} \\ n=\dfrac{1}{y} \\ n\to\infty \\ y\to\dfrac{1}{\infty} \\ y\to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[n(a^{\frac{1}{n}}-1)\right]=\lim_{y\to 0}\left[\frac{1}{y}(a^y-1)\right] =\lim_{y\to 0}\frac{a^y-1}{y}=\frac{a^0-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$2)\ \lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 - 5x + 2) = (3)^2 - 5(3) + 2$$
$$= 9 - 15 + 2 = 11 - 15 = -4$$
$$3)\ \lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$$

پس تابع مذکور در $x_0 = 3$ متمادی است.

مثال ۲: متمادیت تـابع $f(x) = \dfrac{5x+2}{x-5}$ را در نقطـه $x = 5$ تحقیـق نمایید.

$$1)\ 5 \notin Dom f(x) = IR/\{5\}$$
$$\Rightarrow f(5) = \frac{5(5)+2}{5-5} = \frac{27}{0}\ (\text{ناممکن})$$
$$2)\ \lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5}\frac{5x+2}{x-5} = \frac{27}{0} = \infty$$

در نتیجه چون $x = 5$ در ناحیه تعریف شامل نیست، بناءً تـابع در نقطـه $x = 5$ متمادی نیست.

یادداشت: هرگاه در یک تابع چند معادله‌یی لیمت دست راست و چپ آن در یک نقطه معین باهم مساوی گردد بادرنظرداشت شرایط متمادیت که قـبلاً ذکر گردید تابع در همان نقطه متمادی گفته می‌شود، یعنی:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

هرگـاه $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$ گـردد، در ایـن صـورت تـابع مـذکور $x = a$ متمادی نیست.

مثال‌ها:

مثـال ۱: متمادیـت تـابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x - 8\ , x < 3 \\ 2x^2 - 2\ , x \geq 3 \end{cases}$ را در نقطـه $x = 3$ مطالعه نمایید.

$$1)\ \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(2x^2 - 2) = 16 \\ \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x^2 + 5x - 8) = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

$$2)\ f(x) = x^2 + 5x - 8 \Rightarrow f(3) = (3)^2 + 5(3) - 8 = 16$$
$$f(x) = 2x^2 - 2 \Rightarrow f(3) = 2(3)^2 - 2 = 16$$
$$3)\ \lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$$

در نتیجه تابع در نقطه $x = 3$ متمادی می‌باشد.

مثال ۲: متمادیت تـابع $g(x) = \begin{cases} 4x - 1, x \geq 2 \\ 2 - x\ , x < 2 \end{cases}$ را در نقطـه $x = 2$ مطالعه نمایید.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+}(4x - 1) = 7 \\ \lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-}(2 - x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} g(x) \neq \lim_{x\to 2^-} g(x)$$

در نتیجه تابع فوق در نقط $x = 2$ متمادی نیست.

تمرینات فصل هفتم

با استفاده از قضایای لیمت، لیمت توابع ذیل را دریابید:

1) $\lim\limits_{x\to 20}\left(\dfrac{20}{5}\right)=?$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6.28}{\dfrac{\pi}{2}}=?$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(7x-4)=?$

4) $\lim\limits_{x\to -2}(5x^3+8x-1)=?$

5) $\lim\limits_{x\to 5}\left[+\dfrac{3}{5}(x^2+8x-10)\right]=?$

6) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left[(x^5+x)(2x^3-1)\right]=?$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4-x^5+1}{2x^3+x-1}=?$

8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-3}{x^4+x^{10}}=?$

9) $\lim\limits_{x\to 2}(8x-12)^5=?$

10) $\lim\limits_{x\to -1}\left[2(5x+4)^4\right]=?$

11) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{2x^2+5x+9}=?$

12) $\lim\limits_{x\to 3}\left[\log_5(x^3-2x^2+2x+10)\right]=?$

لیمت توابع ذیل را دریافت نمایید:

13) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^4-16}=?$

14) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^5-1}=?$

15) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x^3+125}=?$

16) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-2}{3x^3+3}=?$

17) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^5-32}=?$

18) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{3x-9}=?$

19) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2+5x-55}{3x^2-x-44}=?$

20) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+5x^2-6}{2x^3+x^2+x-4}=?$

21) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+x-10}{x^5+x^4-16}=?$

22) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{2x^4+x^3-3x-4}=?$

23) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x}-5}{2x-10}=?$

24) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}=?$

25) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}=?$

26) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4x+5}-1}{\sqrt{3-x}-2}=?$

27) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+4}-2\sqrt{2}}{\sqrt{x}-2}=?$

28) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-64}=?$

29) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{x^2-1}=?$

30) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[4]{3x+7}-2}{x-3}=?$

31) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=?$

32) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{2x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=?$

لیمت توابع ذیل را دریافت نمایید:

33) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+8x-1}{3x+x^2+2}=?$

34) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^3-1}=?$

35) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+x-1}{x^3+x^5-1}=?$

36) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+2x+1}{x^4+x-2}=?$

37) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+6x+1}{x^3+3x^2+2}=?$

38) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{-2}+3x+1}{5x^{-2}+x-8}=?$

39) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+5x^2-3x+1}}{2x^2+x-1}=?$

40) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{\sqrt{x+25x^2+1}}=?$

41) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{27x^6+6x^2+4}}{\sqrt[4]{x^8+2x^4-4}}=?$

42) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[5]{\dfrac{x^2+3x+4}{7+2x+x^2}}=?$

43) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+7+\ldots\ldots\ldots+2n-1}{3n^2+5n-1}=?$

44) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n(n+5)}{1+2+3+4+\ldots\ldots\ldots+n}=?$

لیمت توابع ذیل را دریافت نمایید:

45) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)=?$

46) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)=?$

47) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)=?$

48) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)=?$

49) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)=?$

50) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=?$

51) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+3})=?$

52) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=?$

53) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+2})=?$

54) $\lim_{x\to\infty}(2x-\sqrt{x+4x^2-1})=?$

لیمت توابع مثلثاتی ذیل را دریابید:

55) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=?$

56) $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin\frac{x}{2}}=?$

57) $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x+\tan x}=?$

58) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x+\sin x}=?$

59) $\lim_{x\to 0}\frac{3\tan 2x}{5\tan x}=?$

60) $\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 4x}{2\tan 2x}=?$

61) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}=?$

62) $\lim_{x\to 0}\frac{x+2\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=?$

63) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\sec x}=?$

64) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{4\sin^2\frac{x}{2}}=?$

65) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{2x}=?$

66) $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=?$

67) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^2\cdot\sin x}=?$

68) $\lim_{x\to 45^\circ}\frac{1-\cot x}{1-\tan x}=?$

69) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=?$

70) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1-\sin x}=?$

71) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{x-\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}-\sin x}=?$

72) $\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{x-\pi}=?$

73) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{x-\frac{\pi}{4}}=?$

74) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1-\cos x}$

لیمت توابع ذیل را دریابید:

75) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=?$

76) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}=?$

77) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x}=?$

78) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{x}=?$

79) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+x^2}{x^2}\right)^{5x+1}=?$

80) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{x}=?$

81) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{x-3}=?$

82) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=?$

83) $\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{2x}}=?$

84) $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=?$

فصل هشتم

مشتق (Derivative)

توضیح و تحلیل مـشتق در اوسـط قـرن هفـدهم توسـط عـالم انگلیـسی (اسـحاک نیـوتن) و عـالم جرمنـی لایـپ لینیـز (G.W.Leibniz) در علـم ریاضیات یک دوره پر ثمر برای علوم ساینس خصوصاً فزیک، انجنیری و غیره محسوب می‌گردد.

قبل بر این که مـشتق را تعریـف نمـاییم لازم اسـت افـزایش (تزایـد) را تحلیل نماییم.

افزایش یا تزایـد (Increment): هرگـاه تـابع $y=f(x)$ یـک تـابع متمادی باشد، اگر متحول x به اندازه Δx افزایش نماید، واضح است که تابع y نیز به اندازه Δy افزایش خواهد نمود، مثلاً: اگر یک سیم مسی نـازک بـه حرارت $t_1=15c^{\circ}$ دارای طول $L_1=80cm$ باشد، هرگـاه درجـه حـرارت بـه $t_2=50C^{\circ}$ برسد، طول سیم مـذکور بـه $L_2=81.5cm$ مـی‌رسـد، در ایـن صورت واضح است که چون حرارت به اندازه $35\ ^{\circ}C$ افـزایش نمـوده اسـت، پس سیم مذکور به اندازه $1.5cm$ افزایش خواهد نمود، یعنی:

$$\Delta t=t_2-t_1 \Rightarrow \Delta t=50C^{\circ}-15C^{\circ} \Rightarrow \Delta t=35C^{\circ}$$

$$\Delta L=L_2-L_1 \Rightarrow \Delta L=81.5cm-80cm \Rightarrow \Delta L=1.5cm$$

بناءً می‌توان افزایش یک تابع مانند y را برای متحـول x چنـین دریافـت نمود:

$$y=f(x)$$

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

مثال‌ها:

افزایش توابع ذیل را دریافت نمایید:

1- $y=2$

$$y+\Delta y=2 \Rightarrow \Delta y=2-y \Rightarrow \Delta y=2-2 \Rightarrow \Delta y=0$$

2- $y=5x$

$$\Rightarrow y+\Delta y=5(x+\Delta x) \Rightarrow \Delta y=5x+5\Delta x-y$$

$$\Rightarrow \Delta y=5x+5\Delta x-5x \Rightarrow \Delta y=5\Delta x$$

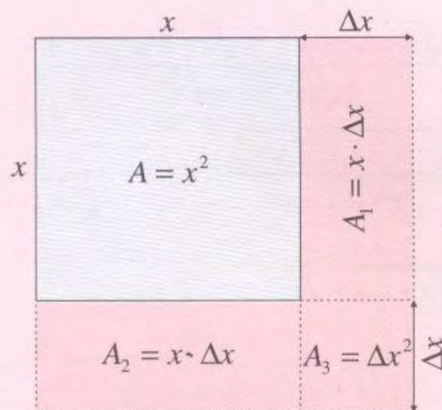
3- $y=x^2$

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2 \Rightarrow \Delta y=x^2+2x\cdot\Delta x+\Delta x^2-y$$

$$\Rightarrow \Delta y=x^2+2x\cdot\Delta x+\Delta x^2-x^2$$

$$\Rightarrow \Delta y=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2$$

افزایش مثال فوق را در شکل یک مربع عملاً مشاهده نمایید.



در نتیجه طوریکه ملاحظه می‌نمایید افزایش کـه در مربـع مـذکور در اثـر تزاید متحول x به اندازه Δx صورت گرفتـه اسـت، بـه انـدازه مـساحت‌هـای A_1 , A_2 , A_3 می‌باشد که مجموعه این مساحت‌ها عبارت است از:

$$\Delta y = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\Delta y = x \cdot \Delta x + x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

$$\Rightarrow \Delta y 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

4- $y = \dfrac{1}{x}$

$$y + \Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} \Rightarrow \Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - y \Rightarrow \Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}$$

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{x-x-\Delta x}{x^2+x\cdot\Delta x} \Rightarrow \Delta y = \frac{-\Delta x}{x^2+x\cdot\Delta x}$$

5- $y = \sqrt{x}$

$$y + \Delta y = \sqrt{x+\Delta x} \Rightarrow \Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - y$$

$$\Rightarrow \Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \Rightarrow \Delta y = \frac{x+\Delta x - x}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

6- $y = 2x^3 - x + 1$

$$\Rightarrow y + \Delta y = 2(x+\Delta x)^3 - (x+\Delta x) + 1$$

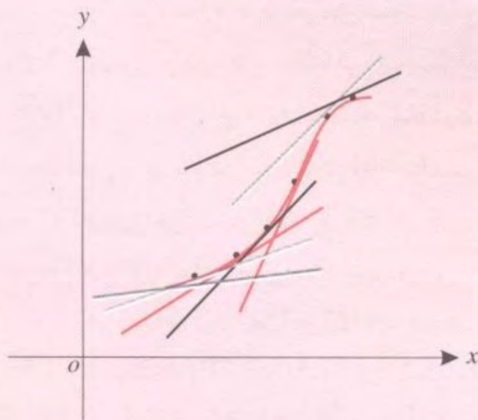
$$\Rightarrow \Delta y = 2(x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3) - x - \Delta x + 1 - y$$

$$\Rightarrow \Delta y = 2x^3 + 6x^2 \cdot \Delta x + 6x \cdot \Delta x^2 + 2\Delta x^3 - x - \Delta x + 1 - 2x^3 + x - 1$$

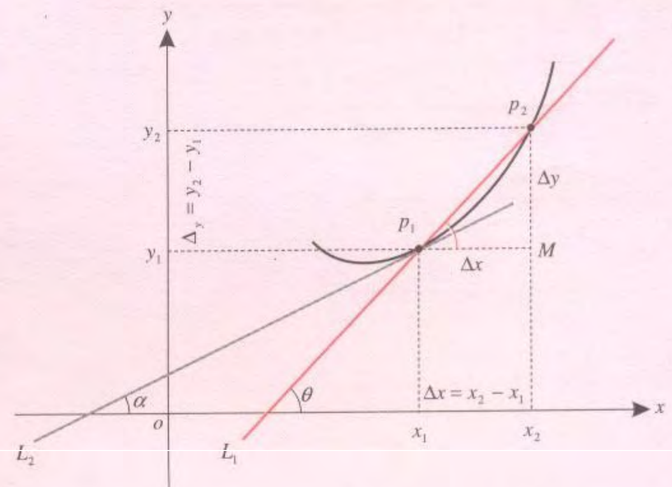
$$\Rightarrow \Delta y = 6x^2 \cdot \Delta x + 6x \cdot \Delta x^2 + 2\Delta x^3 - \Delta x$$

تعریف مشتق: به تعبیر هندسی مشتق عبـارت از میـل ممـاس در یـک نقطه معین از منحنی می‌باشد و با درنظرداشت تحلیل الجبری، مشتق عبـارت از لیمت نسبت افزایش تابع و افزایش متحول بوده زمانیکـه افـزایش متحـول بسیار کوچک گردد، طوریکه بـه طـرف صـفر تقـرب نمایـد؛ یعنـی اگـر تـابع $y = f(x)$ یک تابع متمادی باشد، پـس مـشتق ایـن تـابع عبـارت از تـابع $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ می‌باشد.

هرگاه گراف تابع $y = f(x)$ یک منحنی باشد، برای تحلیل مشخـصات این منحنی مانند تعیین مـسیر حرکـت ایـن منحنـی، تحـولات آن (انحنـای گراف)، طول منحنی، مساحت سطح که توسط این منحنی در سیستم کمیات مشخص می‌گردد و غیره ... به اصول محاسبات جدید ضرورت مـی‌باشـد کـه می‌توان به کمک مشتق مسیر حرکت منحنی و تغییرات و تحـولات آن را بـه وسیله مماس‌ها و محاسبه میل این مماس‌ها دریافت نمود.



مفهوم هندسی مشتق: هرگاه گراف تابع $y=f(x)$ دارای یک منحنی باشد و این منحنی روی سیستم کمیات وضعیه قایم قرار شـکل ذیـل تعیـین گردیده باشد:



اگر بـالای منحنـی مـذکور نقـاط $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ را در نظـر بگیریم، طوریکه خط مستقیم در حالت L_1 با منحنی در نقـاط P_1 و P_2 قـاطع باشد و به جهت مثبت محور x زاویه θ را بـسازد، در ایـن صـورت میـل خـط مستقیم مذکور عبارت است از:

$$m(L_1)=\tan\theta$$

$$m(L_1)=\frac{p_2M}{p_1M}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

هرگاه بخواهیم خط مذکور با منحنی در نقطه p_1 مماس واقع گردد، بایـد نقطه p_2 به طرف p_1 تقرب نماید $(p_2 \to p_1)$ نماید، در این صورت خط مستقیم قاطع L_1 موقعیت خویش را تغییر خواهد داد تا بالاخره خط مذکور بـه منحنی در نقطه p_1 مماس گردد و در حالت L_2 قرار می‌گیرد که در این حالت واضحاً $\Delta x \to 0$ و $\Delta y \to 0$ مـی‌نمایـد و خـط مـذکور بـه جهـت مثبـت محور x زاویه (α) را می‌سازد که میل آن عبارت است از:

$$m(L_2)=\tan\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{0}$$

که جهت رفع شکل نامعین $\left(\frac{0}{0}\right)$ لیمت تابع را می‌گیریم، در نتیجه:

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

تحلیل الجبری مشتق: چـون مـی‌دانـیم تـابع $y=f(x)$ یـک تـابع متمادی بوده، بناءً با در نظرداشت افزایش و تعریـف مـشتق مـی‌تـوان چنـین نوشت:

$$y=f(x)$$
$$\Rightarrow y+\Delta y=f(x+\Delta x) \Rightarrow \Delta y=f(x+\Delta x)-y$$
$$\Rightarrow \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) /:\Delta x$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\Rightarrow \boxed{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$$

مثال‌ها:

مشتق توابع ذیل را با در نظرداشت تحلیل الجبری مشتق، دریافت نمایید:

1- $y=2$

$$\Rightarrow y+\Delta y=2 \Rightarrow \Delta y=2-y \Rightarrow \Delta y=2-2 \Rightarrow \Delta y=0 /:\Delta x$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=0 \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0 \Rightarrow y'=0$$

2- $y=5x$

$$\Rightarrow y+\Delta y=5(x+\Delta x) \Rightarrow \Delta y=5x+5\Delta x-y$$

$$\Rightarrow \Delta y=5x+5\Delta x-5x \Rightarrow \Delta y=5\Delta x /:\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{5\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}5 \Rightarrow \boxed{y'=5}$$

3- $y=2x^3$

$$\Rightarrow y+\Delta y=2(x+\Delta x)^3$$

$$\Rightarrow \Delta y=2(x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot\Delta x^2+\Delta x^3)-y$$

$$\Rightarrow \Delta y=2x^3+6x^2\cdot\Delta x+6x\cdot\Delta x^2+2\Delta x^3-2x^3$$

$$\Rightarrow \Delta y=6x^2\cdot\Delta x+6x\cdot\Delta x^2+2\Delta x^3 /:\Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{6x^2\cdot\Delta x}{\Delta x}+\frac{6x\cdot\Delta x^2}{\Delta x}+\frac{2\Delta x^3}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}6x^2+\lim_{\Delta x\to 0}6x\cdot\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}2\Delta x^2$$

$$\Rightarrow y'=6x^2+6x\cdot(0)+2\cdot(0)^2 \Rightarrow \boxed{y'=6x^2}$$

4- $y=\frac{3}{x}$

$$\Rightarrow y+\Delta y=\frac{3}{x+\Delta x} \Rightarrow \Delta y=\frac{3}{x+\Delta x}-y$$

$$\Rightarrow \Delta y=\frac{3}{x+\Delta x}-\frac{3}{x} \Rightarrow \Delta y=\frac{3x-3(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}$$

$$\Rightarrow \Delta y=\frac{3x-3x-3\Delta x}{x^2+x\cdot\Delta x} /:\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-3\Delta x}{\Delta x(x^2+x\cdot\Delta x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3}{x^2+x\cdot\Delta x}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-3}{x^2+x\cdot 0} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{-3}{x^2}}$$

5- $y=\sqrt{5x}$

$$\Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{5(x+\Delta x)} \Rightarrow \Delta y=\sqrt{5(x+\Delta x)}-y$$

$$\Rightarrow \Delta y=\sqrt{5x+5\Delta x}-\sqrt{5x}$$

$$\Rightarrow \Delta y=\frac{(\sqrt{5x+5\Delta x}-\sqrt{5x})(\sqrt{5x+5\Delta x}+\sqrt{5x})}{(\sqrt{5x+5\Delta x}+\sqrt{5x})}$$

$$\Rightarrow \Delta y=\frac{(\sqrt{5x+5\Delta x})^2-(\sqrt{5x})^2}{\sqrt{5x+5\Delta x}+\sqrt{5x}}$$

$$\Rightarrow \Delta y=\frac{5x+5\Delta x-5x}{\sqrt{5x+5\Delta x}+\sqrt{5x}} /:\Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{5\Delta x}{\Delta x(\sqrt{5x+5\Delta x}+\sqrt{5x})}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5}{\sqrt{5x+5\Delta x}+\sqrt{5x}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{5}{\sqrt{5x}+\sqrt{5x}} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{5}{2\sqrt{5x}}}$$

مشتقات توابع الجبری (Derivative of Algebraic Functions)

حالت اول: هرگاه $y=c$ باشد، درحالیکه c یک عدد ثابت را نشان می‌دهد، پس $y'=0$ می‌باشد، یعنی:

ثبوت:

$$y=c \Rightarrow y+\Delta y=c \Rightarrow \Delta y=c-y \Rightarrow \Delta y=c-c$$

$$\Rightarrow \Delta y=0 /:\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0 \Rightarrow \boxed{y'=0}$$

حالت دوم: هرگاه $y=ax^n$ باشد، درحالیکه a, n اعداد ثابت و x متحول را نشان می دهد، پس مشتق آن عبارت از:

$$y=ax^n \Rightarrow y'=anx^{n-1}$$

ثبوت:

$$y+\Delta y=a(x+\Delta x)^n$$

$$\Delta y=a\left[x^n+nx^{n-1}\cdot\Delta x+n(n-1)x^{n-2}\cdot\Delta x^2+n(n-1)(n-2)x^{n-3}\cdot\Delta x^3+.......+\Delta x^n\right]-y$$

$$\Delta y=ax^n+anx^{n-1}\cdot\Delta x+an(n-1)x^{n-2}\cdot\Delta x^2+an(n-1)(n-2)x^{n-3}\cdot\Delta x^3+....+a\cdot\Delta x^n-ax^n$$

$$\Delta y=anx^{n-1}\cdot\Delta x+an(n-1)x^{n-2}\cdot\Delta x^2+an(n-1)(n-2)x^{n-3}\cdot\Delta x^3+........+a\,\Delta x^n\;/:\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=anx^{n-1}+an(n-1)x^{n-2}\cdot\Delta x+an(n-1)(n-2)x^{n-3}\cdot\Delta x^2+........+a\Delta x^{n-1}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}anx^{n-1}+\lim_{\Delta x\to 0}an(n-1)x^{n-2}\cdot\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}an(n-1)(n-2)x^{n-3}\cdot\Delta x^2+........+\lim_{\Delta x\to 0}a\Delta x^{n-1}$$

$$y'=anx^{n-1}+an(n-1)x^{n-2}\cdot(0)+an(n-1)(n-2)x^{n-3}\cdot(0)^2+........+a(0)^{n-1}$$

$$y'=anx^{n-1}+0+0+..........+0\Rightarrow \boxed{y'=anx^{n-1}}$$

حالت سوم: هرگاه $y=u+v+w+....$ باشد، درحالیکه $u=f(x)$، $v=g(x)$ و $w=h(x)$ توابع را ارائه نمایند، پس مشتق آن عبارت از:

$$y=u+v+w+.......\Rightarrow y'=u'+v'+w'+.......$$

ثبوت:

$$y=u+v+w+.......$$

$$\Rightarrow y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)+(w+\Delta w)+.........$$

$$\Rightarrow \Delta y=u+v+w+\Delta u+\Delta v+\Delta w+.........-y$$

$$\Rightarrow \Delta y=u+v+w+\Delta u+\Delta v+\Delta w+.........-u-v-w-........$$

$$\Rightarrow \Delta y=\Delta u+\Delta v+\Delta w+........./:\Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta w}{\Delta x}+.........$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}+.........$$

$$\Rightarrow y'=u'+v'+w'+.......$$

به همین ترتیب اگر $y=u-v-w-.......$ باشد، در این صورت مشتق آن $y'=u'-v'-w'-.......$ خواهد بود.

حالت چهارم: هرگاه $y=u\cdot v$ باشد، در حالیکه $u=f(x)$ و $v=g(x)$ توابع را ارائه می‌نماید، پس مشتق آن عبارت است از:

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

ثبوت:

$$y=u\cdot v$$

$$\Rightarrow y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$$

$$\Rightarrow \Delta y=u\cdot v+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-y$$

$$\Rightarrow \Delta y=u\cdot v+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v$$

$$\Rightarrow \Delta y=u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v/:\Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v\right)$$

$$\Rightarrow y'=u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v$$

$$\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'+u'\cdot 0\Rightarrow \boxed{y'=u'\cdot v+u\cdot v'}$$

تبصره: نظر به مفهوم هندسی مشتق وقتی $\Delta x\to 0$ نماید، پس واضحاً ملاحظه گردید که $\Delta y\to 0$ تقرب می‌نماید، چون Δv نیز افزایش یک تابع را ارائه می‌نماید، پس $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$ می‌گردد.

حالت خصوصی: هرگاه $y=c\cdot u$ باشد، درحالیکه c یک عدد ثابت و $u=f(x)$ یک تابع را ارائه نماید، پس مشتق آن عبارت از:

$$y=c\cdot u$$

$$\Rightarrow y'=c'\cdot u+c\cdot u' \Rightarrow y'=0\cdot u+c\cdot u' \Rightarrow \boxed{y'=c\cdot u'}$$

حالـــت پـــنجم: هرگـــاه $y=\dfrac{u}{v}$ باشـــد، درحالیکـــه $u=f(x)$ و $v=g(x)\neq 0$ توابع را ارائه نمایند، در این صورت مشتق آن عبارت است از:

$$y=\frac{u}{v} \quad \Rightarrow y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

ثبوت:

$$y=\frac{u}{v}$$

$$\Rightarrow y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} \Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v} \Rightarrow \Delta y=\frac{v(u+\Delta u)-u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Rightarrow \Delta y=\frac{u\cdot v+\Delta u\cdot v-u\cdot v-u\cdot\Delta v}{v^2+v\cdot\Delta v}$$

$$\Rightarrow \Delta y=\frac{\Delta u\cdot v-u\cdot\Delta v}{v^2+v\cdot\Delta v}/:\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u\cdot v-u\cdot\Delta v}{\Delta x(v^2+v\cdot\Delta v)}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(\frac{\Delta u\cdot v}{\Delta x}-\frac{u\cdot\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{v^2+v\cdot\Delta v}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{v^2+v\cdot\Delta v}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v\right)-\lim_{\Delta x\to 0}\left(u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\right]\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{v^2+v\cdot\Delta v}$$

$$\Rightarrow y'=\left(v\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{v^2+v\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v}$$

$$\Rightarrow y'=(v\cdot u'-u\cdot v')\cdot\frac{1}{v^2+v\cdot 0}$$

$$\Rightarrow y'=(v\cdot u'-u\cdot v')\cdot\frac{1}{v^2} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}}$$

حالات خصوصی

الف: هرگاه $y=\dfrac{u}{c}$ باشد، درحالیکه c یک عدد ثابت و $u=f(x)$ یک تابع را ارائه نماید، پس مشتق آن عبارت است از:

$$y=\frac{u}{c}$$

$$y'=\frac{u'\cdot c-u\cdot c'}{c^2} \Rightarrow y'=\frac{u'\cdot c-u\cdot 0}{c^2} \Rightarrow y'=\frac{u'\cdot c}{c^2} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{u'}{c}}$$

ب: هرگاه $y=\dfrac{c}{v}$ باشد، درحالیکه c یک عدد ثابت و $v=g(x)$ یک تابع را ارائه نماید، پس مشتق آن عبارت است از:

$$y=\frac{c}{v}$$

$$y'=\frac{c'\cdot v-c\cdot v'}{v^2} \Rightarrow y'=\frac{0\cdot v-c\cdot v'}{v^2} \Rightarrow y'=\frac{-c\cdot v'}{v^2}$$

حالت ششم: هرگاه $y=\sqrt{u}$ باشد، درحالیکه $u=f(x)$ یک تـابع را ارائه نماید، در این صورت مشتق آن عبارت است از:

$$y=\sqrt{u} \quad \Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

ثبوت:

$$y=\sqrt{u}$$

$$\Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{u+\Delta u} \Rightarrow \Delta y=\sqrt{u+\Delta u}-y$$

$$\Rightarrow \Delta y=\sqrt{u+\Delta u}-\sqrt{u}$$

$$\Rightarrow \Delta y=\frac{(\sqrt{u+\Delta u}-\sqrt{u})(\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u})}{(\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u})}$$

$$\Rightarrow \Delta y=\frac{(\sqrt{u+\Delta u})^2-(\sqrt{u})^2}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}$$

$$\Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u-u}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}\ /:\Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x(\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u})}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u}}$$

$$\Rightarrow y'=u'\cdot\frac{1}{\sqrt{\lim_{\Delta x\to0}(u+\Delta u)}+\sqrt{\lim_{\Delta x\to0}u}}$$

$$\Rightarrow y'=u'\cdot\frac{1}{\sqrt{u+\lim_{\Delta x\to0}\Delta u}+\sqrt{u}}\Rightarrow y'=\frac{u'}{\sqrt{u+0}+\sqrt{u}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{u'}{\sqrt{u}+\sqrt{u}}\Rightarrow \boxed{y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

حالت هفتم: هرگاه $y=au^n$ باشد، درحالیکه a و n اعداد ثابت و $u=f(x)$ یک تابع را ارائه نماید، پس مشتق آن عبارت از:

$$y=au^n\ \Rightarrow y'=anu^{n-1}\cdot u'$$

ثبوت:

$$y=au^n$$

$$\Rightarrow y+\Delta y=a(u+\Delta u)^n$$

$$\Rightarrow\Delta y=a[u^n+nu^{n-1}\cdot\Delta u+n(n-1)u^{n-2}\cdot\Delta u^2+\dots\dots+\Delta u^n]-y$$

$$\Delta y=au^n+anu^{n-1}\cdot\Delta u+an(n-1)u^{n-2}\cdot\Delta u^2$$
$$+\dots\dots+a\Delta u^n-au^n$$

$$\Delta y=anu^{n-1}\cdot\Delta u+an(n-1)u^{n-2}\cdot\Delta u^2$$
$$+\dots\dots+a\Delta u^n\ /:\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{anu^{n-1}\cdot\Delta u}{\Delta x}+\frac{an(n-1)u^{n-2}\cdot\Delta u^2}{\Delta x}+\dots\dots+\frac{a\Delta u^n}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=anu^{n-1}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+an(n-1)u^{n-2}\cdot\frac{\Delta u^2}{\Delta x}+\dots\dots+\frac{a\Delta u^n}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\left(anu^{n-1}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to0}\left[an(n-1)u^{n-2}\cdot\frac{\Delta u^2}{\Delta x}\right]$$
$$+\dots\dots+\lim_{\Delta x\to0}\frac{a\Delta u^n}{\Delta x}$$

$$y'=anu^{n-1}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+an(n-1)u^{n-2}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u^2}{\Delta x}+\dots\dots$$
$$+a\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u^n}{\Delta x}$$

$$y'=anu^{n-1}\cdot u'+an(n-1)u^{n-2}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta u\right)+\dots\dots$$
$$+a\lim_{\Delta x\to0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta u^{n-1}\right)$$

$$y'=anu^{n-1}\cdot u'+an(n-1)u^{n-2}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\Delta u+\dots\dots$$
$$+a\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\Delta u^{n-1}$$

$$y'=anu^{n-1}\cdot u'+an(n-1)u^{n-2}\cdot u'\cdot0+\dots\dots+a\cdot u'\cdot0$$

$$y'=anu^{n-1}\cdot u'+0+\dots\dots+0\Rightarrow\boxed{y'=anu^{n-1}\cdot u'}$$

همچنان به خاطر داشته باشید که حالت هفتم را به نام قاعده زنجیری نیز یاد می‌نمایند یعنی اگر $y=f(u)$ و $u=g(x)$ باشد در این صورت:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$ ویا $$\Rightarrow y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$$

$$\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

ثبوت: چون می‌دانیم که:

$$\Rightarrow \Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\Delta u /:\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$$

پس نظر به قاعده زنجیری می‌توان نتایج ذیل را نوشت:

1) $y=u^n \Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u'$

2) $y=\sqrt[n]{u} \Rightarrow y'=\dfrac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

3) $y=\sqrt[n]{u^m} \Rightarrow y'=\dfrac{m\cdot u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-m}}}$

مثال‌ها:

مشتقات توابع الجبری ذیل را دریافت نمایید.

1- $y=-7 \quad \Rightarrow y'=0$

2- $y=\dfrac{5}{8} \quad \Rightarrow y'=0$

3- $y=2\pi \Rightarrow y=2(3.14) \Rightarrow y=6.28 \quad \Rightarrow y'=0$

4- $y=\sin 90 \quad \Rightarrow y=1 \quad \Rightarrow y'=0$

5- $y=\log 1000 \Rightarrow y=3 \quad \Rightarrow y'=0$

6- $y=4x \Rightarrow y'=4\cdot 1x^{1-1} \quad \Rightarrow y'=4\cdot x^0$

$\Rightarrow y'=4\cdot 1 \quad \Rightarrow y'=4$

7- $y=-13x \quad \Rightarrow y'=-13$

8- $y=\dfrac{5}{7}x \quad \Rightarrow y'=\dfrac{5}{7}$

9- $y=5x^4 \Rightarrow y'=5\cdot 4x^{4-1} \quad \Rightarrow y'=20x^3$

10- $y=8x^{-5} \Rightarrow y'=8\cdot(-5)\cdot x^{-5-1} \quad \Rightarrow y'=-40x^{-6}$

11- $y=4x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow y'=4\cdot(\frac{5}{2})x^{\frac{5}{2}-1} \quad \Rightarrow y'=10x^{\frac{3}{2}}$

12- $y=\dfrac{-13}{x^{10}} \Rightarrow y=-13x^{-10}$

$\Rightarrow y'=(-13)(-10)x^{-10-1} \Rightarrow y'=130x^{-11} \Rightarrow y'=\dfrac{130}{x^{11}}$

13- $y=\dfrac{x^5-4x^3+1}{x^2} \Rightarrow y=\dfrac{x^5}{x^2}-\dfrac{4x^3}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}$

$\Rightarrow y=x^3-4x+x^{-2}$

$\Rightarrow y'=3x^{3-1}-4\cdot 1\cdot x^{1-1}+(-2)x^{-2-1}$

$\Rightarrow y'=3x^2-4x^0-2x^{-3} \quad \Rightarrow y'=3x^2-4-\dfrac{2}{x^3}$

14- $y=5\sqrt[3]{x^2}$

$y=5x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y'=(5)(\frac{2}{3})x^{\frac{2}{3}-1} \quad \Rightarrow y'=\dfrac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow y'=\dfrac{10}{3x^{\frac{1}{3}}} \quad \Rightarrow y'=\dfrac{10}{3\sqrt[3]{x}}$

15- $y=\dfrac{\frac{8}{x^3}}{\frac{-5}{x^2}}$

$y=\dfrac{8}{x^3}\cdot\dfrac{x^2}{-5} \Rightarrow y=-\dfrac{8}{5x} \Rightarrow y=-\dfrac{8}{5}x^{-1}$

$$\Rightarrow y'=(-\frac{8}{5})(-1)x^{-1-1} \Rightarrow y'=+\frac{8}{5}x^{-2} \quad \Rightarrow y'=\frac{8}{5x^2}$$

16- $y=8x^4-5x^{-3}+2$

$$\Rightarrow y'=(8)(4)x^{4-1}-(5)(-3)x^{-3-1}+0$$

$$\Rightarrow y'=32x^3+15x^{-4} \quad \Rightarrow y'=32x^3+\frac{15}{x^4}$$

17- میل مماس منحنی $y=3x^2+2x-1$ را در نقطه $x=2$ دریابید:

حل: چون میل مماس در یک نقطه معین از منحنی مشتق می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$y=3x^2+2x-1 \Rightarrow y'=6x+2 \quad \Rightarrow y'=m$$

$$m=6x+2 \Rightarrow m=6(2)+2 \quad \Rightarrow m=14$$

18- میل مماس منحنی $y=x^3-1$ را در $x=1$ دریابید:

$$y=x^3-1 \Rightarrow y'=3x^2 \quad \Rightarrow y'=m$$

$$m=3x^2 \Rightarrow m=3(1)^2 \quad \Rightarrow m=3$$

19- هرگاه $y=5x^3-8z^2+z+1$ باشد، در این صورت $\frac{dy}{dz}$ را دریابید:

$$y=5x^3-8z^2+z+1$$

$$\frac{dy}{dz}=0-(8)(2)z^{2-1}+1\cdot z^{1-1}+0$$

$$\frac{dy}{dz}=-16z+1\cdot z^0 \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dz}=-16z+1}$$

20- هرگاه $y=3t^2+8x^4-2t+x$ باشد، در این صورت $\frac{dy}{dx}$ را دریابید:

$$y=3t^2+8x^4-2t+x$$

$$\frac{dy}{dx}=0+(8)(4)x^{4-1}-0+1\cdot x^{1-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=32x^3+1\cdot x^0 \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=32x^3+1}$$

21- هرگاه $y=5t^3-2x^5+t^2-7x+1$ باشد، در این صورت y'_t را دریابید:

$$y=5t^3-2x^5+t^2-7x+1$$

$$\frac{dy}{dt}=y'_t=(5)(3)t^{3-1}-0+2\cdot t^{2-1}-0+0 \Rightarrow y'_t=15t^2+2t$$

22- مشتق تابع ذیل را دریابید.

$$y=(5x^3+x)(x^5-1)$$

$$u=5x^3+x \quad \Rightarrow u'=15x^2+1$$

$$v=x^5-1 \Rightarrow v'=5x^4$$

$$\Rightarrow y=u\cdot v \quad \Rightarrow y'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$\Rightarrow y'=(15x^2+1)(x^5-1)+(5x^3+x)\cdot 5x^4$$

$$\Rightarrow y'=15x^7-15x^2+x^5-1+25x^7+5x^5$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=40x^7+6x^5-15x^2-1}$$

و یا چون توابع فوق قابلیت اجرأ ضرب را دارد بناءً اولاً توابع مذکور را با هم ضرب نموده بعداً مشتق آن را دریافت می‌نماییم.

$$y=(5x^3+x)(x^5-1) \Rightarrow y=5x^8+x^6-5x^3-x$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=40x^7+6x^5-15x^2-1}$$

23- مشتق تابع ذیل را دریابید.

$$y=-4(2x^3+8x^2-5x-3)$$

$$c=-4,\ u=2x^3+8x^2-5x-3 \Rightarrow u'=6x^2+16x-5$$

$$\Rightarrow y=c\cdot u \Rightarrow y'=c\cdot u' \Rightarrow y'=-4(6x^2+16x-5)$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=-24x^2-64x+20}$$

و یا اولاً عدد ثابت را به تابع مذکور ضرب نموده بعداً مشتق آن را دریافت می‌نماییم:

$$y=-4(2x^3+8x^2-5x-3)$$

$$y=-8x^3-32x^2+20x+12 \Rightarrow \boxed{y'=-24x^2-64x+20}$$

24- مشتق تابع ذیل را دریابید.

$$y=\frac{5x+4}{3x-1}$$

$$u=5x+4 \Rightarrow u'=5$$

$$v=3x-1 \Rightarrow v'=3$$

$$\Rightarrow y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2} \Rightarrow y'=\frac{5(3x-1)-(5x+4)\cdot 3}{(3x-1)^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{15x-5-15x-12}{(3x-1)^2} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{-17}{(3x-1)^2}}$$

و یا بطور خاص برای توابع هوموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ می‌توان مشتق آن را چنین به دست آورد، مثلاً:

$$\Rightarrow y'=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{(cx+d)^2} \Rightarrow y=\frac{5x+4}{3x-1} \Rightarrow y'=\frac{5(-1)-3(4)}{(3x-1)^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-5-12}{(3x-1)^2} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{-17}{(3x-1)^2}}$$

25- مشتق تابع ذیل را دریابید.

$$y=\frac{x^3+x}{x^2-1}$$

$$u=x^3+x \Rightarrow u'=3x^2+1$$

$$v=x^2-1 \Rightarrow v'=2x$$

$$\Rightarrow y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{(3x^2+1)(x^2-1)-(x^3+x)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{3x^4-3x^2+x^2-1-2x^4-2x^2}{(x^2-1)^2} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}}$$

26- مشتق تابع ذیل را دریابید.

$$y=\frac{x^5-2x^2+1}{3}$$

$$u=x^5-2x^2+1 \Rightarrow u'=5x^4-4x$$

$$c=3$$

$$\Rightarrow y=\frac{u}{c} \Rightarrow y'=\frac{u'}{c} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{5x^4-4x}{3}}$$

27- مشتق تابع ذیل را دریابید.

$$y=\frac{+7}{x^3+5}$$

$$c=+7 \qquad \Rightarrow y'=\frac{c}{v} \Rightarrow y'=\frac{-c\cdot v'}{v^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-(+7)(3x^2)}{(x^3+5)^2} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{-21x^2}{(x^3+5)^2}}$$

28- مشتق تابع ذیل را دریابید.

$$y=\sqrt{x^3+5x+1}$$

$$u=x^3+5x+1 \Rightarrow u'=3x^2+5$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{3x^2+5}{2\sqrt{x^3+5x+1}}}$$

29- مشتق تابع ذیل را دریابید.

$$y=\sqrt{4x^3-x^2}$$

$$u=4x^3-x^2 \Rightarrow u'=12x^2-2x$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}} \Rightarrow y'=\frac{12x^2-2x}{2\sqrt{4x^3-x^2}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2(6x^2-x)}{2\sqrt{4x^3-x^2}} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{6x^2-x}{\sqrt{4x^3-x^2}}}$$

30- مشتق تابع ذیل را دریابید.

$$y=\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}$$

$$P=\frac{2x+1}{x-3}$$

$$\begin{matrix} u=2x+1 \Rightarrow u'=2 \\ v=x-3 \Rightarrow v'=1 \end{matrix} \Rightarrow P=\frac{u}{v} \Rightarrow p'=\frac{u'v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$\Rightarrow P'=\frac{2(x-3)-(2x+1)\cdot 1}{(x-3)^2} \Rightarrow P'=\frac{2x-6-2x-1}{(x-3)^2}$$

$$\Rightarrow P'=\frac{-7}{(x-3)^2} \Rightarrow y=\sqrt{P}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{P'}{2\sqrt{P}} \Rightarrow y'=\frac{\frac{-7}{(x-3)^2}}{2\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{-7\sqrt{x-3}}{2(x-3)^2\cdot\sqrt{2x+1}}}$$

31- مشتق تابع ذیل را دریابید.

$$y=-12(x^{10}-x^{-10})^5$$

$$u=x^{10}-x^{-10} \Rightarrow u'=10x^9+10x^{-11}$$

$$y=-12u^5 \Rightarrow y'=-60u^4\cdot u'$$

$$\Rightarrow y'=-60(x^{10}-x^{-10})^4\cdot(10x^9+10x^{-11})$$

$$\Rightarrow y'=(-600x^9-600x^{-11})(x^{10}-x^{-10})^4$$

32- مشتق تابع ذیل را دریابید.

$$y=\frac{5}{(x^3+5x)^7}$$

$$\Rightarrow y=\frac{5}{(x^3+5x)^7} \Rightarrow y=5(x^3+5x)^{-7}$$

$$u=x^3+5x \Rightarrow u'=3x^2+5 \Rightarrow y=5u^{-7} \Rightarrow y'=-35u^{-8}\cdot u'$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-35\cdot u'}{u^8} \Rightarrow y'=\frac{-35\,(3x^2+5)}{(x^3+5x)^8}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{-105x^2-175}{(x^3+5x)^8}}$$

33- مشتق تابع ذیل را دریابید.

$$y=2\sqrt[3]{(x^2+2)^2}$$

$$\Rightarrow y=2\,(x^2+2)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow u=x^2+2 \Rightarrow u'=2x$$

$$\Rightarrow y=2u^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y'=\frac{4}{3}u^{-\frac{1}{3}}\cdot u' \Rightarrow y'=\frac{4\cdot u'}{3u^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow y'=\frac{4\cdot u'}{3\sqrt[3]{u^1}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{4\cdot 2x}{3\sqrt[3]{(x^2+2)^1}} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{8x}{3\sqrt[3]{x^2+2}}}$$

یادداشت: می‌توان مثال فوق را با استفاده از شکل عمومی ذیل نیز حل نمود:

$$y=a\cdot\sqrt[n]{u^m}$$

$$y=a\cdot u^{\frac{m}{n}} \Rightarrow y'=a\cdot\frac{m}{n}u^{\frac{m-n}{n}}\cdot u'$$

$$\Rightarrow y'=\frac{a\cdot m\cdot u'}{n\cdot u^{\frac{n-m}{n}}} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{a\cdot m\cdot u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-m}}}}$$

34- مشتق‌های توابع ذیل را دریابید.

1- $y=2\cdot\sqrt[3]{(x^2+2)^2}$

$$\Rightarrow u=x^2+2 \Rightarrow u'=2x$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2\cdot 2\cdot 2x}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2+2)^{3-2}}} \Rightarrow y'=\frac{8x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2+2}}$$

2- $y=9\cdot\sqrt[7]{(x^3+x)^5}$

$$u=x^3+x \Rightarrow u'=3x^2+1$$

$$y'=\frac{9\cdot 5(3x^2+1)}{7\cdot\sqrt[7]{(x^3+x)^2}} \Rightarrow y'=\frac{45(3x^2+1)}{7\cdot\sqrt[7]{(x^3+x)^2}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{135x^2+45}{7\cdot\sqrt[7]{(x^3+x)^2}}$$

مشتق تابع ذیل را دریابید.

3- $y=5\cdot\sqrt[8]{(x^5+3)^3}$

$$u=x^5+3 \Rightarrow u'=5x^4$$

$$y'=\frac{5\cdot 3(5x^4)}{8\cdot\sqrt[8]{(x^5+3)^5}} \Rightarrow y'=\frac{75x^4}{8\cdot\sqrt[8]{(x^5+3)^5}}$$

مشتقات توابع مثلثاتی (Derivative of Trigonometrical Function)

I- هرگاه $y=\sin x$ باشد، پس مشتق آن عبارت است از: $y'=\cos x$

ثبوت: $y=\sin x$

$$\Rightarrow y+\Delta y=\sin(x+\Delta x) \Rightarrow \Delta y=\sin(x+\Delta x)-y$$

$$\Rightarrow \Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$$

با استفاده از فورمول‌های ضرب در مثلثات، می‌توان چنین نوشت:

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta y=2\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2} /:\Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{2\cdot\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Rightarrow y'=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Rightarrow y'=\cos\frac{2x+0}{2}\cdot 1 \Rightarrow y'=\cos\frac{2x}{2} \Rightarrow \boxed{y'=\cos x}$$

به همین ترتیب هرگاه $y=\sin u$ درحالیکه $u=f(x)$ پس مشتق آن عبارت است از:

$$y'=u'\cdot\cos u$$

ثبوت:

$$y=\sin u$$

$$\Rightarrow y+\Delta y=\sin(u+\Delta u)\Rightarrow\Delta y=\sin(u+\Delta u)-y$$

$$\Rightarrow\Delta y=\sin(u+\Delta u)-\sin u$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\Rightarrow\Delta y=2\cos\frac{u+\Delta u+u}{2}\cdot\sin\frac{u+\Delta u-u}{2}/:\Delta u$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{2\cos\frac{2u+\Delta u}{2}\cdot\sin\frac{\Delta u}{2}}{\Delta u}$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{2\cos\frac{2u+\Delta u}{2}\cdot\sin\frac{\Delta u}{2}}{2\cdot\frac{\Delta u}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta u}=\cos\frac{2u+\Delta u}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}}$$

$$\Rightarrow\lim_{\Delta u\to0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to0}\cos\frac{2u+\Delta u}{2}\cdot\lim_{\Delta u\to0}\frac{\sin\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{du}=\cos\frac{2u+0}{2}\cdot1\Rightarrow\frac{dy}{du}=\cos\frac{2u}{2}$$

چون:

$$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{du}$$

ویا:

$$\Rightarrow\frac{dy}{du}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{du}{dx}}\quad\Rightarrow\frac{dy}{du}=\cos u$$

$$\frac{dy}{du}=\cos u$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{du}{dx}}=\cos u\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\cos u\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow y'=\cos u\cdot u'\Rightarrow\boxed{y'=u'\cdot\cos u}$$

II – هرگاه $y=\cos x$ باشد،پس مشتق آن عبارت است از: $y'=-\sin x$

ثبوت:

$$y=\cos x$$

$$\Rightarrow y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)\Rightarrow\Delta y=\cos(x+\Delta x)-y$$

$$\Rightarrow\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x$$

با استفاده از فورمول‌های ضرب در مثلثات، می‌توان چنین نوشت:

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\Rightarrow\Delta y=-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}$$

$$\Rightarrow\Delta y=-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}/:\Delta x$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{2\cdot\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Rightarrow y'=-\sin\frac{2x+0}{2}\cdot 1\Rightarrow y'=-\sin\frac{2x}{2}\Rightarrow \boxed{y'=-\sin x}$$

به همین ترتیب هرگاه $y=\cos u$ باشـد، در حالیکـه $u=f(x)$ یـک تابع را ارائه نماید، پس مشتق آن عبارت است از: $y'=-u'\cdot\sin u$

ثبوت:

$$y=\cos u$$

$$\Rightarrow y+\Delta y=\cos(u+\Delta u)\Rightarrow \Delta y=\cos(u+\Delta u)-y$$

$$\Rightarrow \Delta y=\cos(u+\Delta u)-\cos u$$

$$\therefore \cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta y=-2\sin\frac{u+\Delta u+u}{2}\cdot\sin\frac{u+\Delta u-u}{2}\ /:\Delta u$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{-2\sin\frac{2u+\Delta u}{2}\cdot\sin\frac{\Delta u}{2}}{\Delta u}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{-2\sin\frac{2u+\Delta u}{2}\cdot\sin\frac{\Delta u}{2}}{2\cdot\frac{\Delta u}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u}=-\sin\frac{2u+\Delta u}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=-\lim_{\Delta u\to 0}\sin\frac{2u+\Delta u}{2}\cdot\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{du}=-\sin\frac{2u+0}{2}\cdot 1\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{du}{dx}}=-\sin\frac{2u}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{u'}=-\sin u\Rightarrow y'=-\sin u\cdot u'\Rightarrow \boxed{y'=-u'\cdot\sin u}$$

III- هرگاه $y=\tan x$ باشد، پس مشتق آن عبارت است از: $y'=\sec^2 x$

ثبوت:

$$y=\tan x\Rightarrow y=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\left.\begin{array}{l}u=\sin x\Rightarrow u'=\cos x\\ v=\cos x\Rightarrow v'=-\sin x\end{array}\right\}\Rightarrow y=\frac{u}{v}\Rightarrow y'=\frac{u'v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\Rightarrow y'=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow \boxed{y'=\sec^2 x}$$

به همین ترتیب هرگاه $y=\tan u$ باشد، درحالیکه $u=f(x)$ یک تابع را ارائه می‌نمایند، پس مشتق آن عبارت است از: $y'=u'\cdot\sec^2 u$

ثبوت:

$$y=\tan u\Rightarrow y=\frac{\sin u}{\cos u}$$

$$\left.\begin{array}{l}p=\sin u\Rightarrow p'=\cos u\\ t=\cos u\Rightarrow t'=-\sin u\end{array}\right\}\Rightarrow y=\frac{p}{t}\Rightarrow \frac{dy}{du}=\frac{p't-p\cdot t'}{t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{du}=\frac{\cos u\cdot\cos u-\sin u(-\sin u)}{\cos^2 u}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{du}=\frac{\cos^2 u+\sin^2 u}{\cos^2 u}\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{du}{dx}}=\frac{1}{\cos^2 u}$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{u'}=\sec^2 u \Rightarrow \boxed{y'=u'\cdot\sec^2 u}$$

IV- هرگاه $y=\cot x$ باشد، پس مشتق آن عبارت است از:

$$y'=-\csc^2 x$$

ثبوت:

$$y=\cot x \Rightarrow y=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=\cos x \Rightarrow u'=-\sin x \\ v=\sin x \Rightarrow v'=\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{u}{v}\Rightarrow y'=\frac{u'v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{(-\sin x)(\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=-\csc^2 x}$$

به همین ترتیب هرگاه $y=\cot u$ باشد در حالیکه $u=f(x)$ یک تابع را ارائه می‌نماید، پس مشتق آن عبارت است از: $y=-u'\cdot\csc^2 u$

V- هرگاه $y=\sec x$ باشد، پس مشتق آن عبارت است از:

$$y'=\sec x\cdot\tan x$$

ثبوت:

$$y=\sec x \Rightarrow y=\frac{1}{\cos x}$$

$$\left.\begin{array}{l} v=\cos x \Rightarrow v'=-\sin x \\ c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{c}{v}\Rightarrow y'=\frac{-c\cdot v'}{v^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-1\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\sec x\cdot\tan x$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\sec x\cdot\tan x}$$

به همین ترتیب هرگاه $y=\sec u$ باشد، درحالیکه $u=f(x)$ یک تابع را ارائه می‌نماید، پس مشتق آن عبارت از: $y'=u'\cdot\sec u\cdot\tan u$

VI- هرگاه $y=\csc x$ باشد، پس مشتق آن عبارت است از:

$$y'=-\csc x\cdot\cot x$$

ثبوت:

$$y=\csc x \Rightarrow y=\frac{1}{\sin x}$$

$$\left.\begin{array}{l} c=1 \\ v=\sin x \Rightarrow v'=\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{c}{v}\Rightarrow y'=\frac{-c\cdot v'}{v^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-1\cdot\cos x}{\sin^2 x}\Rightarrow y'=\frac{-1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\Rightarrow \boxed{y'=-\csc x\cdot\cot x}$$

به همین ترتیب هرگاه $y=\csc u$ باشد، در حالیکه $u=f(x)$ یک تابع را ارائه می‌نماید، پس مشتق آن عبارت است از:

$$y'=-u'\cdot\csc u\cdot\cot u$$

مثال‌ها:

مشتقات توابع مثلثاتی ذیل را دریابید:

1- $y=2\sin\frac{3\pi}{4}$

$y'=0$

2- $y=\sin(x^3+1)$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^3+1 \\ u'=3x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\sin u \Rightarrow y'=u'\cdot\cos u$$

$$\Rightarrow y'=3x^2\cdot\cos(x^3+1)$$

3- $y=2\sin\sqrt{x}$

8- $y=\frac{-4}{\sin^3 x} \Rightarrow y=-4\sin^{-3} x$

$\left.\begin{array}{l} u=\sin x \\ u'=\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow y=-4u^{-3} \Rightarrow y'=12u^{-4}\cdot u'$

$\Rightarrow y'=12(\sin x)^{-4}\cdot\cos x \Rightarrow \boxed{y'=\frac{12\cos x}{\sin^4 x}}$

9- $y=\sin x\cdot\cos x$

$\left.\begin{array}{l} u=\sin x \Rightarrow u'=\cos x \\ v=\cos x \Rightarrow v'=-\sin x \end{array}\right\} \Rightarrow y=u\cdot v \Rightarrow y'=u'v+u\cdot v'$

$\Rightarrow y'=\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot(-\sin x) \Rightarrow y'=\cos^2 x-\sin^2 x$

$\Rightarrow \boxed{y'=\cos 2x}$

حل به طریقه دوم: $y=\sin x\cdot\cos x$

$y=\frac{1}{2}\cdot 2\sin x\cdot\cos x \Rightarrow y=\frac{1}{2}\sin 2x$

$\left.\begin{array}{l} u=2x \\ u'=2 \end{array}\right\} y=\frac{1}{2}\sin u \Rightarrow y'=\frac{1}{2}\cdot u'\cdot\cos u$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos 2x \Rightarrow \boxed{y'=\cos 2x}$

10- $y=\sin^2 x+\cos^2 x$

رابطه اساسی مثلثاتی: $\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\Rightarrow y=1 \Rightarrow \boxed{y'=0}$

11- $y=5\cos(x^3+x^2-1)$

$\left.\begin{array}{l} u=x^3+x^2-1 \\ u'=3x^2+2x \end{array}\right\} y=5\cos u \Rightarrow y'=5(-u'\cdot\sin u)$

$\Rightarrow y'=-5(3x^2+2x)\cdot\sin(x^3+x^2-1)$

$\Rightarrow \boxed{y'=(-15x^2-10x)\cdot\sin(x^3+x^2-1)}$

$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{x} \\ u'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow y=2\sin u \Rightarrow y'=2u'\cdot\cos u$

$\Rightarrow y'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$

4- $y=\sqrt{\sin x}$

$\left.\begin{array}{l} u=\sin x \\ u'=\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}$

5- $y=x^2\cdot\sin x$

$\left.\begin{array}{l} u=x^2 \Rightarrow u'=2x \\ v=\sin x \Rightarrow v'=\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow y=u\cdot v \Rightarrow y'=u'\cdot v+u\cdot v'$

$\Rightarrow y'=2x\cdot\sin x+x^2\cdot\cos x \Rightarrow \boxed{y'=x(2\cdot\sin x+x\cdot\cos x)}$

6- $y=\frac{3x^5}{\sin x}$

$\left.\begin{array}{l} u=3x^5 \Rightarrow u'=15x^4 \\ v=\sin x \Rightarrow v'=\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-u\cdot v'}{v^2}$

$\Rightarrow y'=\frac{15x^4\cdot\sin x-3x^5\cdot\cos x}{\sin^2 x}$

$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{3x^4(5\cdot\sin x-x\cdot\cos x)}{\sin^2 x}}$

7- $y=2\sin^5 x$

$\left.\begin{array}{l} u=\sin x \\ u'=\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow y=2u^5 \Rightarrow y'=10u^4\cdot u'$

$\Rightarrow y'=10(\sin x)^4\cdot\cos x \Rightarrow \boxed{y'=10\cdot\cos x\cdot\sin^4 x}$

12- $y = x^3 \cdot \cos x$

$$\left.\begin{array}{l} u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = \cos x \Rightarrow v' = -\sin x \end{array}\right\} y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + u \cdot v'$$

$$y' = 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cdot (-\sin x)$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = x^2 (3 \cdot \cos x - x \cdot \sin x)}$$

13- $y = \cos(\sin x)$

$$\left.\begin{array}{l} u = \sin x \\ u' = \cos x \end{array}\right\} \Rightarrow y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \cdot \sin u$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = -\cos x \cdot \sin(\sin x)}$$

14- $y = \sqrt[5]{\cos^3 x}$

$$y = \cos^{\frac{3}{5}} x$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \cos x \\ u' = -\sin x \end{array}\right\} \Rightarrow y = u^{\frac{3}{5}} \Rightarrow y' = \frac{3}{5} u^{-\frac{2}{5}} \cdot u' \Rightarrow y' = \frac{3u'}{5u^{\frac{2}{5}}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3u'}{5\sqrt[5]{u^2}} \Rightarrow y' = \frac{3(-\sin x)}{5 \cdot \sqrt[5]{\cos^2 x}} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{-3\sin x}{5 \cdot \sqrt[5]{\cos^2 x}}}$$

15- $y = 2\cos^5(1 - x^2)$

$$\left.\begin{array}{l} u = 1 - x^2 \\ u' = -2x \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2\cos^5 u$$

$$\left.\begin{array}{l} p = \cos u \\ p' = -u' \cdot \sin u \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2p^5 \Rightarrow y' = 10p^4 \cdot p'$$

$$\Rightarrow y' = 10 \cdot \cos^4 u \cdot (-u' \cdot \sin u)$$

$$\Rightarrow y' = -10 \cdot u' \cdot \sin u \cdot \cos^4 u$$

$$\Rightarrow y' = -10 \cdot (-2x) \cdot \sin(1 - x^2) \cdot \cos^4(1 - x^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = 20x \cdot \sin(1 - x^2) \cdot \cos^4(1 - x^2)}$$

16- $y = 3\tan(2x^4 - x)$

$$\left.\begin{array}{l} u = 2x^4 - x \\ u' = 8x^3 - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 3\tan u \Rightarrow y' = 3u' \cdot \sec^2 u$$

$$\Rightarrow y' = 3(8x^3 - 1) \cdot \sec^2(2x^4 - x)$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = (24x^3 - 3) \cdot \sec^2(2x^4 - x)}$$

17- $y = -4\tan^4 x$

$$\left.\begin{array}{l} u = \tan x \\ u' = \sec^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow y = -4u^4 \Rightarrow y' = -16u^3 \cdot u'$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = -16\tan^3 x \cdot \sec^2 x}$$

و یا

$$y' = -16 \cdot \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{-16 \cdot \sin^3 x}{\cos^5 x}}$$

18- $y = \dfrac{3\tan x}{2x^5}$

$$\left.\begin{array}{l} u = 3\tan x \Rightarrow u' = 3\sec^2 x \\ v = 2x^5 \Rightarrow v' = 10x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3\sec^2 x \cdot 2x^5 - 3\tan x \cdot 10x^4}{(2x^5)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{6x^4(x \cdot \sec^2 x - 5\tan x)}{4x^{10}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3(x \cdot \sec^2 x - 5\tan x)}{2x^6} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{3x \cdot \sec^2 x - 15\tan x}{2x^6}}$$

19- $y = 12\sqrt{\tan x}$

$$\left.\begin{array}{l} u = \tan x \\ u' = \sec^2 x \end{array}\right\} y = 12\sqrt{u} \Rightarrow y' = 12 \cdot \frac{u'}{2\sqrt{u}} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{6\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}}$$

20- $y = x^3 \cdot \tan^2 x$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^3 \Rightarrow u'=3x^2 \\ v=\tan^2 x \Rightarrow v'=2\tan x\cdot \sec^2 x \end{array}\right\} y=u\cdot v \Rightarrow y'=u'v+u\cdot v'$$

$$\Rightarrow y'=3x^2\cdot\tan^2 x+x^3\cdot 2\tan x\cdot\sec^2 x$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=x^2\cdot\tan x(3\tan x+2x\cdot\sec^2 x)}$$

21- $y=\dfrac{\tan x}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} u=\tan x \Rightarrow u'=\sec^2 x \\ v=x \Rightarrow v'=1 \end{array}\right\} y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{\sec^2 x\cdot x-\tan x\cdot 1}{x^2} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{x\cdot\sec^2 x-\tan x}{x^2}}$$

22- $y=\cos x\cdot\tan x$

$$\Rightarrow y=\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y=\sin x \Rightarrow \boxed{y'=\cos x}$$

23- $y=2\tan 3x\cdot\cot 3x$

$$y=2\tan 3x\cdot\frac{1}{\tan 3x} \Rightarrow y=2 \Rightarrow \boxed{y'=0}$$

24- $y=15\tan^3(x^3-2)$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^3-2 \\ u'=3x^2 \end{array}\right\} y=15\tan^3 u$$

$$\left.\begin{array}{l} p=\tan u \\ p'=u'\cdot\sec^2 u \end{array}\right\} y=15p^3 \Rightarrow y'=45p^2\cdot p'$$

$$\Rightarrow y'=45\tan^2 u\cdot u'\cdot\sec^2 u \Rightarrow y'=45u'\cdot\tan^2 u\cdot\sec^2 u$$

$$\Rightarrow y'=45\cdot 3x^2\cdot\tan^2(x^3-2)\cdot\sec^2(x^3-2)$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=135x^2\cdot\tan^2(x^3-2)\cdot\sec^2(x^3-2)}$$

ویا $y'=135x^2\cdot\dfrac{\sin^2(x^3-2)}{\cos^2(x^3-2)}\cdot\dfrac{1}{\cos^2(x^3-2)}$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{135x^2\cdot\sin^2(x^3-2)}{\cos^4(x^3-2)}}$$

25- $y=3\cot(2x^5-3x+1)$

$$\left.\begin{array}{l} u=2x^5-3x+1 \\ u'=10x^4-3 \end{array}\right\} y=3\cot u \Rightarrow y'=3(-u'\cdot\csc^2 u)$$

$$\Rightarrow y'=-3u'\cdot\csc^2 u \Rightarrow y'=-3(10x^4-3)\cdot\csc^2(2x^5-3x+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=(9-30x^4)\cdot\csc^2(2x^5-3x+1)}$$

26- $y=(5x^2-1)\cdot\cot x^3$

$$\left.\begin{array}{l} u=5x^2-1 \Rightarrow u=10x \\ v=\cot x^3 \Rightarrow v=-3x^2\cdot\csc^2 x^3 \end{array}\right\} y=u\cdot v \Rightarrow y'=u'v+u\cdot v'$$

$$\Rightarrow y'=10x\cdot\cot x^3+(5x^2-1)\cdot(-3x^2\cdot\csc^2 x^3)$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=10x\cdot\cot x^3-15x^4-3x^2)\cdot\csc^2 x^3}$$

27- $y=-7\cot^5 x$

$$\left.\begin{array}{l} u=\cot x \\ u'=-\csc^2 x \end{array}\right\} y=-7u^5 \Rightarrow y'=-35u^4\cdot u'$$

$$\Rightarrow y'=-35(-\csc^2 x)\cdot\cot^4 x \Rightarrow \boxed{y'=+35\csc^2 x\cdot\cot^4 x}$$

28- $y=3\cdot\sqrt[3]{\cot x}$

$$y=3\cdot\cot^{\frac{1}{3}} x$$

$$\left.\begin{array}{l} u=\cot x \\ u'=-\csc^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow y=3u^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y'=u^{-\frac{2}{3}}\cdot u' \Rightarrow y'=\frac{u'}{\sqrt[3]{u^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{-\csc^2 x}{\sqrt[3]{\cot^2 x}}}$$

29- $y=\cot(\sin x)$

34- $y=3x^5\cdot\sec x$

$$\left.\begin{array}{l}u=3x^5\Rightarrow u'=15x^4\\ v=\sec x\Rightarrow v'=\sec x\cdot\tan x\end{array}\right\}\Rightarrow y=u\cdot v$$

$\Rightarrow y'=u'v+u\cdot v'$

$\Rightarrow y'=15x^4\cdot\sec x+3x^5\cdot\sec x\cdot\tan x$

$\Rightarrow \boxed{y'=3x^4\cdot\sec x(5+x\cdot\tan x)}$

35- $y=\dfrac{-4x}{\sec x}$

$$\left.\begin{array}{l}u=-4x\Rightarrow u'=-4\\ v=\sec x\Rightarrow v'=\sec x\cdot\tan x\end{array}\right\} y=\frac{u}{v}\Rightarrow y'=\frac{u'v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{(-4)(\sec x)-(-4x)\cdot\sec x\cdot\tan x}{\sec^2 x}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{\sec x\,(-4+4x\cdot\tan x)}{\sec^2 x}\Rightarrow \boxed{y'=\frac{4x\cdot\tan x-4}{\sec x}}$$

36- $y=\csc(x^3-2)$

$$\left.\begin{array}{l}u=x^3-2\\ u'=3x^2\end{array}\right\} y=\csc u\Rightarrow y'=-u'\cdot\csc u\cdot\cot u$$

$\Rightarrow \boxed{y'=-3x^2\cdot\csc(x^3-2)\cdot\cot(x^3-2)}$

37- $y=-2\csc^5 x$

$$\left.\begin{array}{l}u=\csc x\\ u'=-\csc x\cdot\cot x\end{array}\right\} y=-2u^5\Rightarrow y'=-10u^4\cdot u'$$

$\Rightarrow y'=-10\cdot\csc^4 x\cdot(-\csc x\cdot\cot x)$

$\Rightarrow \boxed{y'=+10\csc^5 x\cdot\cot x}$

38- $y=\csc\sqrt{8x^3}$

$$\left.\begin{array}{l}u=\sin x\\ u'=\cos x\end{array}\right\} y=\cot u\Rightarrow y'=-u'\cdot\csc^2 u$$

$\Rightarrow \boxed{y'=-\cos x\cdot\csc^2(\sin x)}$

30- $y=\sec(12x^3-x+4)$

$$\left.\begin{array}{l}u=12x^3-x+4\\ u'=36x^2-x\end{array}\right\} y=\sec u\Rightarrow y'=u'\cdot\sec u\cdot\tan u$$

$\Rightarrow \boxed{y'=(36x^2-x)\cdot\sec(12x^3-x+4)\cdot\tan(12x^3-x+4)}$

31- $y=-5\sec^4 x^2$

$$\left.\begin{array}{l}u=\sec x^2\\ u'=2x\cdot\sec x^2\cdot\tan x^2\end{array}\right\} y=-5u^4\Rightarrow y'=-20u^3\cdot u'$$

$\Rightarrow y'=-20\cdot\sec^3 x^2\cdot 2x\cdot\sec x^2\cdot\tan x^2$

$\Rightarrow \boxed{y'=-40\cdot\sec^4 x^2\cdot\tan x^2}$

32- $y=\sec\sqrt{x^3+5x}$

$$\left.\begin{array}{l}u=\sqrt{x^3+5x}\\ u=\dfrac{3x^2+5}{2\sqrt{x^3+5x}}\end{array}\right\} y=\sec u\Rightarrow y'=u'\cdot\sec u\cdot\tan u$$

$$\Rightarrow y'=\frac{3x^2+5}{2\sqrt{x^3+5x}}\cdot\sec\sqrt{x^3+5x}\cdot\tan\sqrt{x^3+5x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{(3x^2+5)\cdot\sec\sqrt{x^3+5x}\cdot\tan\sqrt{x^3+5x}}{2\sqrt{x^3+5x}}}$$

33- $y=\sin 2x\cdot\sec 2x$

$$y=\sin 2x\cdot\frac{1}{\cos 2x}\Rightarrow y=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\Rightarrow y=\tan 2x$$

$\Rightarrow \boxed{y'=2\sec^2 2x}$

$$u=\sqrt{8x^3}$$
$$u=\frac{24x^2}{2\sqrt{8x^3}}=\frac{12x^2}{2x\sqrt{2x}}=\frac{6x}{\sqrt{2x}}\Bigg\}\Rightarrow y=\csc u$$
$$\Rightarrow y'=-u'\cdot\csc u\cdot\cot u$$
$$\Rightarrow \boxed{y'=-\frac{6x}{\sqrt{2x}}\cdot\csc\sqrt{8x^3}\cdot\cot\sqrt{8x^3}}$$

39- $y=\dfrac{\csc x}{8x^3-5}$

$$\left.\begin{array}{l}u=\csc x\Rightarrow u'=-\csc x\cdot\cot x\\ v=8x^3-5\Rightarrow v'=24x^2\end{array}\right\} y=\frac{u}{v}\Rightarrow y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$
$$\Rightarrow y'=\frac{-\csc x\cdot\cot x\cdot(8x^3-5)-\csc x\cdot 24x^2}{(8x^3-5)^2}$$
$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{(5-8x^3)\cdot\csc x\cdot\cot x-24x^2\cdot\csc x}{(8x^3-5)^2}}$$

40- $y=\csc\sqrt{\cos x}$

$$\left.\begin{array}{l}u=\sqrt{\cos x}\\ u'=\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\end{array}\right\} y=\csc u\Rightarrow y'=-u'\cdot\csc u\cdot\cot u$$
$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\cdot\csc\sqrt{\cos x}\cdot\cot\sqrt{\cos x}}$$

مشتقات توابع ضمنی

هرگاه متحول‌های x و y توسط رابطه $y=f(x)$ بـا همـدیگر مربـوط باشند در این صورت y تابع صریح از متحول x است، ولی اگر ارتباط بین x و y به وسیله رابطه $f(x,y)=0$ تعیین گـردد در ایـن صـورت y یـک تـابع ضمنی از x می‌باشد، مانند $2xy^2-5y+2=0$ یک تابع غیر صـریح بـوده که جهت مشتق‌گیری آن اگر از جنس x مشتق بگیریم y را به حیث یک عدد ثابت فرض نموده و اگر از جنس y مشتق بگیریم x را به حیث عدد ثابـت در نظر می‌گیریم و یا می‌توان با استفاده از رابطه ذیـل مـشتق ضـمنی آن را بـه دست آورد: $y'_{(x)}=-\dfrac{f'(x)}{f'(y)}$

مثال‌ها:

مثال ۱: مشتقات ضمنی ذیل را دریابید:

$$2xy^2-5y+2=0$$
$$\Rightarrow(2xy^2-5y+2)'=0\Rightarrow 2\cdot1\cdot y^2+2x\cdot2y\cdot y'-5\cdot y'+0=0$$
$$2y^2+4xy\cdot y'-5y'=0\Rightarrow 2y^2=5y'-4xy\cdot y'$$
$$2y^2=y'(5-4xy)\Rightarrow y'=\frac{2y^2}{5-4xy}$$

ویا:

$$2xy^2-5y+2=0$$
$$f'(x)=2y^2-0+0\Rightarrow f'(x)=2y^2$$
$$f'(y)=4xy-5$$
$$\Rightarrow y'_{(x)}=\frac{-f'(x)}{f'(y)}=-\frac{2y^2}{4xy-5}\Rightarrow y'_{(x)}=\frac{2y^2}{5-4xy}$$

مثال ۲: مشتق ضمنی $2x^2-xy+5y^2-1=0$ را دریافت نمایید:

$$\left.\begin{array}{l}f'(x)=4x-y\\ f'(y)=-x+10y\end{array}\right.\Rightarrow y'_{(x)}=\frac{-f'(x)}{f'(y)}=-\frac{4x-y}{-x+10y}=\frac{y-4x}{10y-x}$$

ویا می‌توان چنین عمل نمود.

$$2x^2-xy+5y^2-1=0$$
$$4x\cdot dx-(dx\cdot y+x\cdot dy)+10y\cdot dy-0=0$$
$$4x\cdot dx-y\cdot dx-x\cdot dy+10y\cdot dy=0$$

$$(4x-y)\,dx+(10y-x)\,dy=0$$

$$(10y-x)dy=-(4x-y)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-(4x-y)}{10y-x}$$

$$\Rightarrow y'_{(x)}=\frac{y-4x}{10y-x}$$

مثال ۳: مشتق ضمنی $2x^2-3y^2=2x+2y$ را دریابید و میل مماس آن را در نقطه $p(1,2)$ دریافت نمایید.

$$\Rightarrow 2x^2-3y^2-2x-2y=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=4x-0-2 \Rightarrow f'(x)=4x-2 \\ f'(y)=0-6y-0-2 \Rightarrow f'(y)=-6y-2 \end{array}\right\} y'_{(x)}=-\frac{f'(x)}{f'(y)}$$

$$y'_{(x)}=\frac{-(4x-2)}{-6y-2} \Rightarrow y'_{(x)}=\frac{4x-2}{6y-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \because\ y'_{(x)}=m \\ p(1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow m=\frac{4(1)-2}{6(2)-2}=\frac{4-2}{12-2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5} \Rightarrow m=\frac{1}{5}$$

مثال ۴: در رابطه $x^2+y^2=4$ مشتق دوم $y''_{(x)}$ را دریابید:

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow x^2+y^2-4=0$$

$$\begin{array}{l} f'(x)=2x+0-0=2x \\ f'(y)=0+2y-0=2y \end{array} \Rightarrow y'_{(x)}=-\frac{f'(x)}{f'(y)}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow y'_{(x)}=-\frac{x}{y} \Rightarrow y''_{(x)}=-\frac{(x')\cdot y-x\cdot y'}{y^2}=-\frac{1\cdot y-x\cdot(-\frac{x}{y})}{y^2}$$

$$y''_{(x)}=-\frac{y+\frac{x^2}{y}}{y^2}=-\frac{\frac{y^2+x^2}{y}}{y^2}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}=-\frac{4}{y^3}$$

$$\Rightarrow y''_{(x)}=-\frac{4}{y^3}$$

مثال ۵: مشتق ضمنی رابطه $y\cdot\sin x+x\cdot\cos y=1$ را دریابید:

$$y\cdot\sin x+x\cdot\cos y=1 \Rightarrow y\cdot\sin x+x\cdot\cos y-1=0$$

$$\Rightarrow y'\cdot\sin x+y\cdot(\sin x)'+x'\cdot\cos y+x\cdot(\cos y)'-0=0$$

$$dy\cdot\sin x+y\cdot\cos x\cdot dx+dx\cdot\cos y+x\cdot(-\sin y)\cdot dy=0$$

$$dy\cdot\sin x-x\cdot\sin y\cdot dy=-y\cdot\cos x\cdot dx-dx\cdot\cos y$$

$$\Rightarrow dy(\sin x-x\cdot\sin y)=(-y\cdot\cos x-\cos y)dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y\cdot\cos x+\cos y}{\sin x-x\cdot\sin y} \Rightarrow \boxed{y'_{(x)}=-\frac{y\cdot\cos x+\cos y}{\sin x-x\cdot\sin y}}$$

مشتقات توابع لوگارتمی (Derivative of Logarithmical Function)

جهت دریافت مشتقات توابع لوگارتمی قضیه ذیل را در نظر می‌گیریم:

قضیه: هرگاه $y=\log_a x$ باشد، در این صورت مشتق آن $y'=\frac{1}{x}\cdot\log_a e$ می‌باشد.

Proof: $y=\log_a x$

$$y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x) \Rightarrow \Delta y=\log_a(x+\Delta x)-y$$

$$\Rightarrow \Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x$$

$$\Delta y=\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)/:\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right]$$

$$\Rightarrow y'=\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right]$$

$$y=\frac{\Delta x}{x}\Rightarrow \Delta x=x\cdot y$$
$$\left.\begin{array}{l}\Delta x\to 0\\ y\to 0\end{array}\right\} y'=\log_a\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{x\cdot y}}\right]$$

$$\Rightarrow y'=\log_a\left\{\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{\frac{1}{x}}\right\}$$

$$\Rightarrow y'=\log_a(e)^{\frac{1}{x}}\Rightarrow \boxed{y'=\frac{1}{x}\log_a e} \text{ ویا } \Rightarrow \boxed{y'=\frac{1}{x\cdot\ln a}}$$

نتیجه: با استفاده از قضیه فوق می‌توان چنین نوشت:

هرگاه $y=\ln x$ باشد، در این صورت مشتق آن عبارت از:

$$y=\ln x\Rightarrow y=\log_e x$$

$$y'=\frac{1}{x}\cdot\log_e e\Rightarrow y'=\frac{1}{x}$$

به همین ترتیب هرگاه $u=f(x)$ یک تابع را ارائه نماید، پس داریم که:

1- $y=\log_a u\Rightarrow y'=\frac{u'}{u}\cdot\log_a e$ و یا $\Rightarrow y'=\frac{u'}{u\cdot\ln a}$

2- $y=\ln u\Rightarrow y'=\frac{u'}{u}$

مشتق توابع نمایی (اکسپوننشیل)
(Derivative of Exponentialcal Function)

جهت دریافت مشتق توابع نمایی می‌توان با استفاده از تعریف مشتق یا استفاده از مشتق معکوس تابع و یا مشتق‌گیری به کمک لوگارتم عمل نمود که ساده‌ترین طریقه آن اخذ لوگارتم طبیعی از اطراف مساوات و بعداً مشتق‌گیری از اطراف مساوات می‌توان قرار ذیل به نتیجه مطلوب رسید.

I- هرگاه $y=e^x$ باشد، پس مشتق آن عبارت از:

$$y=e^x$$
$$\ln y=\ln e^x$$
$$\ln y=x\cdot\ln e\Rightarrow \ln y=x$$
$$\frac{y'}{y}=1\Rightarrow y'=y\Rightarrow \boxed{y'=e^x}$$

به همین ترتیب هرگاه $y=e^u$ باشد، درحالیکه $u=f(x)$ یک تابع را ارائه می‌نماید، پس مشتق آن عبارت است از:

$$\ln y=\ln e^u\Rightarrow \ln y=u\cdot\ln e\Rightarrow \ln y=u$$
$$\frac{y'}{y}=u'\Rightarrow y'=u'\cdot y\Rightarrow \boxed{y'=u'\cdot e^u}$$

II- هرگاه $y=a^x$ باشد، پس مشتق آن عبارت است از:

$$y=a^x$$
$$\ln y=\ln a^x\Rightarrow \ln y=x\cdot\ln a$$
$$\frac{y'}{y}=1\cdot\ln a\Rightarrow y'=y\cdot\ln a\Rightarrow \boxed{y'=a^x\cdot\ln a}$$

به همین ترتیب هرگاه $y=a^u$ باشد، درحالیکه $u=f(x)$ یک تابع را ارائه می‌نماید، پس مشتق آن عبارت است از:

$$y=a^u$$
$$\ln y=\ln a^u$$
$$\ln y=u\cdot\ln a\Rightarrow \frac{y'}{y}=u'\cdot\ln a\Rightarrow y'=u'\cdot y\cdot\ln a$$
$$\Rightarrow \boxed{y'=u'\cdot a^u\cdot\ln a}$$

III- هرگاه $y=u^u$ باشد درحالیکه $u=f(x)$ یک تابع را ارائه می‌نماید، پس مشتق آن عبارت است از:

$$y=u^u$$

3- $y=\log^2 x$

$$\left.\begin{array}{l} u=\log x \\ u=\frac{1}{x}\cdot \log e \end{array}\right\} y=u^2 \Rightarrow y'=2u\cdot u' \Rightarrow y'=2\log x\cdot \frac{1}{x}\log e$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{2}{x}\log x\cdot \log e}$$

4- $y=\log_5 (x^5+x)^3$

$$\left.\begin{array}{l} u=(x^5+x)^3 \\ u'=3(x^5+x)^2\cdot(5x^4+1) \Rightarrow u'=(15x^4+3)(x^5+x)^2 \\ a=5 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow y=\log_a u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u\cdot \ln a} \text{ یا } \Rightarrow y'=\frac{u'}{u}\cdot \log_a e$$

$$\Rightarrow y'=\frac{(15x^4+3)(x^5+x)^2}{(x^5+x)^3\cdot \ln 5} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{15x^4+3}{(x^5+x)\cdot \ln 5}}$$

$$\text{ویا} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{15x^4+3}{x^5+x}\cdot \log_5 e}$$

5- $y=\sqrt{\log_3 x}$

$$\left.\begin{array}{l} u=\log_3 x \\ u'=\frac{1}{x\cdot \ln 3} \end{array}\right\} y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}} \Rightarrow y'=\frac{\frac{1}{x\cdot \ln 3}}{2\sqrt{\log_3 x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{1}{2x\cdot \sqrt{\log_3 x}}\cdot \log_3 e}$$

6- $y=\ln(5x^4-x+4)$

$$\left.\begin{array}{l} u=5x^4-x+4 \\ u'=20x^3-1 \end{array}\right\} y=\ln u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{20x^3-1}{5x^4-x+4}}$$

$$\ln y=\ln u^u \Rightarrow \ln y=u\cdot \ln u$$

$$\frac{y'}{y}=u'\cdot \ln u+u\cdot \frac{u'}{u} \Rightarrow y'=y\cdot u'(1+\ln u)$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=u'\cdot u^u(1+\ln u)}$$

IV- هرگاه $y=u^v$ درحالیکه $u=f(x)$ و $v=g(x)$ توابع را ارائه نمایند، پس مشتق آن عبارت است از:

$$y=u^v$$

$$\ln y=\ln u^v \Rightarrow \ln y=v\cdot \ln u$$

$$\frac{y'}{y}=v'\cdot \ln u+v\cdot \frac{u'}{u} \Rightarrow y'=y(v'\cdot \ln u+\frac{u'\cdot v}{u})$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=u^v(v'\cdot \ln u+\frac{u'\cdot v}{u})}$$

مثال‌ها:

مشتقات توابع ذیل را دریابید:

1- $y=\log_2(x^3+1)$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^3+1 \\ u'=3x^2 \\ a=2 \end{array}\right\} y=\log_a u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u\cdot \ln a} \text{ یا } \Rightarrow y'=\frac{u'}{u}\cdot \log_a e$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{3x^2}{(x^3+1)\ln 2}} \text{ و یا } \boxed{y'=\frac{3x^2}{x^3+1}\cdot \log_2 e}$$

2- $y=\log\sqrt{x}$

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{x} \\ u=\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ a=10 \end{array}\right\} y=\log_a u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u\cdot \ln a} \Rightarrow y'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\cdot \ln 10}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{1}{2x\cdot \ln 10}} \text{ ویا } \boxed{y'=\frac{1}{2x}\cdot \log e}$$

7- $y=\sin x\cdot \ln x$

$$\left.\begin{array}{l} u=\sin x \Rightarrow u'=\cos x \\ v=\ln x \Rightarrow v'=\dfrac{1}{x} \end{array}\right\} y=u\cdot v \Rightarrow y'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\cos x\cdot \ln x+\frac{\sin x}{x}}$$

8- $y=5x^4\cdot \ln x^2$

$$\left.\begin{array}{l} u=5x^4 \Rightarrow u'=20x^3 \\ v=\ln x^2 \Rightarrow v=2\ln x \Rightarrow v'=2\cdot\dfrac{1}{x} \Rightarrow v'=\dfrac{2}{x} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow y=u\cdot v \Rightarrow y'=u'\cdot v+u\cdot v' \Rightarrow y'=20x^3\cdot \ln x^2+5x^4\cdot\frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow y'=10x^3(2\ln x^2+1) \Rightarrow \boxed{y'=10x^3(\ln x^4+1)}$$

9- $y=\dfrac{\cos x}{\ln x}$

$$\left.\begin{array}{l} u=\cos x \Rightarrow u'=-\sin x \\ v=\ln x \Rightarrow v'=\dfrac{1}{x} \end{array}\right\} y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{(-\sin x)(\ln x)-\cos x\cdot\dfrac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{\dfrac{-x\cdot\sin x\cdot\ln x-\cos x}{x}}{\ln^2 x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{-x\cdot\sin x\cdot\ln x-\cos x}{x\cdot\ln^2 x}}$$

10- $y=\ln(\sin x)$

$$\left.\begin{array}{l} u=\sin x \\ u'=\cos x \end{array}\right\} y=\ln u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u} \Rightarrow y'=\frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \boxed{y'=\cot x}$$

11- $y=5\ln^3(x^4-2x)$

$p=\ln(x^4-2x)$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^4-2x \\ u'=4x^3-2 \end{array}\right\} p=\ln u \Rightarrow p'=\frac{u'}{u} \Rightarrow p'=\frac{4x^3-2}{x^4-2x}$$

$$\Rightarrow y=5p^3 \Rightarrow y'=15p^2\cdot p' \Rightarrow y'=15\ln^2(x^4-2)\cdot\frac{4x^3-2}{x^4-2x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{(60x^3-30)\cdot\ln^2(x^4-2)}{x^4-2x}}$$

12- $y=e^{5x+1}$

$$\left.\begin{array}{l} u=5x+1 \\ u'=5 \end{array}\right\} y=e^u \Rightarrow y'=u'\cdot e^u \Rightarrow \boxed{y'=5\cdot e^{5x+1}}$$

13- $y=e^{\cos x}$

$$\left.\begin{array}{l} u=\cos x \\ u'=-\sin x \end{array}\right\} y=e^u \Rightarrow y'=u'\cdot e^u \Rightarrow \boxed{y'=-\sin x\cdot e^{\cos x}}$$

14- $y=e^{3x^2+\sin x}$

$$\left.\begin{array}{l} u=3x^2+\sin x \\ u'=6x+\cos x \end{array}\right\} y=e^u \Rightarrow y'=u'\cdot e^u$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=(6x+\cos x)\cdot e^{3x^2+\sin x}}$$

15- $y=e^{\ln x^3}$

$$\left.\begin{array}{l} u=\ln x^3 \Rightarrow u=3\ln x \\ u'=3\cdot\dfrac{1}{x} \Rightarrow u'=\dfrac{3}{x} \end{array}\right\}$$

$$y=e^u \Rightarrow y'=u'\cdot e^u \Rightarrow \boxed{y'=\frac{3}{x}\cdot e^{\ln x^3}}$$

16- $y=e^x\cdot\cos^2 x$

$$\left.\begin{aligned} &u=e^x \Rightarrow u=e^x \\ &v=\cos^2 x \Rightarrow v'=2\cos x\cdot(-\sin x) \\ &v'=-2\sin x\cdot\cos x \Rightarrow v'=-\sin 2x \end{aligned}\right\}$$

$$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$\Rightarrow y'=e^x\cdot\cos^2 x+e^x\cdot(-\sin 2x)$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=e^x(\cos^2 x-\sin 2x)}$$

17- $y=2^{5x^4+8x-1}$

$$\left.\begin{aligned} &u=5x^4+8x-1 \\ &u'=20x^3+8 \\ &a=2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &y=a^u \Rightarrow y'=u'\cdot a^u\cdot\ln a \\ &\Rightarrow \boxed{y'=(20x^3+8)\cdot 2^{5x^4+8x-1}\cdot\ln 2} \end{aligned}$$

می‌توان توابع نمایی فوق را به کمک لوگارتم طبیعی نیز چنین مشتق گرفت:

و یا $y=2^{5x^4+8x-1}$

$$\ln y=\ln 2^{5x^4+8x-1}$$

$$\ln y=(5x^4+8x-1)\cdot\ln 2$$

$$\frac{y'}{y}=(20x^3+8)\cdot\ln 2 \Rightarrow y'=y\cdot(20x^3+8)\cdot\ln 2$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=2^{5x^4+8-1}\cdot(20x^3+8)\cdot\ln 2}$$

18- $y=3^{\tan x}$

$$\left.\begin{aligned} &u=\tan x \\ &u'=\sec^2 x \\ &a=3 \end{aligned}\right\} y=a^u \Rightarrow y'=u'\cdot a^u\cdot\ln a$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\sec^2 x\cdot 3^{\tan x}\cdot\ln 3}$$

و یا $y=3^{\tan x}$

$$\ln y=\ln 3^{\tan x} \Rightarrow \ln y=\tan x\cdot\ln 3$$

$$\frac{y'}{y}=\sec^2 x\cdot\ln 3 \Rightarrow y'=y\cdot\sec^2 x\cdot\ln 3$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\sec^2 x\cdot 3^{\tan x}\cdot\ln 3}$$

19- $y=5^{\ln x}$

$$\left.\begin{aligned} &u=\ln x \\ &u'=\frac{1}{x} \\ &a=5 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &y=a^u \Rightarrow y'=u'\cdot a^u\cdot\ln a \\ &\Rightarrow \boxed{y'=\frac{1}{x}\cdot 5^{\ln x}\cdot\ln 5} \end{aligned}$$

و یا $y=5^{\ln x}$

$$\ln y=\ln 5^{\ln x} \Rightarrow \ln y=\ln x\cdot\ln 5$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}\cdot\ln 5 \Rightarrow y'=y\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln 5 \Rightarrow \boxed{y'=\frac{1}{x}\cdot 5^{\ln x}\cdot\ln 5}$$

20- $y=x^x$

$$\ln y=\ln x^x \Rightarrow \ln y=x\cdot\ln x$$

$$\left.\begin{aligned} &u=x \Rightarrow u'=1 \\ &v=\ln x \Rightarrow v'=\frac{1}{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ln y=u\cdot v$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=u'\cdot v+u\cdot v' \Rightarrow y'=y\,(u'\cdot v+u\cdot v')$$

$$\Rightarrow y'=x^x\,(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}) \Rightarrow \boxed{y'=x^x\,(1+\ln x)}$$

21- $y=(\sin x)^{x^2}$

$$\ln y=\ln(\sin x)^{x^2} \Rightarrow \ln y=x^2\cdot\ln(\sin x)$$

$$u=x^2 \Rightarrow u'=2x$$
$$v=\ln(\sin x) \Rightarrow v'=\frac{(\sin x)'}{\sin x}$$
$$v'=\frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow v'=\cot x$$

$$\Rightarrow \ln y=u\cdot v \Rightarrow \frac{y'}{y}=u'\cdot v+u\cdot v' \Rightarrow y'=y\,(u'\cdot v+u\cdot v')$$

$$\Rightarrow y'=(\sin x)^{x^2}\left[2x\cdot\ln(\sin x)+x^2\cdot\cot x\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=x\cdot(\sin x)^{x^2}\left[\ln(\sin^2 x)+x^2\cdot\cot x\right]}$$

22- $y=(\tan x)^{\cos x}$

$$\ln y=\ln(\tan x)^{\cos x} \Rightarrow \ln y=\cos x\cdot\ln(\tan x)$$

$$u=\cos x \Rightarrow u'=-\sin x$$
$$v=\ln(\tan x) \Rightarrow v'=\frac{(\tan x)'}{\tan x} \Rightarrow v'=\frac{\sec^2 x}{\tan x}$$
$$v'=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} \Rightarrow v'=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow v'=\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}$$

$$\Rightarrow \ln y=u\cdot v \Rightarrow \frac{y'}{y}=u'\cdot v+u\cdot v' \Rightarrow y'=y\,(u'\cdot v+u\cdot v')$$

$$\Rightarrow y'=(\tan x)^{\cos x}\left[(-\sin x)\cdot\ln(\tan x)+\cos x\cdot\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}\right]$$

$$\Rightarrow y'=(\tan x)^{\cos x}\left[-\sin x\cdot\ln(\tan x)+\frac{1}{\sin x})\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=(\tan x)^{\cos x}\left[\csc x-\sin x\cdot\ln(\tan x)\right]}$$

یادداشت: با استفاده از لوگارتم طبیعی می‌توان توابع مغلق را نیز بسیار به ساده‌گی مشتق‌گیری نمود.

مثال‌ها:

1- $y=\frac{x^3+5x-1}{x^5+1}$

$$\ln y=\ln\frac{x^3+5x-1}{x^5+1} \Rightarrow \ln y=\ln(x^3+5x-1)-\ln(x^5+1)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{(x^3+5x-1)'}{x^3+5x-1}-\frac{(x^5+1)'}{x^5+1}$$

$$\Rightarrow y'=y\cdot\frac{3x^2+5}{x^3+5x-1}-\frac{5x^4}{x^5+1}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{x^3+5x-1}{x^5+1}\cdot\frac{(3x^2+5)(x^5+1)-5x^4(x^3+5x-1)}{(x^3+5x-1)(x^5+1)}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{3x^7+3x^2+5x^5+5-5x^7-25x^5+5x^4}{(x^5+1)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{-2x^7-20x^5+5x^4+3x^2+5}{(x^5+1)^2}}$$

2- $y=(x^7-2x)^8\cdot(x^3-1)^{10}$

$$\ln y=\ln\left[(x^7-2x)^8\cdot(x^3-1)^{10}\right]$$
$$\Rightarrow \ln y=\ln(x^7-2x)^8+\ln(x^3-1)^{10}$$
$$\Rightarrow \ln y=8\ln(x^7-2x)+10\ln(x^3-1)$$
$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=8\cdot\frac{(x^7-2x)'}{x^7-2x}+10\cdot\frac{(x^3-1)'}{x^3-1}$$
$$\Rightarrow y'=y\left[8\cdot\frac{7x^6-2}{x^7-2x}+10\cdot\frac{3x^2}{x^3-1}\right]$$
$$\Rightarrow y'=(x^7-2x)^8\cdot(x^3-1)^{10}\left[\frac{8(7x^6-2)(x^3-1)+10\cdot 3x^2(x^7-2x)}{(x^7-2x)(x^3-1)}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=(x^7-2x)^7\cdot(x^3-1)^9\ (86x^9-56x^6-76x^3+16)}$$

3- $y=\sqrt[5]{\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^3}$

$$\ln y=\ln\sqrt[5]{\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^3}\Rightarrow \ln y=\frac{3}{5}\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$$

$$\Rightarrow \ln y=\frac{3}{5}\left[\ln(2x-1)-\ln(x-1)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{3}{5}\left[\frac{(2x-1)'}{2x-1}-\frac{(x-1)'}{x-1}\right]$$

$$\Rightarrow y'=\frac{3}{5}y\left[\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x-1}\right]$$

$$\Rightarrow y'=\frac{3}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^3}\left[\frac{-1}{(2x-1)(x-1)}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{-3}{10x^2-15x+5}\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^3}}$$

مشتقات توابع معکوس مثلثاتی
(Derivative of Inverted Trigonometrical Function)

جهت دریافت مشتقات توابع معکوس مثلثاتی با استفاده از مشتق گیری به کمک توابع مثلثاتی می‌توان در حالت ذیل عمل نمود:

I- هرگاه $y=arc\ \sin x$ باشد، پس $x=\sin y$ خواهد بود که مشتق آن عبارت از:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Proof: $x=\sin y$

$$\frac{dx}{dy}=\cos y\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos y}$$

$$\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\Rightarrow\boxed{y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

به همین ترتیب هرگاه $y=arc\ \sin u$ باشد، درحالیکه $u=f(x)$ یک تابع را ارائه نماید، پس مشتق آن عبارت از:

$$y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

II- هرگاه $y=arc\ \cos x$ باشد، پس $x=\cos y$ خواهد بود که مشتق آن عبارت از:

$$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Proof: $x=\cos y$

$$\frac{dx}{dy}=-\sin y\Rightarrow\frac{dx}{dy}=-\sqrt{1-\cos^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}\Rightarrow\boxed{y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

به همین ترتیب هرگاه $y=arc\ \cos u$ باشد، درحالیکه $u=f(x)$ یک تابع را ارائه نماید پس مشتق آن عبارت است از:

$$y'=-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

III- هرگاه $y=arc\ \tan x$ باشد، پس $x=\tan y$ خواهد بود که مشتق آن عبارت است از:

$$y'=\frac{1}{1+x^2}$$

ثبوت:

$x=\tan y$

$$\frac{dx}{dy}=\sec^2 y\Rightarrow\frac{dx}{dy}=1+\tan^2 y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\tan^2 y} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{1}{1+x^2}}$$

به همین ترتیب هرگاه $y=arc\ \tan u$ باشد، درحالیکه $u=f(x)$ یک تابع را ارائه نماید، پس مشتق آن عبارت است از:

$$y'=\frac{u'}{1+u^2}$$

IV- هرگاه $y=arc\ \cot x$ باشد، پس $x=\cot y$ خواهد که مشتق آن عبارت است از:

$$y'=\frac{-1}{1+x^2}$$

Proof: $x=\cot y$

$$\frac{dx}{dy}=-\csc^2 x \Rightarrow \frac{dx}{dy}=-(1+\cot^2 x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+\cot^2 x} \Rightarrow \boxed{y'=-\frac{1}{1+x^2}}$$

به همین ترتیب هرگاه $y=arc\ \cot u$ باشد، درحالیکه $u=f(x)$ یک تابع را ارائه نماید، پس مشتق آن عبارت است از:

$$y'=\frac{-u'}{1+u^2}$$

V- هرگاه $y=arc\ \sec x$ باشد، پس $x=\sec y$ خواهد بود که مشتق آن عبارت است از:

$$y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Proof: $x=\sec y$

$$\frac{dx}{dy}=\sec y\cdot\tan y \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\sec y\cdot\sqrt{\sec^2 y-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec y\cdot\sqrt{\sec^2 y-1}} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

به همین ترتیب هرگاه $y=arc\ \sec u$ باشد درحالیکه $u=f(x)$ یک تابع را ارائه نماید، پس مشتق آن عبارت است از:

$$y'=\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

VI- هرگاه $y=arc\ \csc x$ باشد، پس $x=\csc y$ خواهد بود که مشتق آن عبارت است از:

$$y'=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Proof: $x=\csc y$

$$\frac{dx}{dy}=-\csc y\cdot\cot y \Rightarrow \frac{dx}{dy}=-\csc y\cdot\sqrt{\csc^2 y-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\csc y\cdot\sqrt{\csc^2 y-1}} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{-1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}}$$

به همین ترتیب هرگاه $y=arc\ \csc u$ باشد درحالیکه $u=f(x)$ یک تابع را ارائه نماید، پس مشتق آن عبارت است از:

$$y'=\frac{-u'}{u\cdot\sqrt{u^2-1}}$$

مثال‌ها:

مشتقات توابع معکوس مثلثاتی ذیل را دریافت نماید.

1- $y=arc\ \sin(2x^3)$

$$u=2x^3 \Rightarrow u'=6x^2$$

$$\Rightarrow y=arc\ \sin u \Rightarrow y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{6x^2}{\sqrt{1-4x^6}}}$$

2- $y=3(arc\ \sin x)^3$

$$u=arc\sin x \Rightarrow u'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y=3u^3 \Rightarrow y'=9u^2\cdot u' \Rightarrow y'=9(arc\ \sin x)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}}{1+x^2-3} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{x}{(x^2-2)\sqrt{x^2-3}}}$$

6- $y=(arc\ \tan x^2)^5$

$u=arc\ \tan x^2$

$$\left.\begin{matrix} p=x^2 \\ p'=2x \end{matrix}\right\} u=arc\tan p \Rightarrow u'=\frac{p'}{1+p^2} \Rightarrow u'=\frac{2x}{1+x^4}$$

$\Rightarrow y=u^5 \Rightarrow y'=5u^4\cdot u'$

$$\Rightarrow y'=5(arc\ \tan x^2)^4\cdot\frac{2x}{1+x^4} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{10x(arc\ \tan x^2)^4}{1+x^4}}$$

7- $y=-4arc\ \cot(5x^7-1)$

$$\left.\begin{matrix} u=5x^7-1 \\ u'=35x^6 \end{matrix}\right\} y=-4arc\ \cot u$$

$$\Rightarrow y'=-4\cdot\frac{-u'}{1+u^2} \Rightarrow y'=\frac{4(35x^6)}{1+(5x^7-1)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{140x^6}{25x^4-10x^7+2}}$$

8- $y=x^2\cdot arc\ \cos x$

$$\left.\begin{matrix} u=x^2 \Rightarrow u'=2x \\ v=arc\ \cos x \Rightarrow v'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=u\cdot v$$

$$\Rightarrow y'=u'\cdot v+u\cdot v' \Rightarrow y'=2x\cdot arc\ \cos x+x^2\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=x\left(2arc\ \cos x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{9(arc\ \sin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}}$$

3- $y=5arc\ \cos\sqrt{x}$

$$u=\sqrt{x} \Rightarrow u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y=5arc\ \cos u \Rightarrow y'=5\cdot\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-5\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow y'=\frac{-5}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{-5}{2\sqrt{x-x^2}}}$$

4- $y=-2arc\ \cos(x^3-x)$

$u=x^3-x \Rightarrow u'=3x^2-1$

$$\Rightarrow y=-2arc\ \cos u \Rightarrow y'=-2\cdot\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2u'}{\sqrt{1-u^2}} \Rightarrow y'=\frac{2(3x^2-1)}{\sqrt{1-(x^3-x)^2}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{6x^2-2}{\sqrt{1-x^6+2x^4+x^2}} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{6x^2-2}{\sqrt{-x^6+2x^4+x^2+1}}}$$

5- $y=arc\ \tan\sqrt{x^2-3}$

$$u=\sqrt{x^2-3} \Rightarrow u'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}} \Rightarrow u'=\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}$$

$$\Rightarrow y=arc\ \tan u \Rightarrow y'=\frac{u'}{1+u^2}$$

9- $y = arc\ \sin(\cos x)$

$$\left.\begin{array}{l} u=\cos x \\ u'=-\sin x \end{array}\right\} y=arc\ \sin u \Rightarrow y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \Rightarrow y'=\frac{-\sin x}{\sin x} \Rightarrow \boxed{y'=-1}$$

10- $f(x)=arc\ \sin(\sqrt{\sin x})$

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{\sin x} \\ u'=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \end{array}\right\} f(x)=arc\ \sin u \Rightarrow f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{\sqrt{1-\sin x}} \Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}}$$

11- $y=arc\ \cos(\ln x)$

$$\left.\begin{array}{l} u=\ln x \\ u'=\dfrac{1}{x} \end{array}\right\} y=arc\ \cos u \Rightarrow y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \Rightarrow y'=\frac{-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{-1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}}$$

12- $y=e^{arc\ \tan x}$

$$\left.\begin{array}{l} u=arc\ \tan x \\ u'=\dfrac{1}{1+x^2} \end{array}\right\} y=e^u \Rightarrow y'=u'\cdot e^u$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{1+x^2}\cdot e^{arc\ \tan x} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{e^{arc\ \tan x}}{1+x^2}}$$

13- $y=arc\ \tan\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} u=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \\ u'=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array}\right\} y=arc\tan u \Rightarrow y'=\frac{u'}{1+u^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}{1+(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2})^2} \Rightarrow y'=\frac{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}{1+\dfrac{(e^x-e^{-x})^2}{4}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}{\dfrac{4+(e^x-e^{-x})^2}{4}} \Rightarrow y'=\frac{2(e^x+e^{-x})}{4+(e^x-e^{-x})^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2(e^x+e^{-x})}{4+e^{2x}-2\cdot e^x\cdot e^{-x}+e^{-2x}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2(e^x+e^{-x})}{e^{2x}+2+e^{-2x}}=\frac{2(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{2}{e^x+e^{-x}}}$$

14- $y=(x)^{arc\ \sec x}$

$$\ln y=\ln(x)^{arc\ \sec x} \Rightarrow \ln y=arc\ \sec x\cdot\ln x$$

$$\left.\begin{array}{l} u=arc\sec x \Rightarrow u'=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \\ v=\ln x \Rightarrow v'=\dfrac{1}{x} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \ln y=u\cdot v \Rightarrow \frac{y'}{y}=u'\cdot v+u\cdot v' \Rightarrow y'=y(u'\cdot v+u\cdot v')$$

$$\Rightarrow y'=(x)^{arc\ \sec x}\left(\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln x+arc\ \sec x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=(x)^{arc\sec x}\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}+\frac{arc\sec x}{x}\right)}$$

15- $y=e^x\cdot arc\sec x$

$$\left.\begin{array}{l} u=e^x \Rightarrow u'=e^x \\ v=arc\sec x \Rightarrow v'=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right\} y=u\cdot v \Rightarrow y'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$\Rightarrow y'=e^x\cdot arc\sec x+e^x\cdot\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=e^x\left(arc\sec x+\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right)}$$

16- $y=arc\csc(x^3-5)$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^3-5 \\ u'=3x^2 \end{array}\right\} y=arc\csc u$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}} \Rightarrow y'=\frac{-3x^2}{(x^3-5)\sqrt{(x^3-5)^2-1}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-3x^2}{(x^3-5)\sqrt{x^6-10x^3+25-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{-3x^2}{(x^3-5)\sqrt{x^6-10x^3+24}}}$$

17- $y=arc\sec\sqrt{x+1}$

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{x+1} \\ u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \end{array}\right\} y=arc\sec u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+1-1}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{1}{(2x+2)\sqrt{x}}}$$

18- $y=(arc\csc x)^8$

$$\left.\begin{array}{l} u=arc\csc x \\ u'=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right\} y=u^8 \Rightarrow y'=8u^7\cdot u'$$

$$\Rightarrow y'=8(arc\csc x)^7\cdot\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{-8(arc\csc x)^7}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

19- $y=\sqrt{arc\csc x}$

$$\left.\begin{array}{l} u=arc\csc x \\ u'=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right\} y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}} \Rightarrow y'=\frac{\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}}{2\sqrt{arc\csc x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{-1}{2x\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{arc\csc x}}}$$

20- $y=arc\sec(e^x)$

$$\left.\begin{array}{l} u=e^x \\ u'=e^x \end{array}\right\} y=arc\sec u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{e^x}{e^x\sqrt{e^{2x}-1}} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}}$$

مشتقات متوالی توابع (مشتقات مراتب بالاتر)
(Derivative of Deffirent Orders)

هرگاه تابع $y=f(x)$ یک تـابع متمـادی و قابـل اشـتقاق باشـد چـون مشتق آن تابع بحیث تابع جدید می‌تواند قابل مشتق‌گیری باشد، پس مـشتق، مشتق تابع مذکور را مشتق مرتبه دوم آن مـی‌نامنـد. بـه هـیمن ترتیـب تـابع مذکور را بعضاً چندین مرتبه و حتی بی‌نهایت مراتبه شاید بتوان مشتق گرفت که مشتقات متوالی چنین ارائه می‌گردند:

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

$$y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y'''=f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$y^{(4)}=f^{(4)}(x)=\frac{d^4y}{dx^4}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$$

قابل یادآوری است که اگر یک تـابع پولینـومیلی درجـه (n) باشـد، پـس $f^{(n+1)}(x)=0$ می‌باشد.

مثال‌ها:

مشتقات ذیل را دریافت نمایید.

مثال ۱: مشتق سوم تابع $y=5x^4+8x^2-1$ را دریابید.

$$y'=20x^3+16x$$

$$y''=60x^2+16$$

$$y'''=120x$$

مثال ۲: مشتق هفتم تابع $y=3x^2-2x^6-2x+1$ را دریابید.

حل: چون تـابع مـذکور درجـه (6) مـی‌باشـد، پـس: $y^{(6+1)}=0$ زیرا $y^{(7)}=0$

$$y'=6x-12x^5-2$$

$$y''=6-60x^4$$

$$y'''=-240x^3$$

$$y^{(4)}=-720x^2$$

$$y^{(5)}=-1440x$$

$$y^{(6)}=-1440$$

$$y^{(7)}=0$$

مثال ۳: مشتق سوم تابع $y=\frac{2}{3x^2}$ را دریابید:

$$y=\frac{2}{3x^2}\Rightarrow y=\frac{2}{3}x^{-2}$$

$$y'=-\frac{4}{3}x^{-3}$$

$$y''=+4x^{-4}$$

$$y'''=-16x^{-5}\Rightarrow y'''=\frac{-16}{x^5}$$

مثال ۴: مشتق پنجم تابع $y=\sin x$ را دریابید:

$$y=\sin x$$

$$y'=\cos x$$

$$y''=-\sin x$$

$$y'''=-\cos x$$

$$y^{(4)}=\sin x$$

$$\boxed{y^{(5)}=\cos x}$$

مثال ۵: مشتق چهارم تابع $y=2\sqrt{x}$ را دریابید:

$$y=2\sqrt{x} \Rightarrow y=2x^{\frac{1}{2}}$$

$$y'=x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y''=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$y'''=+\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$y^{(4)}=-\frac{15}{8}x^{-\frac{7}{2}} \Rightarrow y^{(4)}=\frac{-15}{8\sqrt{x^7}} \Rightarrow \boxed{y^{(4)}=\frac{-15}{8x^3\sqrt{x}}}$$

مثال ۶: مشتق پنجم تابع $f(x)=\ln(x+1)$ را دریابید:

$$f(x)=\ln(x+1)$$

چون تابع در شکل $y=\ln u$ قرار دارد، پس مشتق آن: $y'=\frac{u'}{u}$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x)=(x+1)^{-1}$$

$$f''(x)=-1(x+1)^{-2}$$

$$f'''(x)=2(x+1)^{-3}$$

$$f^{(4)}(x)=-6(x+1)^{-4} \Rightarrow f^{(5)}(x)=+24(x+1)^{-5}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{(5)}(x)=\frac{+24}{(x+1)^5}}$$

مثال ۷: مشتق سوم تابع $f(x)=\ln(\cos x)$ را دریابید:

تابع فوق در شکل ذیل قرار دارد.

$$y=\ln u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u}$$

$$f'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x)=-\tan x$$

$$f''(x)=-\sec^2 x$$

$$f'''(x)=-2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x \Rightarrow \boxed{f'''(x)=-2\sec^2 x\cdot\tan x}$$

ویا $f'''(x)=-2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \boxed{f'''(x)=\frac{-2\sin x}{\cos^3 x}}$

مثال ۸: مشتق (n) ام تابع $y=e^{3x}$ را دریابید:

چون تابع در شکل $y=e^u$ است، پس مشتق آن:

$$y'=u'\cdot e^u$$

$$\Rightarrow y=e^{3x}$$

$$y'=3\cdot e^{3x} \Rightarrow y'=3^1\cdot e^{3x}$$

$$y''=9\cdot e^{3x} \Rightarrow y''=3^2\cdot e^{3x}$$

$$y'''=27\cdot e^{3x} \Rightarrow y'''=3^3\cdot e^{3x}$$

$$y^{(4)}=81\cdot e^{3x} \Rightarrow y^{(4)}=3^4\cdot e^{3x} \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \boxed{y^{(n)}=3^n\cdot e^{3x}}$$

مثال ۹: مشتق (n) ام تابع $y=a^x$ را دریابید:

چون تابع در شکل $y=a^u$ است، پس مشتق آن:

$$y'=u'\cdot a^u\cdot\ln a$$

$$\Rightarrow y=a^x$$

$$y'=1\cdot a^x\cdot\ln a \Rightarrow y'=a^x\cdot(\ln a)^1$$

$$y''=1\cdot a^x\cdot\ln a\cdot\ln a \Rightarrow y''=a^x\cdot(\ln a)^2$$

$$y'''=1\cdot a^x\cdot\ln a\cdot(\ln a)^2 \Rightarrow y'''=a^x\cdot(\ln a)^3$$

$$y^{(4)}=1\cdot a^x\cdot\ln a\cdot(\ln a)^3 \Rightarrow y^{(4)}=a^x\cdot(\ln a)^4$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow y^{(n)}=1\cdot a^x\cdot(\ln a)^n \Rightarrow y^{(n)}=a^x\cdot\ln^n x$$

مثال ۱۰: مشتق (n) ام تابع $y=\cos ax$ را دریابید:

چون تابع در شکل $y=\cos u$ قرار دارد پس مشتق آن:

$$y'=-u'\cdot\sin u$$

به همین ترتیب $y=\sin u$ که مشتق آن $y'=u'\cdot\cos u$ است.

$$\Rightarrow y=\cos ax$$

$$y'=-a\cdot\sin ax\Rightarrow y'=a\cos\left(\frac{\pi}{2}+ax\right)$$

$$y''=-a\cdot a\cdot\cos ax\Rightarrow y''=-a^2\cos ax$$

$$\Rightarrow y''=a^2\cdot\cos(2\cdot\frac{\pi}{2}+ax)$$

$$y'''=-a^2\cdot(-a\cdot\sin ax)\Rightarrow y'''=a^3\cdot\sin ax$$

$$\Rightarrow y'''=a^3\cdot\cos(3\cdot\frac{\pi}{2}+ax)$$

$$y^{(4)}=a^3\cdot(a\cdot\cos ax)\Rightarrow y^{(4)}=a^4\cdot\cos ax$$

$$\Rightarrow y^{(4)}=a^4\cdot\cos(4\cdot\frac{\pi}{2}+ax)$$

$$\text{...........}\Rightarrow y^{(n)}=a^n\cdot\cos(n\cdot\frac{\pi}{2}+ax)$$

تمرینات فصل هشتم

مشتقات توابع ذیل را به کمک مفهوم تحلیل الجبری مشتق دریابید:

1) $y=-3$
2) $y=7x$
3) $y=5x^2$
4) $y=\frac{-1}{x}$
5) $y=\sqrt{3x}$
6) $y=4x^3$
7) $y=-\frac{2}{5}x$
8) $y=\sqrt{x}$
9) $y=x^2$
10) $y=\sin x$

مشتقات توابع الجبری ذیل را دریابید:

11) $y=+\frac{3}{5}$
12) $y=\frac{\pi}{4}$
13) $y=\cos 60$
41) $y=\log_9 27$
15) $y=\frac{\tan\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{2}}$
16) $y=8x$

17) $y=\frac{3}{5}x$

18) $y=\sqrt{2}\,x$

19) $y=8x^5$

20) $y=7x^{-4}$

21) $y=\frac{4}{5}\sqrt[5]{x^3}$

22) $y=\frac{3}{x^{12}}$

23) $y=\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{-2}{x^5}}$

24) $y=\frac{x^5-x^3}{x^2}$

25) $y=\frac{7}{\sqrt[3]{x^2}}$

26) $y=4x^5-8x^3+1$

27) $y=x^2-x^{-2}+x^{\frac{2}{3}}$

۲۸) میل مماس منحنی $y=x^2-x+4$ را در $x=1$ دریابید.

۲۹) میل مماس منحنی $y=x^3-1$ را در $x=+2$ دریابید.

۳۰) هرگاه $y=3x^3-t^4+t+1$ باشد $\frac{dy}{dx}$ را دریابید.

۳۱) هرگاه $y=x^3-2t^5+t-2$ باشد $\frac{dy}{dt}$ را دریابید.

۳۲) هرگاه $y=2z^3+5z+x$ باشد، $\frac{dy}{dz}$ را دریابید.

۳۳) هرگاه $y=m^3-2n^3+2n^2$ باشد، $y'_n=?$

۳۴) هرگاه $y=5x^{-2}+x^2+z^3+1$ باشد، $y'_x=?$

35) $y=5x(x^3-2)$

36) $y=(x^3-1)(x^3+2)$

37) $y=(x^{-2}+1)(x^2-1)$

38) $y=(2x^3-x)(x^2+2x+1)$

39) $y=-8(x^5-2x+1)$

40) $y=\frac{3}{5}(2x^4+8x-2)$

41) $y=\frac{x+3}{2x-1}$

42) $y=\frac{x^2+8}{x^3+x}$

43) $y=\frac{x}{x^2+1}$

44) $y=\frac{-7}{x^3+2}$

45) $y=\frac{5x^5-2x+1}{5}$

46) $y=\frac{5}{x-x^3}$

47) $y=\sqrt{2x^2+8x-1}$

48) $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

49) $y=\sqrt[3]{x+4}$

50) $y=2(x^2-5x+1)^3$

51) $y=\frac{-2}{(3x^2+2)^3}$

52) $y=5\cdot\sqrt[7]{(2x^3+1)^5}$

مشتقات توابع مثلثاتی ذیل را دریابید:

53) $y=5\sin\frac{7\pi}{5}$

54) $y=\sin x+\sin\frac{\pi}{4}$

55) $y=3\sin(x+\frac{\pi}{2})$

56) $y=-2\sin\sqrt{2x}$

57) $y=\sin(2x^5-x^3)$

58) $y=-8\sin(\sqrt{x^2+5})$

59) $y=\sin(\sin x)$

60) $y=2\sin^5 x$

61) $y=\frac{-8}{\sin^3 x}$

62) $y=\frac{4}{21\sin x}$

63) $y=\sqrt{\sin x^2}$

64) $y=3x\cdot\sin x$

65) $y=\frac{\sin x}{x}$

66) $y=2\sin^3(x^3-1)$

67) $y=x^3\cdot\sin^2 x$

68) $y=2\cos\frac{3\pi}{2}x$

69) $y=\sin\frac{\pi}{2}-\cos 2x$

70) $y=x+3\cos x$

71) $y=-2\cos(\pi+x)$

72) $y=-4\cos\sqrt{3x}$

73) $y=\cos(3x^7-1)$

74) $y=+\frac{7}{3}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

75) $y=-4\cos^7 x$

76) $y=\frac{\cos^3 x}{3}$

77) $y=\frac{1}{\cos^5 x}$

78) $y=\frac{2}{x+\cos x}$

79) $y=x^3\cdot\cos x$

80) $y=\sqrt{x}\cdot\cos^2 x$

81) $y=\frac{3x^2}{\cos x}$

82) $y=4\cos^5(2x+4)$

83) $y=\tan\frac{\pi}{4}$

84) $y=\tan(x+\frac{\pi}{2})$

85) $y=2\sin^2 x+2\cos^2 x$

86) $y=\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}$

87) $y=2\cos x\cdot\sin x$

88) $y=\sin^2 x\cdot\cos x$

89) $y=\tan x\cdot\cot x$

90) $y=3\tan(x^3-3x+4)$

91) $y=2\tan^5 x$

92) $y=8\sqrt{\tan x}$

93) $y=\sin x^2+\tan x^3$

94) $y=x\cdot \tan x$

95) $y=x^2+5\tan x$

96) $y=5\tan(8x^3+2)$

97) $y=\dfrac{2\tan^3 x}{5}$

98) $y=\dfrac{-2}{\tan^3 x}$

99) $y=\dfrac{x}{\tan x}$

100) $y=\dfrac{-3}{x-\tan x}$

101) $y=x^2\cdot \tan 2x$

102) $y=\sqrt{x+\tan x}$

103) $y=\cot(x^3-1)$

104) $y=-2\cot\sqrt{x+1}$

105) $y=2x\cdot \cot x^2$

106) $y=-2\cot^4 x$

107) $y=\dfrac{-1}{\cot^2 x^3}$

108) $y=2\sin x\cdot \cot x$

109) $y=\sec(8x^3-1)$

110) $y=2\sec^2 x$

111) $y=5\sec(x^3-1)$

112) $y=7x-\sec^2 x$

113) $y=2\csc(x^3+x)$

114) $y=\dfrac{x}{\csc x}$

115) $y=-5\csc^5 x$

116) $y=2\sqrt[15]{\csc^{14} x}$

مشتقات ضمنی ذیل را دریابید:

117) $y^2-2yx-1=0$

118) $12y-5y^2x-x=0$

119) $y^2-x^2-3=0$

120) $5y-8xy^2+x^2=4$

121) $3xy^2-x^2y-x=2$

122) $x+y-x^2+y^2=0$

مشتقات توابع لوگارتمی و نمایی ذیل را دریابید:

123) $y=\log_5 3x^2$

124) $y=\log(x^5-2x)$

125) $y=\log_2(\sin x)$

126) $y=\sqrt{\log x}$

127) $y=2\log^3 x$

128) $y=\log_2\sqrt[3]{(2x+5)^2}$

129) $y=5x^2\cdot \log_7 x$

130) $y=\dfrac{x}{\log x}$

131) $y=\sqrt{x}\cdot \log_3\dfrac{1}{x}$

132) $y=\ln(x^3-2x+4)$

133) $y=\cos x\cdot \ln 2x$

134) $y=\dfrac{\ln x}{\sin x}$

135) $y=\ln(\cos x)$

136) $y=3\ln^5 x^2$

137) $y=\dfrac{2}{\log^3 x}$

138) $y=e^x\cdot \ln 5x$

139) $y=x+2e^{x^2}-\ln x^3$

140) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+e^{2x}}$

141) $y=e^{x^3-x}$

142) $y=e^{\tan x}$

143) $y=-2x\cdot e^{x^2}$

144) $y=20x^3\cdot\dfrac{1}{e^{2x}}$

145) $y=\dfrac{e^{x^3}}{2x}$

146) $y=e^{\sin x}$

147) $y=e^{x^3-\sec x}$

148) $y=e^{\log 2x}$

149) $y=3e^x\cdot\cos^5 x$

150) $y=2e^{3x}\cdot\sin^2 x$

151) $y=\sqrt{5x+e^x}$

152) $y=e^{\sqrt{x}}$

153) $y=5^{x^3-3x+1}$

154) $y=x\cdot a^x$

155) $y=\ln(\sin x)\cdot 2^x$

156) $y=5^{x^2}\cdot e^{x^3}$

157) $y=3^{\sin x^2}$

158) $y=2^{\log_3 x}$

159) $y=x^3\cdot 5^{2x}$

160) $y=\dfrac{x^2+1}{2^{x^2}}$

161) $y=x^{x^x}$

162) $y=(\cos x)^x$

163) $y=(x^3)^{\sin x}$

164) $y=(\cot x)^{\sin x}$

به کمک لوگارتم طبیعی مشتقات توابع ذیل را دریابید:

165) $y=(x+1)^3\cdot(2x+3)^4$

166) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2(x^2-1)}$

167) $y=\dfrac{(3x+4)^5}{(x^2-1)^3}$

168) $y=\dfrac{\sqrt[5]{(3x-1)^4}}{(2x^2-1)^3}$

169) $y=\dfrac{(3x^2-1)^2(x+2)^5}{(2x-1)^4}$

170) $y=\dfrac{\sqrt[5]{(7x^2-1)^3}}{\sqrt[7]{(x^3+1)^4}}$

171) $y=x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$

172) $y=(x)^{\sqrt{x}}$

مشتقات توابع معکوس مثلثاتی ذیل را دریابید:

173) $y=arc\sin(5x^7)$

174) $y=-6(arc\sin x)^5$

175) $y=+8arc\sin\sqrt{x}$

176) $y=\sqrt{arc\cos x^3}$

177) $y=-3arc\cos(2x^5-x)$

178) $y=(arc\cos x^2)^3$

179) $y=x^5\cdot arc\cos x$

180) $y=\cos x\cdot arc\cos x$

181) $y=2arc\tan(x^3-2)$

182) $y=\dfrac{x}{arc\tan x}$

183) $y=-7(arc\cot 2x)^3$

184) $y=arc\cot\sqrt{2x-1}$

185) $y=arc\sec(\ln x)$

186) $y=\dfrac{1}{(arc\sec x)^5}$

187) $y=2arc\csc(2x^5-x)^3$

188) $y=(x)^{arc\csc x}$

189) $y=e^{arc\cot x}$

190) $y=arc\sec(\sqrt{\cos x})$

191) $y=3x^2\cdot arc\csc x$

192) $y=arc\csc(e^{x+1})$

مشتقات متوالی توابع ذیل را دریابید:

۱۹۳) مشتق مرتبه دوم تابع $y=7x^5-8x+4$ را دریابید.

۱۹۴) مشتق سوم تابع $y=20x^4-3x^2+1$ را دریابید.

۱۹۵) مشتق دهم تابع $y=3x^8-x^9+12x$ را دریابید.

۱۹۶) مشتق سوم تابع $y\ \dfrac{-2}{3x^5}$ را دریابید.

۱۹۷) مشتق دوم تابع $y=\sqrt{x-1}$ را دریابید.

۱۹۸) مشتق هفتم تابع $y=\cos x$ را دریابید.

۱۹۹) مشتق پنجم تابع $f(x)=\ln(2x-1)$ را دریابید.

۲۰۰) مشتق چهارم تابع $f(x)=\ln(\sin x)$ را دریابید.

۲۰۱) مشتق (n)ام تابع $y=e^{5x}$ را دریابید.

۲۰۲) مشتق (n)ام تابع $f(x)=\ln x^2$ را دریابید.

فصل نهم

موارد استعمال مشتق

در جهان امروزی و حیات روزمره ما وابسته بـه وسـایل و آلات گونـاگون می‌باشیم که به شکلی از اشکال جهت پیشبرد امورات محوله خـویش از آنهـا استفاده به عمل می‌آوریم. تحقیقات طبی روی نتایج معاینات مریـضان ماننـد گراف قلب، اخذ اکسیجن مریض در جریان عمل جراحي و تعیین نقاط اعظمی و اصـغری آن، طـرز کـارکرد ماشـین آلات طبـی و نتـایج حاصـله از آن، فعالیت‌های انجنیری چـون سـاختمان تعمیـرات و وسـایل تخنیکـی بـا درک عوامل و قوه‌های داخلی و خارجی که باعث مقاومت اعظمی و نواقص اصغری وسایل تخنیکی و ساختمانی می‌گردد. مؤثریت و استفاده اعظمی عناصر و مواد مورد ضرورت و تلفات اصغری آن در ساختمان‌ها، تأسیسات چـون سـرک‌هـا، بندها، پل‌ها و غیره همچنان تعیین و تثبیـت مقـدار اعظمـی عناصـر خـالص معدنی، نوعیـت اسـتخراج آن بـا مـصارف اصـغری و استحـصال اعظمـی در تحقیقات جیولوجی و معدن و غیره به شکلی از اشـکال بـه مطالعـه تحـولات توابع مانند ساحه متزاید، متناقص، نقاط اعظمی و اصغری توابع، نوعیت تحول گراف تابع (انحنا گراف) و غیـره ... ضـرورت اسـت کـه بـا اسـتعمال مـشتق می‌توان به این اهداف نایل آمد. همچنان می‌توان بـه کمـک مـشتق، لیمـت توابع را که در شکل مبهم قـرار دارد محاسـبه نمـود و در سـایر بخـش‌هـای ریاضیات عالی نیز می‌توان به طور گسترده از مشتق استفاده نمود.

استفاده از مشتق در لیمت

قضیه هوپیتال (D.H. Lapetall Theorem): هرگاه توابع $f(x)$ و $g(x)$ قابل اشتقاق بوده و $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ شکل نامعین $\dfrac{0}{0}$ را اختیار نمایـد و یـا ایـن توابع برای قیمت‌های به قدر کافی بزرگ x قابل اشتقاق بوده و $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ شکل نامعین $\dfrac{\infty}{\infty}$ را اختیار نماید. می‌توان به کمک مـشتق یعنـی بـا تطبیـق قضیه هوپیتال طور ذیل قیمت حدی این نوع توابع را دریافت نمود:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

و همچنان:
$$\frac{f'(\infty)}{g'(\infty)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

به خاطر داشته باشید هرگاه مکرراً $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$ شکل نامعین $\dfrac{o}{o}$ و $\dfrac{f'(\infty)}{g'(\infty)}$ شکل نامعین $\dfrac{\infty}{\infty}$ را اختیار نماید، می‌توان مشتق مرتبـه دوم، سـوم، ... (n) ام نسبت توابع مذکور را دریافته تا رفع ابهام گردد. به همین ترتیب اگر توابع بـه شکل سـایر اشـکال نـامعین مانـند: $\infty-\infty$، ∞، 0، 0°، ∞° و 1^{∞} قـرار داشته باشد. در جریان محاسبه لیمت با تغییـرات لازم آنهـا را بـه یکـی از دو حالتی که در اول تذکار یافت تبدیل نموده بعداً با تطبیق قضیه هوپیتـال رفـع ابهام می‌گردند.

مثال‌ها:

لیمت توابع ذیل را به کمک مشتق (قاعده هوپیتال) دریافت نماید.

1- $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^4-81}=?$

5- $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{3x-1}-2}{\sqrt{x+1}-2}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{3x-1}-2}{\sqrt{x+1}-2}=\frac{\sqrt[3]{9-1}-2}{\sqrt{3+1}-2}=\frac{2-2}{2-2}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt[3]{3x-1}-2)'}{(\sqrt{x+1}-2)'}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{3}{3\cdot\sqrt[3]{(3x-1)^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{(9-1)^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{3+1}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=1$$

6- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos 0=1$$

7- $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos 0}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{+\sin x}{2x}=\frac{\sin 0}{2(0)}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{\cos 0}{2}=\frac{1}{2}$$

8- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}=?$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^4-81}=\frac{(-3)^3+27}{(-3)^4-81}=\frac{-27+27}{+81-81}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -3}\frac{(x^3+27)'}{(x^4-81)'}=\lim_{x\to -3}\frac{3x^2}{4x^3}=\lim_{x\to -3}\frac{3}{4x}=\frac{3}{4(-3)}=-\frac{1}{4}$$

2- $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3+x-10}{x^4-x^2-12}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^3+x-10}{x^4-x^2-12}=\frac{(2)^3+2-10}{(2)^4-(2)^2-12}=\frac{8+2-10}{16-4-12}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x^3+x-10)'}{(x^4-x^2-12)'}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+1}{4x^3-2x}=\frac{3(2)^2+1}{4(2)^3-2(2)}=$$

$$\frac{3(4)+1}{4(8)-4}=\frac{12+1}{32-4}=\frac{13}{28}$$

3- $\lim_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-81}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x^2-81}=\frac{\sqrt{9}-3}{(9)^2 81}=\frac{3-3}{81-81}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)'}{(x^2-81)'}=\lim_{x\to 9}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{9}}}{2(9)}=\frac{\frac{1}{6}}{18}=\boxed{\frac{1}{108}}$$

4- $\lim_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{2x-16}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{2x-16}=\frac{\sqrt[3]{8}-2}{2(8)-16}=\frac{2-2}{16-16}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x}-2)'}{(2x-16)'}=\lim_{x\to 8}\frac{\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}}{2}=\frac{1}{6\cdot\sqrt[3]{64}}=\frac{1}{6\cdot 4}=\boxed{\frac{1}{24}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x(1-\cos x)}{-(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2 x}{1+\cos x}=\frac{-\cos^2 0}{1+\cos 0}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

11- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^0-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=e^0=1$$

12- $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{a^0-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\cdot\ln a}{1}=a^0\cdot\ln a=1\cdot\ln a=\ln a$$

13- $\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=\frac{\cos a-\cos a}{a-a}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{(\cos x-\cos a)'}{(x-a)'}=\lim_{x\to a}\frac{-\sin x}{1}=-\sin a$$

14- $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=?$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+0)-\sin x}{0}$$

$$=\frac{\sin x-\sin x}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}-1}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)'}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1}=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

9- $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{4}}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)'}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x-\cos x}{1}$$

$$=-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{-2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

10- $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x}=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{0-\sin 0}{0-\tan 0}=\frac{0-0}{0-0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x-\tan x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\sec^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{[\sin(x+h)-\sin x]'}{(h)'}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)\cdot 1-0}{1}$$
$$=\cos(x+o)=\cos x$$

15- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\frac{\ln(\cos 0)}{(0)^2}=\frac{\ln(1)}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{[\ln(\cos x)]'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cdot\cos x}$$
$$=\frac{-\sin 0}{2(0)\cdot\cos 0}=\frac{0}{0\cdot 1}=\frac{0}{0}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(-\sin x)'}{(2x\cdot\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2\cdot\cos x+2x\cdot(-\sin x)}$$
$$=\frac{-\cos 0}{2\cdot\cos 0-2(0)\cdot\sin 0}=\frac{-1}{2-0}=-\frac{1}{2}$$

16- $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{(1)^n-1}{1-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x^n-1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{nx^{n-1}}{1}=n(1)^{n-1}=n\cdot 1=n$$

17- $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\frac{a^0-b^0}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(a^x-b^x)'}{(x)'}=\frac{a^x\cdot\ln a-b^x\cdot\ln b}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}(a^x\cdot\ln a)-\lim_{x\to 0}(b^x\cdot\ln b)$$
$$=a^0\cdot\ln a-b^0\cdot\ln b=1\cdot\ln a-1\cdot\ln b=\ln a-\ln b=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

18- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{e^0-e^0}{\sin 0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{e^0+e^0}{\cos 0}=\frac{1+1}{1}=2$$

19- $\lim_{a\to 0}\frac{e^a+\sin a-1}{\ln(a+1)}=?$

$$\Rightarrow \lim_{a\to 0}\frac{e^a+\sin a-1}{\ln(a+1)}=\frac{e^0+\sin 0-1}{\ln(0+1)}=\frac{1+0-1}{\ln(1)}=\frac{0}{0}$$
$$\Rightarrow \lim_{a\to 0}\frac{(e^a+\sin a-1)'}{[\ln(a+1)]'}=\lim_{a\to 0}\frac{1\cdot e^a+\cos a}{\frac{1}{a+1}}$$
$$=\frac{e^0+\cos 0}{\frac{1}{0+1}}=\frac{1+1}{1}=2$$

20- $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{2x+5}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{2x+5}=\frac{3(\infty)-1}{2(\infty)+5}=\frac{\infty}{\infty}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{(3x-1)'}{(2x+5)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

21- $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x-1}{x^3+x^2-3}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\pi}{x}\right)'}{\left(\cot\dfrac{\pi x}{2}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{\pi}{x^2}}{-\dfrac{\pi}{2}\cdot\csc^2\dfrac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}{x^2}=\frac{2\sin^2 0}{0}=\frac{2(0)}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow 2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin^2\dfrac{\pi x}{2}\right)'}{\left(x^2\right)'}=2\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\pi}{2}2\sin\dfrac{\pi x}{2}\cdot\cos\dfrac{\pi x}{2}}{2x}$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\cdot\dfrac{\pi x}{2})}{x}$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{x}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\pi(0)}{0}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin 0}{0}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{0}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin\pi x)'}{(x)'}=\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\pi\cos\pi x}{1}=\frac{\pi}{2}\cdot[\pi\cos\pi(0)]$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\pi\cos 0=\frac{\pi^2}{2}\cdot 1=\frac{\pi^2}{2}$$

24- $\lim_{x\to 1}(1-x)\cdot\tan\dfrac{\pi x}{2}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}(1-x)\cdot\tan\frac{\pi x}{2}=(1-1)\cdot\tan\frac{\pi}{2}=0\cdot\tan 90=0\cdot\infty$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}(1-x)\cdot\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}(1-x)\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi x}{2}}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x-1}{x^3+x^2-3}=\frac{2(\infty)^3+5(\infty)-1}{(\infty)^3+(\infty)^2-3}=\frac{\infty+\infty-1}{\infty+\infty-3}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^3+5x-1)'}{(x^3+x^2-3)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+5}{3x^2+2x}=\frac{6(\infty)^2+5}{3(\infty)^2+2(\infty)}$$

$$=\frac{6(\infty)+5}{3(\infty)+\infty}=\frac{\infty+5}{\infty+\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{(6x^2+5)'}{(3x^2+2x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x}{6x+2}=\frac{12(\infty)}{6(\infty)+2}=\frac{\infty}{\infty+2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{(12x)'}{(6x+2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{6}=\frac{12}{6}=2$$

22- $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{3x^2}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{3x^2}=\frac{e^\infty}{3(\infty)^2}=\frac{\infty}{3(\infty)}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6x}=\frac{e^\infty}{6(\infty)}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(6x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6}=\frac{e^\infty}{6}=\frac{\infty}{6}=\infty$$

23- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\pi}{x}}{\cot\dfrac{\pi x}{2}}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\pi}{x}}{\cot\dfrac{\pi x}{2}}=\frac{\dfrac{\pi}{0}}{\cot\dfrac{\pi(0)}{2}}=\frac{\infty}{\cot 0}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{2}{1-1}-\frac{1}{1-1}=\frac{2}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{2-(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{2-x-1}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{x^2-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{(1-x)'}{(x^2-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{2(1)}=\frac{-1}{2}$$

27- $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\frac{1}{1-1}-\frac{1}{\ln(1)}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\cdot\ln x-(x-1)}{(x-1)\cdot\ln x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1\cdot\ln(1)-1+1}{(1-1)\cdot\ln(1)}=\frac{0-0}{0\cdot0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\cdot\ln x-x+1}{(x-1)\cdot\ln x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x\cdot\ln x-x+1)'}{[(x-1)\cdot\ln x]'}=\lim_{x\to1}\frac{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{1\cdot\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x-\frac{1}{x}+1}=\frac{\ln(1)}{\ln(1)-\frac{1}{1}+1}=\frac{0}{0-1+1}=\frac{0}{0-0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{(\ln x)'}{\left(\ln x-\frac{1}{x}+1\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)\cdot\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\frac{(1-1)\cdot\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{0\cdot1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{\left[(1-x)\cdot\sin\frac{\pi x}{2}\right]'}{\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-1\cdot\sin\frac{\pi x}{2}+(1-x)\cdot\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}}$$

$$=\frac{-\sin\frac{\pi}{2}+(1-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{-1+0\cdot\frac{\pi}{2}\cdot0}{-\frac{\pi}{2}\cdot1}=\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

25- $\lim_{x\to0}(x\cdot\cot2x)=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}(x\cdot\cot2x)=0\cdot\cot0=0\cdot\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}(x\cdot\cot2x)=\lim_{x\to0}(x\cdot\frac{\cos2x}{\sin2x})=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\cos2x}{\sin2x}$$

$$=\frac{0\cdot\cos0}{\sin0}=\frac{0\cdot1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{(x\cdot\cos2x)'}{(\sin2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{1\cdot\cos2x+x\cdot(-2\sin2x)}{2\cos2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos2x-2x\cdot\sin2x}{2\cos2x}=\frac{\cos0-0\cdot\sin0}{2\cos0}=\frac{1-0}{2\cdot1}=\frac{1}{2}$$

26- $\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=?$

28- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\cot x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\cot x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=\frac{\frac{\pi}{2}}{\cot\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\frac{\pi}{2}}{0}-\frac{\pi}{0}=\infty-\infty$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\cot x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\frac{\cos x}{\sin x}}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\cdot\sin x}{\cos x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\cdot\sin x-\pi}{2\cos x}=\frac{2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}-\pi}{2\cos\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi\cdot1-\pi}{2\cdot0}=\frac{\pi-\pi}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2x\cdot\sin x-\pi)'}{(2\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cdot\sin x+2x\cdot\cos x-0}{-2\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(\sin x+x\cdot\cos x)}{-2\sin x}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}}{-\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1+\frac{\pi}{2}\cdot0}{-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

29- $\lim\limits_{x\to0}x^x=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}x^x=0^0$$

هرگاه $y=x^x$

$$\ln y=\ln x^x\Rightarrow\ln y=x\cdot\ln x$$

$$\Rightarrow\ln y=\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\Rightarrow\lim_{x\to0}(\ln y)=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}(\ln y)=\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\Rightarrow\lim_{x\to0}(\ln y)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}(\ln y)=\lim_{x\to0}(-x)\quad\Rightarrow\lim_{x\to0}(\ln y)=0$$

$$\ln y=0$$

پس در نتیجه:

$$\Rightarrow y=e^0\Rightarrow y=1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}x^x=\lim_{x\to0}y=1\quad\Rightarrow\lim_{x\to0}x^x=1$$

30- $\lim\limits_{x\to\infty}(x)^{\frac{1}{x}}=?$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}(x)^{\frac{1}{x}}=(\infty)^{\frac{1}{\infty}}=(\infty)^0$$

هرگاه: $y=(x)^{\frac{1}{x}}\Rightarrow\ln y=\frac{1}{x}\cdot\ln x\Rightarrow\ln y=\frac{\ln x}{x}$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}(\ln y)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}(\ln y)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(\ln y) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(\ln y) = 0$$

پس در نتیجه: $\ln y=0 \Rightarrow y=e^0 \Rightarrow y=1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} y=1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

31- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = ?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty = (1+0)^\infty = (1)^\infty$$

هرگاه: $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\ln y = x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \ln y = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(\ln y) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(\ln y) = 1$$

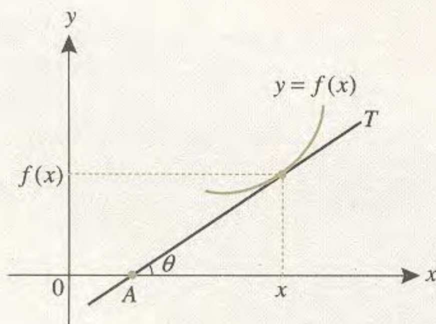
$$\Rightarrow \ln y=1 \Rightarrow y=e^1 \Rightarrow y=e$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} y=e \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e$$

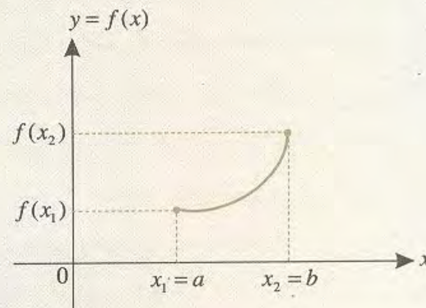
تحولات توابع

جهت مطالعه تحولات توابع و ترسیم منحنی (گراف) توابع مذکور با استفاده از مشتق در صورتیکه تابع $y=f(x)$ در یک انتروال $[a,b]$ متمادی و در انتروال (a,b) قابل اشتقاق باشد، شرایط ذیل را دارا می‌باشد.

I. اگر $f'(x)$ در انتروال (a,b) مثبت باشد، تابع $f(x)$ در آن متزاید است. یعنی هرگاه اشاره مشتق اول تابع مذکور در همان فاصله مثبت باشد تابع در همان فاصله متزاید می‌باشد؛ زیرا مماس در هر نقطه منحنی مذکور با جهت مثبت محور x زاویه حاده را تشکیل می‌دهد و $\tan\theta>0$ بوده، بنابرین مشتق تابع (میل مماس) در هر نقطه آن مثبت می‌باشد.

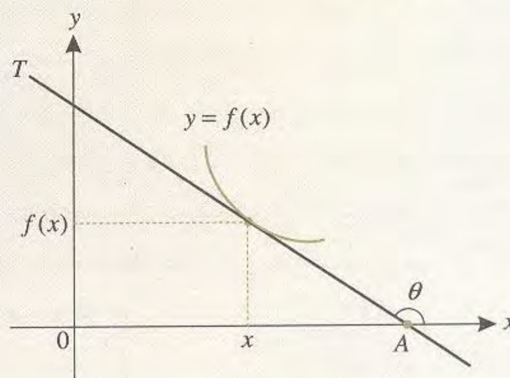


به عباره دیگر هرگاه در تـابع $y=f(x)$ ، $x_1<x_2$ باشـد، درنتیجـه $f(x_1)<f(x_2)$ گردد تابع مذکور در انتروال (a,b) متزاید نامیده می شود.

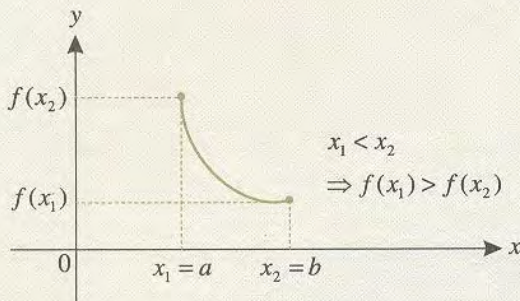


$$\Rightarrow x_1 < x_2$$
$$f(x_1) < f(x_2)$$

II. اگـر $f'(x)$ در انتـروال (a,b) منفـی باشـد، تـابع $f(x)$ در آن متناقص است. یعنی هرگاه اشاره مـشتق اول تـابع مـذکور در همـان فاصله منفی باشد تابع در همان فاصله متناقص می‌باشد؛ زیرا ممـاس در هر نقطه منحنی مذکور با جهت مثبت محور x زاویـه منفرجـه را تشکیل می‌دهد و $\tan\theta<0$ بوده، بنابرین مشتق تابع (میل ممـاس) در هر نقطه آن منفی می‌باشد.



به عباره دیگر هرگاه در تابع $y=f(x)$ ، $x_1<x_2$ باشـد، در نتیجـه $f(x_1)>f(x_2)$ گردد تابع مذکور در انتروال (a,b) متناقص نامیده می‌شود.

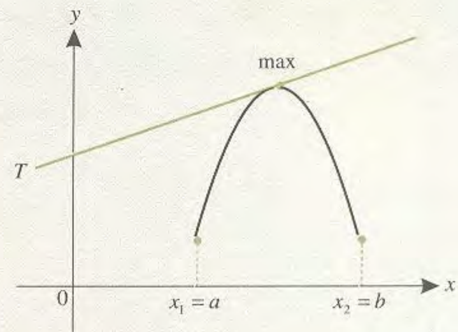


نقاط اکستریم (بحرانی) توابع

نقاط اکستریم یا بحرانی به نقاط اعظمی و اصغری توابع گفته می شود که شرط لازمی بـرای اینکـه تـابع $f(x)$ در نقطـه x_0 دارای اکستریم باشد عبارت از صفر بودن مشتق اول تابع در آن اسـت، یعنـی $f'(x_0)=0$ باشـد که به تفکیک هریک آن را واضح می‌سازیم.

۱-نقطه اعظمی (Maximam point): هرگاه اشـاره مـشتق اول تـابع $y=f(x)$ در یک نقطه معین x_0 از مثبت به منفـی تبـدیل گـردد، یعنی اگر برای $x<x_0$ قیمت $f'(x)$ اشاره مثبـت و بـرای $x>x_0$ اشاره منفی باشد، پس نقطه $(x_0, f(x_0))$ اعظمی نامیده می‌شود.
قابل یاد آوری است این که در حالت اعظمی چون مماس در هر نقطه از منحنی $y=f(x)$ شامل انتروال (a,b)، فوق (بالا) گراف واقـع می گردد، بناءً نوعیت گراف منحنـی تـابع مـذکور در همـان انتـروال محدب نامیده می‌شود.

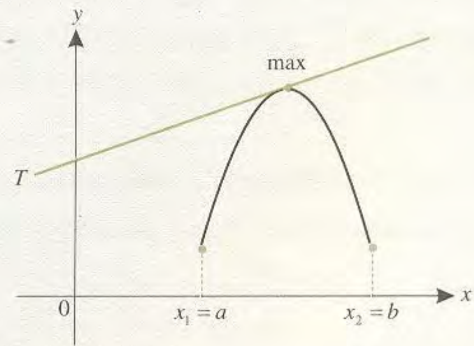
جهت تشخیص نقطه اعظمـی (max) درحالیکـه در نقطـه $x=x_0$ مشتق اول تابع صفر است. اگر مشتق دوم تابع در همان نقطـه دارای اشـاره منفـی باشـد، یعنـی $f''(x_0)<0$ در ایـن صـورت نقطـه $(x_0, f(x_0))$ اعظمی می‌باشد.



۲-نقطه اصغری (Minimam point): هرگـاه اشـاره مـشتق اول تـابع $y=f(x)$ در یک نقطه معین x_0 از منفی به مثبت تبـدیل گـردد، یعنی اگر برای $x<x_0$ قیمت $f'(x)$ اشاره منفـی و بـرای $x>x_0$ اشاره مثبت باشد، پس نقطه $(x_0, f(x_0))$ اصغری نامیده می‌شود.

قابل ذکر است این که در حالـت اصـغری چـون ممـاس در هـر نقطـه از منحنـی $y=f(x)$ شـامل انتـروال (a,b)، تحـت (پـایین) گـراف واقـع می‌گردد، بناءً نوعیت گراف منحنی تابع مذکور در همان انتروال مقعـر نامیـده می شود.

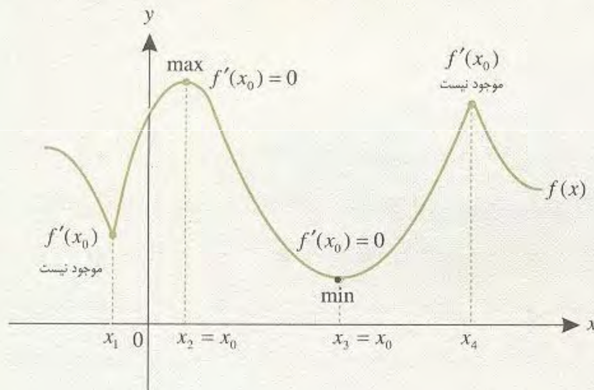
جهت تشخیص نقطه اصغری (min) درحالیکه در نقطـه $x=x_0$ مـشتق اول تابع صفر است. اگر مشتق دوم تابع در همـان نقطـه دارای اشـاره مثبـت باشـد، یعنــی $f''(x_0)>0$ در اینــصورت نقطــه $(x_0, f(x_0))$ اصـغری می‌باشد.



یادداشت: به خاطر داشته باشید که یک تابع در یک انتروال ممکن چنـد نقطه بحرانی داشته باشد مگر در یک انتروال معین تـابع یـک نقطـه اعظمـی مطلق و یا یک نقطه اصغری مطلق وجود خواهد داشت.

اعظمی مطلق: به صورت عمـوم نقطـه $(x_0, f(x_0))$ اعظمـی مطلـق شمرده مـی‌شـود در صـورتیکه در سـاحه تعریـف تـابع f(x) بـرای هـر (x)، $f(x) \le (x_0)$ موجود باشد. $f(x_0)$ را اعظمی مطلق می‌گویند.

اصغری مطلق: به صورت عموم نقطـه $(x_0, f(x_0))$ اصـغری مطلـق نامیــده مــی‌شــود در صــورتیکه در ســاحه تعریــف f(x) بــه هــر (x)، $f(x) \ge f(x_0)$ موجود باشد، لذا $f(x_0)$ را اصغری مطلق می‌گویند.

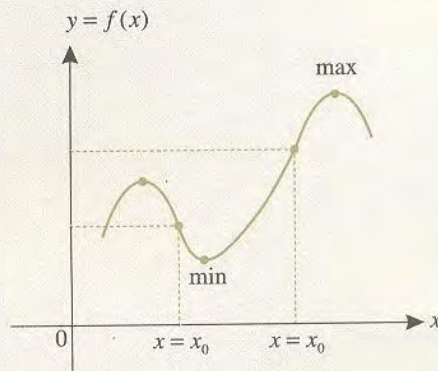


نقطه انعطاف یا عطف (Inflection point)

طوریکه می‌دانیم هرگاه مشتق دوم تابع $y=f(x)$ در تمام نقـاط یـک انتروال، منفی باشد، گراف منحنی محدب و زمانیکـه مـشتق دوم آن در تمـام نقاط انتروال مذکور، مثبت باشد، گراف منحنی مقعـر اسـت. پـس نقطـهٔ کـه انتروال‌های محدب بودن و مقعر بودن گراف منحنی تـابع را از همـدیگر جـدا می سازد، به نام نقطه انعطاف (عطف) نامیده می‌شود.

به عباره دیگر هرگاه مشتق دوم تابع $y=f(x)$ در $x=x_0$ مساوی بـه صفر گردد و همچنان اشاره $f''(x)$ در لحظهٔ عبور از x_0 تبدیل گردد، پس

نقطه $(x_0, f(x_0))$ نقطه انعطاف منحنی تابع مـی‌باشـد و یـا همچنـان بـه عبارت دیگری نیز مـی‌تـوان گفـت هرگـاه مـشتق دوم تـابع $y=f(x)$ در $x=x_0$ مساوی به صفر و اشاره مـشتق اول در مجـاورت ایـن x_0 منفـی و دوباره منفی و یا مثبت و دوباره مثبـت باشـد، نقطـه $x=x_0$ انعطـاف نامیـده می‌شود.



پس جهت دریافت نقطه یا نقاط انعطاف توابع $f''(x)=0$ قرار داده شده تا نقطه یا نقاط x_0 دریافت گردد و بـا وضـع آن در تـابع، $f(x_0)$ دریافـت گردد که در نتیجه نقاط مانند $(x_0, f(x_0))$ و سایر نقاط انعطـاف حاصـل می‌گردد.

مثال‌ها:

مثال ۱: نقطه اصغری تابع $f(x)=x^2-2x+3$ را دریابید.

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=x^2-2x+3\\ &f'(x)=2x-2\\ &f'(x)=0 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1\\ &f(1)=(1)^2-2(1)+3\\ &=1-2+3 \Rightarrow f(1)=+2\\ &f''(x)=2 \Rightarrow f''(1)=2>0\,\text{min} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(1,+2)(\text{min})$$

نقطه اصغری

مثال ۲: نقطه اعظمی تابع $f(x)=-2x^2+8x-3$ را دریابید.

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=-2x^2+8x-3\\ &f'(x)=-4x+8\\ &f'(x)=0 \Rightarrow -4x+8=0\\ &f(2)=-2(2)^2+8(2)-3 \Rightarrow f(2)\\ &=-8+16-3 \Rightarrow f(2)=5\\ &f''(x)=-4 \Rightarrow f''(2)=-4<0\,\text{max} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(2,5)(\text{max})$$

نقطه اعظمی

مثال ۳: نقاط اکستریم تابع $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$ را دریابید.

$$f(x)=x^3-6x^2+9x-3$$
$$f'(x)=3x^2-12x+9$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12x+9=0 \;/ :3$$
$$x^2-4x+3=0 \;\Rightarrow (x-1)(x-3)=0$$
$$x-1=0 \Rightarrow \boxed{x_1=1},\; x-3=0 \Rightarrow \boxed{x_2=3}$$
$$\Rightarrow f(1)=(1)^3-6(1)^2+9(1)-3$$
$$=1-6+9-3=1 \Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow P_1(1,1)$$
$$\Rightarrow f(3)=(3)^3-6(3)^2+9(3)-3$$
$$=27-54+27-3=-3 \Rightarrow f(3)=-3 \Rightarrow P_2(3,-3)$$
$$f''(x)=6x-12$$

نقطه اعظمی $\Rightarrow f''(1)=6(1)-12=-6<0\,\text{max} \Rightarrow P_1(1,1)(\text{max})$

نقطه اصغری $\Rightarrow f''(3)=6(3)-12=18-12=+6>0\,\text{min} \Rightarrow P_2(3,-3)$

مثال ۴: نقطه انعطاف تابع $f(x)=x^3-3x^2+5x-10$ را دریابید.

$$f(x)=x^3-3x^2+5x-10$$
$$f'(x)=3x^2-6x+5$$
$$f''(x)=6x-6$$

$f''(x)=0 \Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow 6x=6/:6 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$f(1)=(1)^3-3(1)^2+5(1)-10=1-3+5-10 \Rightarrow \boxed{y=-7}$

$\Rightarrow In(1,-7)$

مثال ۵: تحولات تابع $f(x)=x^2-6x+5$ را مطالعه نمایید.

$f(x)=x^2-6x+5$

$f'(x)=2x-6$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow 2x=6/:2 \Rightarrow \boxed{x=3}$

$f(3)=(3)^2-6(3)+5=9-18+5=-4 \Rightarrow \boxed{y=-4}$

نقطه اصغری $f''(x)=2 \Rightarrow f''(3)=2>0 \min \Rightarrow P(3,-4)(\min)$

در نتیجه تابع نقطه انعطاف ندارد. $\Leftarrow$ امکان ندارد $f''(x)=0 \Rightarrow 2=0$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)=2x-6$	$-$	0	$+$
$f(x)=x^2-6x+5$	↘ متناقص	-4 min	↗ متزاید

پس در نتیجه تابع مذکور در انترول $(-\infty,3)$ متناقص بوده و در انتروال $(3,+\infty)$ متزاید می‌باشد.

برای دریافت تقاطع با محورات

۱- تقاطع با محور x

$y=0 \Rightarrow x^2-6x+5=0$

$(x-5)(x-1)=0$

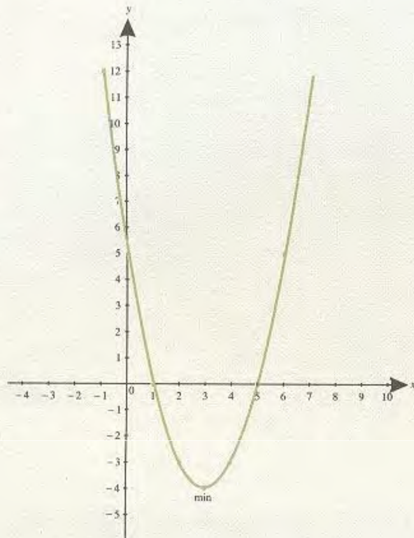
$x-5=0 \Rightarrow x=5 \Rightarrow P_1(5,0)$

$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow P_2(1,0)$

۲- تقاطع با محور y

$x=0 \Rightarrow y=0^2-6(0)+5=5 \Rightarrow P_3(0,5)$

x	$-\infty...$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$....+\infty$
y	....	12	5	0	-3	-4 min	-3	0	5	12	....



مثال ۶: تحولات تابع $f(x)=-x^2-2x+8$ را مطالعه نمایید.

$f(x)=-x^2-2x+8$

$f'(x)=-2x-2$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=0 \Rightarrow -2x-2=0 \Rightarrow -2x=2/:-2 \Rightarrow x=-1 \\ f(-1)=-(-1)^2-2(-1)+8=-1+2+8 \Rightarrow y=+9 \end{array}\right\}$$

نقطه اعظمی $\Rightarrow p(-1,9)$

$f''(x)=-2 \Rightarrow f''(-1)=-2<0 \max$

در نتیجه تابع نقطه انعطاف ندارد. $\Leftarrow$امکان ندارد $f''(x)=0 \Rightarrow -2=0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)=-2x-2$	$+$	0	$-$
$f(x)=-x^2-2x+8$	↗ متزاید	$+9$ max	↘ متناقص

پس درنتیجه تابع در انتروال $(-\infty,-1)$ متزاید است.
در انتروال $(-1,+\infty)$ متناقص است.

تقاطع با محورات

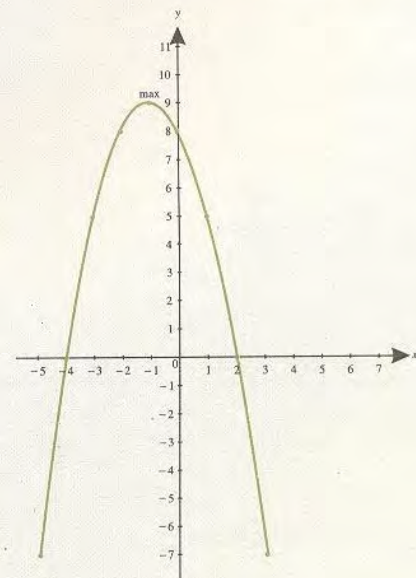
۱- تقاطع با محور x

$$y=0 \Rightarrow -x^2-2x+8=0/\cdot -1$$
$$x^2+2x-8=0 \Rightarrow (x+4)(x-2)=0$$
$$x+4=0 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow P_1(-4,0)$$
$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow P_2(2,0)$$

۲- تقاطع با محور y

$$x=0 \Rightarrow y=-(0)^2-2(0)+8=+8 \Rightarrow y=+8 \Rightarrow P_3(0,+8)$$

x	$-\infty$....	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	....$+\infty$
y	...	-7	0	$+5$	$+8$	$+9$ max	$+8$	$+5$	0	-7	...



مثال ۷: تحولات تابع $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+4$ را مطالعه نمایید.

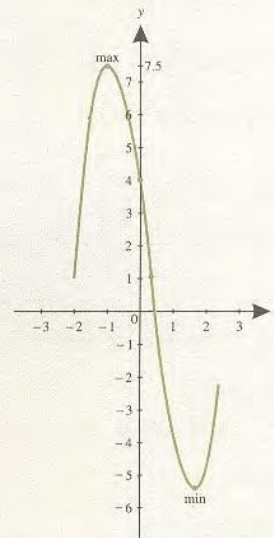
$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+4$$
$$f'(x)=3x^2-3x-6$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3x-6=0/:3 \Rightarrow x^2-x-2=0$$
$$(x+1)(x-2)=0$$
$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow f(-1)=(-1)^3-\frac{3}{2}(-1)^2-6(-1)+4$$
$$f(-1)=-1-1.5+6+4=+7.5 \Rightarrow P_1(-1,+7.5)$$
$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f(2)=(2)^3-\frac{3}{2}(2)^2-6(2)+4$$
$$\Rightarrow f(2)=8-6-12+4=-6 \Rightarrow P_2(2,-6)$$
$$\Rightarrow f''(x)=6x-3$$
$$f''(-1)=6(-1)-3=-6-3=-18<0$$
$\Rightarrow P_1(-1,+7.5)$ max اعظمی

$$f''(2)=6(2)-3=12-3=+9>0$$
$\Rightarrow P_2(2,-6)$ min اصغری

$$\Rightarrow f''(x)=0 \Rightarrow 6x-3=0 \Rightarrow 6x=3/:6 \Rightarrow x=\frac{3}{6} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$
$$f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^3-\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^2-6(\frac{1}{2})+4$$
$$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}-\frac{3}{8}-3+4=\frac{1}{8}-\frac{3}{8}+1$$
$f(\frac{1}{2})=\frac{1-3+8}{8} \Rightarrow f(\frac{1}{2})=\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \Rightarrow In(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ نقطه انعطاف

تابع در انتروال‌های $(2,+\infty)$ و $(-\infty,-1)$ متزاید و در انتروال‌هـای $(\frac{1}{2},2)$ و $(-1,\frac{1}{2})$ متناقص است.

x	$-\infty\ldots$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$\ldots.+\infty$
$f'(x)=3x^2-3x-6$	+	o −	−	− +	
$f(x)$	↗	$+7{,}5$ max ↘	$\frac{3}{4}$ In ↘	-6 min ↗	



مثال ۸: تحولات تابع $f(x)=-x^3+3x-5$ را دریافت نمایید.

$f(x)=-x^3+3x-5$

$f'(x)=-3x^2+3$

$f'(x)=0\Rightarrow -3x^2+3=0$

$\Rightarrow -3x^2=-3/:-3\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$

$f(+1)=-(+1)^3+3(+1)-5=-1+3-5=-3\Rightarrow P_1(+1,-3)$

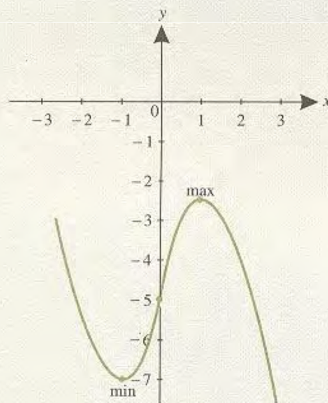
$f(-1)=-(-1)^3+3(-1)-5=+1-3-5=-7\Rightarrow P_2(-1,-7)$

$$f''(x)=-6x\begin{cases}f''(+1)=-6(+1)=-6<0\Rightarrow P_1(+1,-3)\ \max\\ f''(-1)=-6(-1)=+6>0\Rightarrow P_2(-1,-7)\ \min\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow f''(x)=0\Rightarrow -6x=0/:-6\Rightarrow x=0\\ f(0)=-(0)^3+3(0)-5=-5\end{array}\right\}\ In(0,-5)\ \text{انعطاف}$$

پس در نتیجه تابع در انتروال $(+1,+\infty)$ و $(-\infty,-1)$ متناقص و در انتروال $(0,+1)$ و $(-1,0)$ متزاید است.

x	$-\infty\ldots$	-1	0	$+1$	$\ldots.+\infty$
$f'(x)=-3x^2+3$	−	o +	+	o −	
$f(x)$		-7 min	-5 In	-3 max	



تحولات توابع مثلثاتی

I- تحولات تابع $f(x)=\sin x$ در انتروال $[0,2\pi]$:

$f(x)=\sin x$

$f'(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow \cos x=0$

برای دریافت نقاط اعظمی و اصغری:

$$\Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = +1$$

$$\Rightarrow P_1(\frac{\pi}{2}, +1)$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos\frac{3\pi}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{3\pi}{2}) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\Rightarrow P_2(\frac{3\pi}{2}, -1)$$

$$f''(x) = -\sin x \begin{cases} f''(\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 < 0 \\ \Rightarrow p_1(\frac{\pi}{2}, +1)\ \text{max} \\ f''(\frac{3\pi}{2}) = -\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1) = +1 > 0 \\ \Rightarrow P_2(\frac{3\pi}{2}, -1)\ \text{min} \end{cases}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -\sin x = 0 / \cdot -1 \Rightarrow \sin x = 0$$

برای دریافت نقاط انعطاف:

$$\sin x = \sin 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$\Rightarrow f(0) = \sin 0 = 0 \Rightarrow In_1(0,0)$ نقطه انعطاف

$$\sin x = \sin\pi \Rightarrow x_2 = \pi$$

$\Rightarrow f(\pi) = \sin\pi = 0 \Rightarrow In_2(\pi, 0)$ نقطه انعطاف

$$\sin x = \sin 2\pi \Rightarrow x_3 = 2\pi$$

$\Rightarrow f(2\pi) = \sin 2\pi = 0 \Rightarrow In_3(2\pi, 0)$ نقطه انعطاف

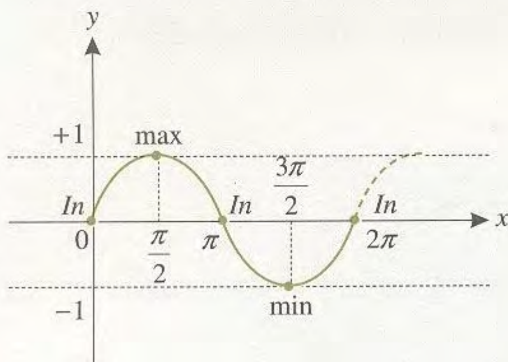
برای تعیین ساحه تزاید و تناقص تابع فوق

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=f(x)$	0	$+1$	0	-1	0
	Iv	max	In	min	In

در نتیجه تابع:

$f(x) = \sin x$ در انتروال $[0, 2\pi)]$

1(max) اعظمی	1(min) اصغری	3(In) انعطاف	متزاید	متناقص
$(\frac{\pi}{2}, +1)$	$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(0,0)$	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$
		$(\pi, 0)$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$
		$(2\pi, 0)$		

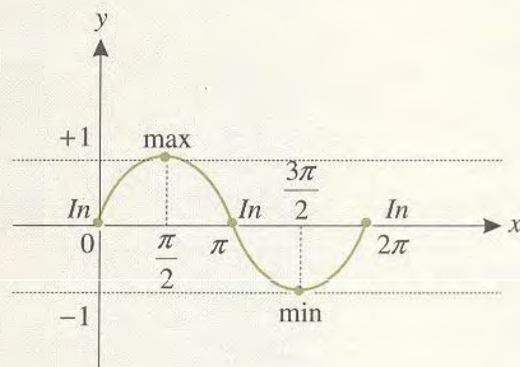


چون تابع $f(x) = \sin x$ یک تابع مثلثاتی پریودیک (متناوب) بوده که پریود آن به اندازه (2π) می‌باشد، پس برای n پریود می‌توان تعداد نقاط اعظمی، اصغری و انعطاف تابع فوق ذکر را چنین تعیین نمود:

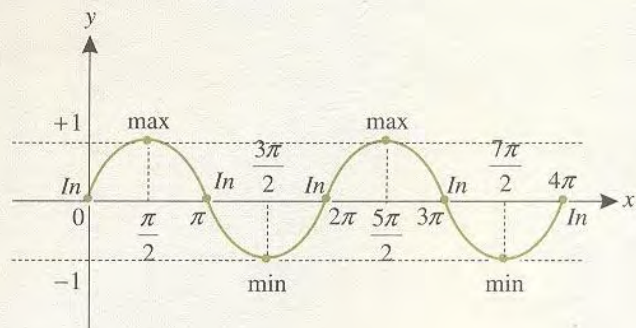
$f(x)=\sin x\,,[0,2n\pi]$

n	n	2n+1
اعظمی (max)	اصغری (min)	انعطاف (In)

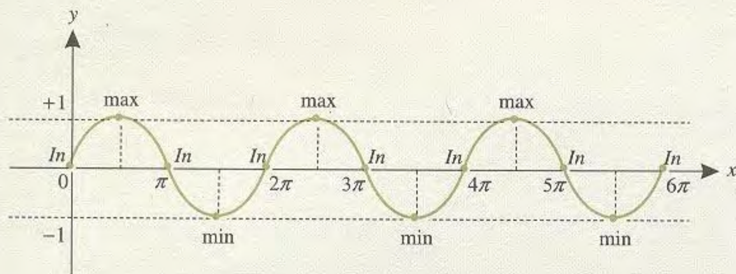
مثلاً: $n=1\Rightarrow[0,2\pi]\Rightarrow 1\max,\ 1\min,\ 3\,In$



$n=2\Rightarrow[0,4\pi]\Rightarrow 2\max,\ 2\min,\ 5\,In$



$n=3\Rightarrow[0,6\pi]\Rightarrow 3\max,\ 3\min,\ 7\,In$



بخاطر داشته باشید که تابع $f(x)=\sin x$ برای $x<0$ نیز عین پریود را دارا می‌باشد.

مثال: تحولات تابع $f(x)=\sin x$ را در انتـروال $[-2\pi,0]$ مطالعـه نمایید.

$$f(x)=\sin x$$

$$f'(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow\cos x=0$$

$$\Rightarrow\cos x=\cos(-\frac{\pi}{2})\Rightarrow x_1=-\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow f(-\frac{\pi}{2})=\sin(-\frac{\pi}{2})=-\sin\frac{\pi}{2}=-1\Rightarrow P_1(-\frac{\pi}{2},-1)$$

$$\Rightarrow\cos x=\cos(-\frac{3\pi}{2})\Rightarrow x_2=-\frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow f(-\frac{3\pi}{2})=\sin(-\frac{3\pi}{2})=-\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$=-(-1)=+1\Rightarrow P_2(-\frac{3\pi}{2},+1)$$

$$f''(x)=-\sin x\begin{cases}f''(-\frac{\pi}{2})=-\sin(-\frac{\pi}{2})=-(-\sin\frac{\pi}{2})=-(-1)=+1>0\\ \Rightarrow P_1(\frac{-\pi}{2},-1)\min\\ f''(-\frac{3\pi}{2})=-\sin(-\frac{3\pi}{2})=-(-\sin\frac{3\pi}{2})=+(-1)=-1<0\\ \Rightarrow P_2(-\frac{3\pi}{2},+1)\max\end{cases}$$

$$\Rightarrow f''(x)=0 \Rightarrow -\sin x=0/-1 \Rightarrow \sin x=0$$

برای دریافت نقاط انعطاف:

$$\Rightarrow \sin x=\sin 0 \Rightarrow x_1=0$$

$f(0)=\sin 0=0 \Rightarrow In_1(0,0)$ نقطه انعطاف

$$\Rightarrow \sin x=\sin(-\pi) \Rightarrow x_2=-\pi$$

$f(-\pi)=\sin(-\pi)=-\sin\pi=-(0)=0 \Rightarrow In_2(-\pi,0)$ نقطه انعطاف

$$\Rightarrow \sin x=\sin(-2\pi) \Rightarrow x_3=-2\pi$$

$f(-2\pi)=\sin(-2\pi)=-\sin 2\pi=-(0)=0 \Rightarrow In_3(-2\pi,0)$ نقطه انعطاف

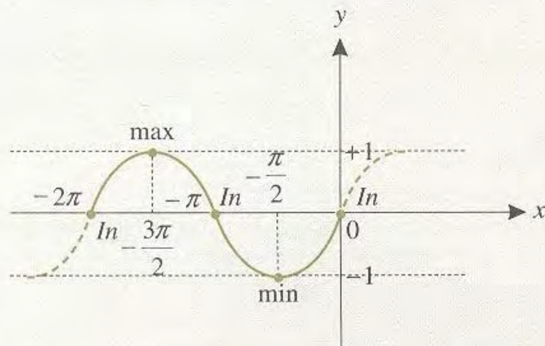
برای تعیین ساحه تزاید و تناقص تابع

x	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0
$y=f(x)$		↗		↘		↘		↗	
	0 In		+1 max		0 In		−1 min		0 In

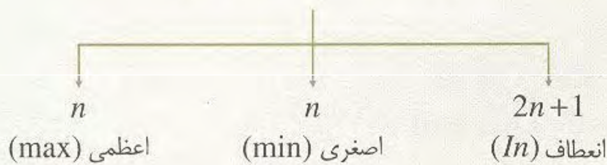
در نتیجه تابع:

$f(x)=\sin x$ در انتروال $[-2\pi,0]$

اصغری 1(min)	اعظمی 1(max)	انعطاف 3(*In*)	متزاید	متناقص
$(\frac{-\pi}{2},0)$	$(\frac{-3\pi}{2},0)$	$(-2\pi,0)$	$(-2\pi,\frac{-3\pi}{2})$	$(\frac{-3\pi}{2},-\pi)$
		$(-\pi,0)$	$(\frac{-\pi}{2},0)$	$(-\pi,\frac{-\pi}{2})$
		$(0,0)$		



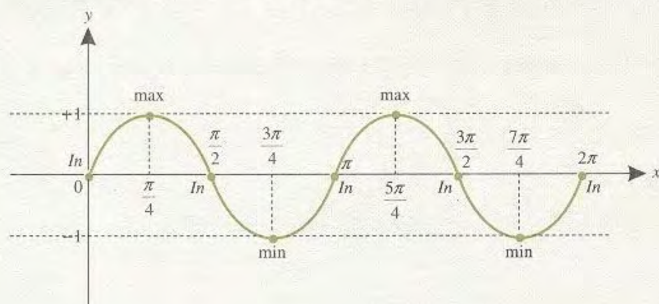
به همین ترتیب نقـاط اکـستریم و انعطـاف تـابع $f(x)=\sin(nx)$ در انتروال $[0,2\pi]$ طوریکه $n=1,2,3,.....$ باشد، بطور عموم چنـین تعیـین می گردد.



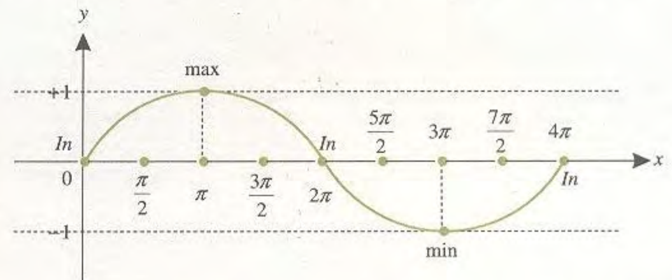
مثلاً:

$$n=1 \Rightarrow f(x)=\sin x \Rightarrow 1\max, 1\min, 3\,In$$
$$n=2 \Rightarrow f(x)=\sin 2x \Rightarrow 2\max, 2\min, 5\,In$$
$$n=3 \Rightarrow f(x)=\sin 3x \Rightarrow 3\max, 3\min, 7\,In$$
$$n=4 \Rightarrow f(x)=\sin 4x \Rightarrow 4\max, 4\min, 9\,In$$

که گراف تابع $f(x)=\sin 2x$ در انتروال $[0,2\pi]$ عبارت از:



همچنان گراف تابع $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ در انتروال $[0,2\pi]$ عبارت از:



II- تحولات تابع $f(x)=\cos x$ در انتروال $[0,2\pi]$:

$f(x)=\cos x$

$f'(x)=-\sin x \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow -\sin x=0/\cdot -1 \Rightarrow \sin x=0$

برای دریافت نقاط اعظمی و اصغری

$\Rightarrow \sin x=\sin 0 \Rightarrow x_1=0$

$f(0)=\cos 0=+1 \Rightarrow P_1(0,+1)$ max اعظمی

$\Rightarrow \sin x=\sin\pi \Rightarrow x_2=\pi$

$f(\pi)=\cos\pi=-1 \Rightarrow P_2(\pi,-1)$ min اصغری

$\Rightarrow \sin x=\sin 2\pi \Rightarrow x_3=2\pi$

$f(2\pi)=\cos 2\pi=+1 \Rightarrow P_3(2\pi,+1)$ max اعظمی

$$f''(x)=-\cos x \begin{cases} f''(0)=-\cos 0=-(+1)=-1<0 \text{ max} \\ f''(\pi)=-\cos\pi=-(-1)=+1>0 \text{ min} \\ f''(2\pi)=-\cos 2\pi=-(+1)=-1<0 \text{ max} \end{cases}$$

$f''(x)=0 \Rightarrow -\cos x=0/\cdot -1 \Rightarrow \cos x=0$ برای دریافت نقاط انعطاف

$\cos x=\cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f(\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow In_1(\frac{\pi}{2},0)$ نقطه انعطاف

$\cos x=\cos\frac{3\pi}{2} \Rightarrow x_2=\frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow f(\frac{3\pi}{2})=\cos\frac{3\pi}{2}=0 \Rightarrow In_2(\frac{3\pi}{2},0)$ نقطه انعطاف

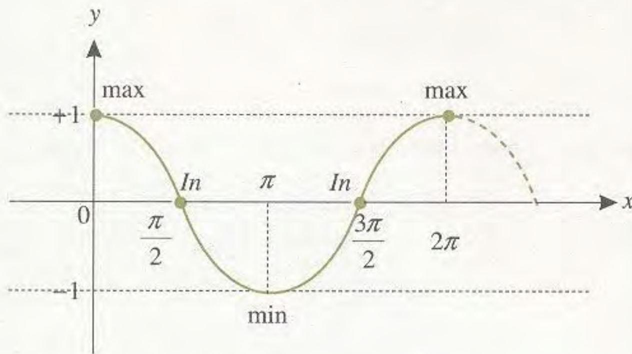
برای تعیین ساحه تزاید و تناقص تابع فوق:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$y=f(x)$	+1 max	↘	0 In	↘	−1 min	↗	0 In	↗	+1 max

در نتیجه:

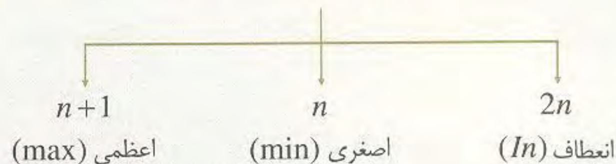
$f(x)=\cos x$ در انتروال $[0,2\pi]$

متناقص	متزاید	انعطاف $2(In)$	اصغری $1(\min)$	اعظمی $2(\max)$
$(0,\frac{\pi}{2})$	$(\pi,\frac{3\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2},0)$	$(\pi,-1)$	$(0,+1)$
$(\frac{\pi}{2},\pi)$	$(\frac{3\pi}{2},2\pi)$	$(\frac{3\pi}{2},0)$		$(2\pi,+1)$



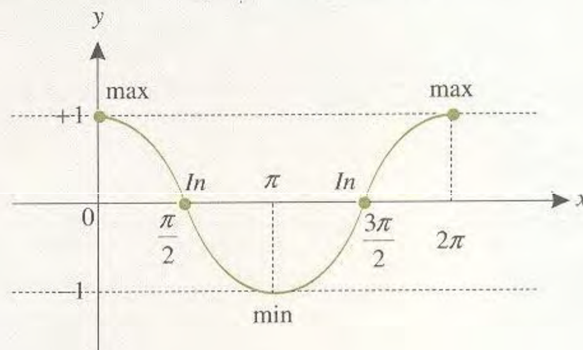
چون تابع $f(x)=\cos x$ نیـز یـک تـابع مثلثـاتی پریودیـک (متنـاوب) می‌باشد که پریود آن به اندازه (2π) است. پس بـرای n پریـود مـی‌تـوان

تعداد نقاط اکستریم (اعظمی و اصغری) و نقاط انعطاف تـابع مـذکور را چنـین تعیین نمود.

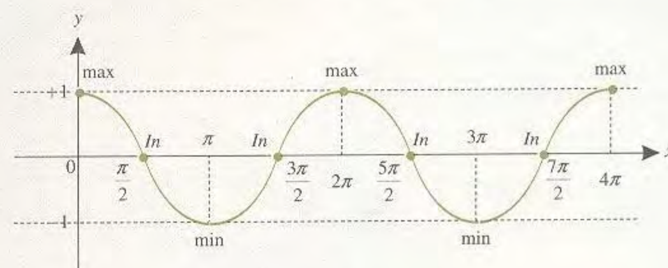


مثلاً:

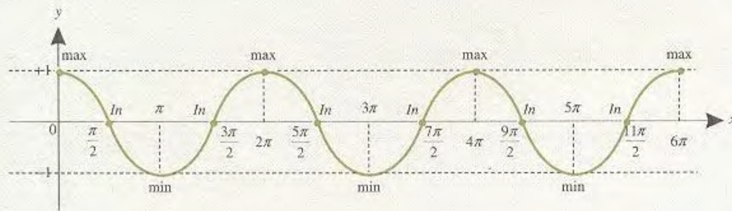
$n=1 \Rightarrow [0,2\pi] \Rightarrow 2\max, 1\min, 2In$



$n=2 \Rightarrow [0,4\pi] \Rightarrow 3\max, 2\min, 4In$



$n=3 \Rightarrow [0,6\pi] \Rightarrow 4\max, 3\min, 6In$



بخاطر داشته باشید که تابع $f(x)=\cos x$ برای $x<0$ نیز عین پریود را دارا می‌باشد.

مثال: تحولات تابع $f(x)=\cos x$ را در انتروال $[-2\pi,0]$ مطالعه نمایید.

$f(x)=\cos x$

$f'(x)=-\sin x \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow -\sin x=0/\cdot-1$

برای دریافت نقاط اعظمی و اصغری:

$\sin x=0$

$\sin x=\sin 0 \Rightarrow x_1=0$

$\Rightarrow f(0)=\cos 0=+1 \Rightarrow P_1(0,+1)$ max اعظمی

$\sin x=\sin(-\pi) \Rightarrow x_2=-\pi$

$\Rightarrow f(-\pi)=\cos(-\pi)=\cos\pi=-1 \Rightarrow P_2(-\pi,-1)$ min اصغری

$\sin x=\sin(-2\pi) \Rightarrow x_3=-2\pi$

$\Rightarrow f(-2\pi)=\cos(-2\pi)=\cos 2\pi=+1 \Rightarrow P_3(-2\pi,+1)$ max اعظمی

$$f''(x)=-\cos x\begin{cases} f''(0)=-\cos 0=-(+1)=-1<0 \max \\ f''(-\pi)=-\cos(-\pi)=-\cos\pi=-(-1)=+1>0 \min \\ f''(-2\pi)=-\cos(-2\pi)=-\cos 2\pi=-(+1)=-1<0 \max \end{cases}$$

$\Rightarrow f''(x)=0 \Rightarrow -\cos x=0/\cdot-1 \Rightarrow \cos x=0$ برای دریافت نقاط انعطاف

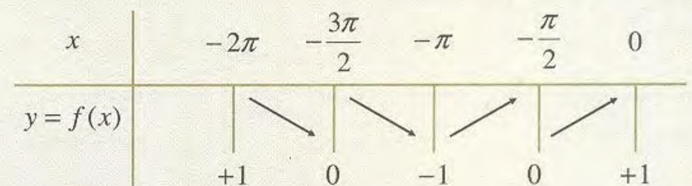
$\Rightarrow \cos x=\cos(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow x_1=-\frac{\pi}{2}$

$f(-\frac{\pi}{2})=\cos(-\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow In_1(-\frac{\pi}{2},0)$ نقطه انعطاف

$$\Rightarrow \cos x=\cos(-\frac{3\pi}{2}) \Rightarrow x_2=-\frac{3\pi}{2}$$

نقطه انعطاف $f(-\frac{3\pi}{2})=\cos(-\frac{3\pi}{2})=\cos\frac{3\pi}{2}=0 \Rightarrow In_3\ (-\frac{3\pi}{2},0)$

برای تعیین ساحه تزاید و تناقص تابع:

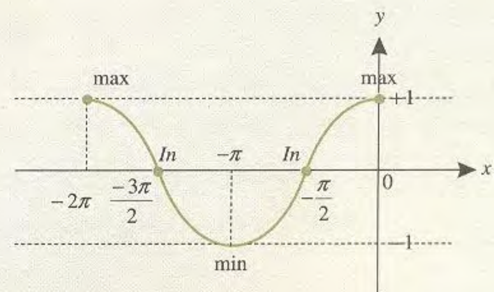


x	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0
$y=f(x)$	$+1$	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+1$

در نتیجه:

$f(x)=\cos x$ در انتروال $[-2\pi,0]$

$2(\max)$ اعظمی	$1(\min)$ اصغری	$2(In)$ انعطاف	متزاید	متناقص
$(0,+1)$	$(-\pi,-1)$	$(-\frac{\pi}{2},0)$	$(-2\pi,\frac{-3\pi}{2})$	$(-\pi,-\frac{\pi}{2})$
$(-2\pi,+1)$		$(\frac{-3\pi}{2},0)$	$(\frac{-3\pi}{2},-\pi)$	$(-\frac{\pi}{2},0)$



به همین ترتیب نقاط اکستریم و انعطـاف تـابع $f(x)=\cos(nx)$ در انتروال $[0,2\pi]$ در حالیکـه $n=1,2,3,......$ باشـد، بطـور عمـوم چنـین تعیین می گردد.

$$f(x)=\cos(nx)\ ,\ [0,2\pi]$$

n+1	n	2n
اعظمی (max)	اصغری (min)	انعطاف (In)

مثلاً:

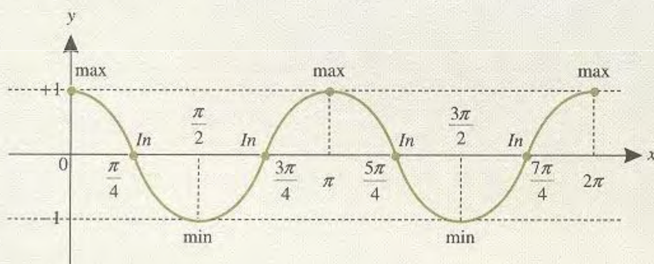
$n=1 \Rightarrow f(x)=\cos x \Rightarrow 2\max, 1\min, 2In$

$n=2 \Rightarrow f(x)=\cos 2x \Rightarrow 3\max, 2\min, 4In$

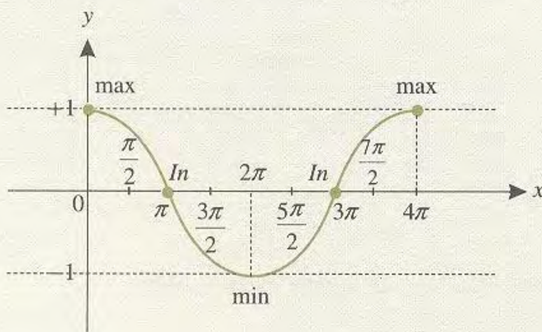
$n=3 \Rightarrow f(x)=\cos 3x \Rightarrow 4\max, 3\min, 6In$

$n=4 \Rightarrow f(x)=\cos 4x \Rightarrow 5\max, 4\min, 8In$

که گراف تابع $f(x)=\cos 2x$ در انتروال $[0,2\pi]$ عبارت از:



همچنان گراف تابع $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ در انتروال $[0,2\pi]$ عبارت از:



گراف توابع ناطق (نسبتی)

توابع که در شکل تقسیم دو پولینوم مانند $p(x)$ و $q(x)$ قـرار داشـته باشد، یعنی $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ، $q(x)\neq 0$ به نام توابع ناطق (نسبتی) نامیـده می‌شوند. قبل بر اینکه گراف توابع مذکور را ترسیم نمـاییم، بـه مجانـب‌هـای توابع را از نگاه لیمت توابع توضیح می‌نماییم.

مجانب عمودی: خط مستقیم $x=c$ عبارت از مجانب عمودی منحنـی تابع $y=f(x)$ است، درصورتیکه $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$ گردد.

در توابع الجبری جذور افاده مخرج عبارت از مجانب‌های عمـودی گـراف تابع را تعیین می‌کند. برای این منظور $q(x)=0$ (مخرج مـساوی بـه صـفر) قرار داده شده در نتیجه $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$ می‌گردد.

مجانب مایل: خـط مـستقیم $y=ax+b$ معادلـه مجانـب مایـل تـابع $y=f(x)$ مـــــی‌باشــــد، درصــــورتیکه $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}\neq 0$ و $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$ باشد.

در توابع ناطق هرگاه درجه متحـول صورت یـک واحد بیـشتر از درجـه متحول مخرج باشد، حاصل تقسیم آن یک تابع خطی $y=ax+b$ بوده کـه عبارت از معادله مجانب مایل می‌باشد.

مجانب افقـی: هرگـاه در معادلـه مجانـب مایـل $y=ax+b$ مربـوط منحنی تابع $y=f(x)$ ، عدد $a=0$ باشـد، در اینـصورت مـستقیم $y=b$ عبارت از مجانب افقی یاد می‌گردد. پس در نتیجه یک منحنی می‌تواند دارای مجانب مایل و یا افقی باشد که مجانب افقی یـک حالـت خاصـی از مجانـب مایل است.

معمولاً مجانب افقی در توابع ناطق وقتی موجود می‌گردد کـه درجـه‌هـای متحول صورت و مخرج با همدیگر مساوی باشـند کـه مـی‌تـوان $y=b$ را از رابطه $b=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ تعیین گردد.

مثال‌ها:

مثال ۱: مجانب عمودی تابع $f(x)=\dfrac{x+4}{3x-9}$ را دریابید.

$3x-9=0 \Rightarrow 3x=9/:3 \Rightarrow x=3$ ، $0=$ افاده مخرج

زیرا:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x+4}{3x-9}=\frac{3+4}{3(3)-9}=\frac{7}{9-9}=\frac{7}{0}=\infty$$

مثال ۲: مجانب‌های تابع $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ را دریابید.

مجانب‌های عمودی $0=$ افاده مخرج

$$\Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow x=+2 \text{ و } x=-2$$

زیرا:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^2-4}=\frac{4+1}{4-4}=\frac{5}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+1}{x^2-4}=\frac{4+1}{4-4}=\frac{5}{0}=\infty$$

چون درجه متحول صورت و مخرج باهم مساوی انـد، بنـاءً تـابع مجانـب افقی دارد که عبارت از:

$$y=b \Rightarrow b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-4}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{1+0}{1-0}=\frac{1}{1}=1$$

$\Rightarrow y=b \Rightarrow y=1$ مجانب افقی

تابع مجانب مایل ندارد، دارای دو مجانب عمـودی و یـک مجانـب افقـی می‌باشد.

مثال ۳: معادله مجانب مایل تابع $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x}$ را دریابید.

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-3x+1}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1}=\frac{1-0+0}{1}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-3x+1}{x}-x\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1-x^2}{x}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-3x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{1}{x}}{1}=-3+0=-3$$

پس در نتیجه معادله مجانب مایل:

$$y=ax+b$$

$$y=1x+(-3)\Rightarrow y=x-3$$

چون تابع در شکل ناطق است پس می‌توان مجانب مایل آن را از حاصل تقسیم صورت و مخرج کسر چنین به دست آورد.

$$\begin{array}{l|l} x^2-3x+1 & x \\ \hline \pm x^2 & x-3 \\ \hline -3x+1 & \\ \pm 3x & \\ \hline +1 & \end{array}$$

معادله مجانب مایل $y=x-3$

مثال ۴: تعداد مجانب‌های تابع $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^3-x}$ را دریابید.

مجانب عمودی $0=x^3-x \Rightarrow x^3-x=0$ افاده مخرج $=0$

$$x(x^2-1)=0\Rightarrow x(x-1)(x+1)=0$$

$x=0$ محور y ، $x-1=0\Rightarrow x=1,\ x+1=0\Rightarrow x=-1$

$$y=b\Rightarrow b=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{x^3-x}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{0+0}{1-0}=\frac{0}{1}=0\Rightarrow b=0$$

$\Rightarrow y=b\Rightarrow y=0$ محور x

پس در نتیجه تابع دارای چهار مجانب (سه مجانب عمودی و یک مجانب افقی) می‌باشد.

مثال ۵: مجانب‌های تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ را تعیین نمایید.

مجانب عمودی $x=-1 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow 0=$ افاده مخرج $=0$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x+1 \\ \hline \pm x^2 \pm x & x-1 \\ \hline -x & \\ \mp x \mp 1 & \\ \hline +1 & \end{array}$$

مجانب مایل $y=x-1$

مجانب افقی ندارد.

زیرا:

$y=b \Rightarrow b=\lim_{x\to\infty} f(x)$

$b=\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1}=\infty$

در نتیجه مجانب نیست $\Rightarrow b=\infty$

جهت ترسیم منحنی‌های توابع ناطق، نکات ذیل را در نظر داشته باشید.

۱- ساحه تحول، متحول باید مطالعه شود، یعنی دیده شود که به کدام قیمت‌های متحول، تابع معین و متمادی است.

۲- قیمت‌های اعظمی و اصغری تابع را جستجو نموده و برای این منظور اشاره مشتق تابع مطلوب مطالعه شود.

۳- نقاط تقاطع منحنی با محورات را دریافت کرده و برای این منظور x را مساوی به صفر قرار داده قیمت y را دریافت می‌نمایم و بعداً y را مساوی به صفر ساخته، قیمت x را دریافت می‌نمایم.

۴- نقطه انعطاف را پیدا کرده و برای این منظور مشتق دوم تابع را مطالعه می‌نماییم.

۵- اگر تابع دارای مجانب باشد، مجانب‌های آن را دریافت می‌نمایم.

۶- از مقادیر x بصورت صعودی جدول را ترتیب نموده اشاره مشتق در جدول درج می‌گردد.

۷- از روی جدول ترتیب شده منحنی تابع را به سهولت ترسیم می‌نماییم.

نوت:

۱. هرگاه تابع مورد مطالعه ما یک تابع جفت باشد که شرط $f(-x)=f(x)$ را صدق نماید، چون منحنی این نوع توابع نظر به محور y متناظر اند، بناءً کفایت می‌کند که به قیمت‌های مثبت متحول منحنی را ترسیم نموده و بعداً متناظر آن را برای قیمت‌های منفی متحول ترسیم نمود، مانند تابع $y=x^2$ یا $y=\cos x$ و غیره.

۲. اگر تابع $y=f(x)$ یک تابع طاق باشد که شرط $f(-x)=-f(x)$ را صدق نماید، چون منحنی این توابع نظر به مبده متناظر اند، بناءً کفایت می‌کند که به قیمت‌های مثبت متحول گراف تابع رسم گردد و بعداً متناظر آن را نظر به مبدأ برای قیمت‌های منفی متحول رسم نمود. مانند توابع $y=x^3$ ، $y=\sin x$ و غیره.

مثال ها:

تحول توابع ذیل را مطالعه نموده، گراف آن را ترسیم نمایید.

مثال ۱: گراف تابع ذیل را ترسیم نمایید. $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

محور y مجانب عمودی $\Rightarrow x=0$

مجانب افقی ندارد $y=\infty$ $\Rightarrow$ $y=\lim_{x\to\infty} f(x) \Rightarrow y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}=\infty$

مجانب افقی (موازی)

معادله مجانب مایل $y=\frac{x^2+1}{x}=(x+\frac{1}{x}) \Rightarrow y_1=x$ مجانب مایل

جدول گراف مجانب مایل

x	...	-2	-1	0	$+1$	$+2$	...
y		-2	-1	0	$+1$	$+2$	...

جهت دریافت نقاط اکستریم تابع مذکور $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-1(x^2+1)}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ x^2\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

$$f(+1)=\frac{(+1)^2+1}{+1}=\frac{+1+1}{+1}=\frac{+2}{+1}=+2 \Rightarrow P_1(+1,+2)$$

$$f(-1)=\frac{(-1)^2+1}{-1}=\frac{+1+1}{-1}=\frac{+2}{-1}=-2 \Rightarrow P_2(-1,-2)$$

$$f''(x)=\frac{2x(x^2)-2x(x^2-1)}{(x^2)^2}=\frac{2x^3-2x^3+2x}{x^4}=\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$$

$$f''(+1)=\frac{2}{(+1)^3}=\frac{+2}{+1}=+2>0\Rightarrow P_1(+1,+2)\min$$

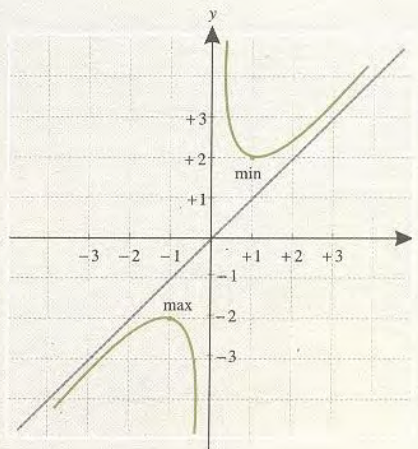
$$f''(-1)=\frac{2}{(-1)^3}=\frac{+2}{-1}=-2<0\Rightarrow P_2(-1,-2)\max$$

برای دریافت نقطه انعطاف تابع $f''(x)=0$

$\frac{2}{x^3}=0\Rightarrow 2=0$ امکان ندارد

پس در نتیجه تابع مذکور نقطه انعطاف ندارد.

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
y'	+	0	−		−	0	+
y	↗	-2 max	↘	$\pm\infty$	↘	2 min	↗



مثال ۲: گراف تابع ذیل را ترسیم نمایید. $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$

دو مجانب عمودی $x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$ مجانب عمودی

$y=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{\infty-4}=\frac{1}{\infty}=0$ مجانب افقی (موازی)

$y=0$ (محور x)

تابع مجانب مایل ندارد، زیرا درجه متحول مخرج بزرگ از صورت می‌باشد.

جهت دریافت نقاط اکستریم تابع مذکور:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-4}$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-2x}{(x^2-4)^2}=0$$

$$\left.\begin{aligned}-2x=0\\(x^2-4)^2\neq 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow -2x=0/:-2\Rightarrow x=0$$

$$y=f(0)=\frac{1}{0^2-4}=\frac{1}{-4}\Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{4}}\Rightarrow P(0,-\frac{1}{4})$$

$$f''(x)=\frac{-2(x^2-4)^2+2x[2(x^2-4)\cdot 2x]}{(x^2-4)^4}$$

$$=\frac{(x^2-4)[-2(x^2-4)+8x^2]}{(x^2-4)^4}$$

$$f''(x)=\frac{6x^2+8}{(x^2-4)^3}\Rightarrow f''(0)=\frac{0+8}{(-4)^3}$$

$$=\frac{+8}{-64}=-\frac{1}{8}<0\Rightarrow P(0,-\frac{1}{4})\max$$

برای دریافت نقطه انعطاف $f''(x)=0\Rightarrow\frac{6x^2+8}{(x^2-4)^3}=0$

$$6x^2+8=0 \\ (x^2-4)^3 \neq 0 \Bigg\} \Rightarrow 6x^2+8=0 \Rightarrow 6x^2=-8$$

$$x^2=-\frac{4}{3} \Rightarrow x=$$ جذر حقیقی ندارد

تابع مذکور دارای نقطه انعطاف نمی‌باشد.

x	$-\infty$	-2		0		$+2$	$+\infty$
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	↗		↗		↘		↘ 0
		$\pm\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\pm\infty$	
		مجانب عمودی		max		مجانب عمودی	

y, +3, +2, +1, −3, −2, −1, max, +1, +2, +3, x, −1, −2, −3

مثال ۳: گراف تابع ذیل را ترسیم نمایید. $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2+x-2}$

مجانب عمودی $x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0$

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$ مجانب عمودی

$x-1=0 \Rightarrow x=+1$ مجانب عمودی

مجانب افقی $y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-6}{x^2+x-2}=\frac{\infty}{\infty}$

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}-\frac{6}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}$$

$$=\frac{1+0-0}{1+0-0}=1 \Rightarrow \boxed{y=1}$$

تابع مجانب مایل ندارد، زیرا درجه متحول صـورت و مخـرج بـا همـدیگر مساوی می‌باشد.

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+x-2)-(2x+1)(x^2+x-6)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$=\frac{(2x+1)(x^2+x-2-x^2-x+6)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(4)}{(x^2+x-2)^2}=\frac{8x+4}{(x^2+x-2)^2}$$

$$8x+4=0 \\ (x^2+x-2)^2 \neq 0 \Bigg\} \Rightarrow 8x+4=0$$

$$8x=-4/:8 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$f(-\frac{1}{2})=\frac{(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-6}{(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-2}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{13}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{5}{2}}=\frac{\frac{1-26}{4}}{\frac{1-10}{4}}=\frac{25}{9}=2.77$$

$$P(x,y) \Rightarrow P(-0.5,\ 2.77)$$

$$f''(x)=\frac{8(x^2+x-2)^2-(8x+4)(x^2+x-2)(2x+1)}{(x^2+x-2)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+x-2)\cdot\left[8\,(x^2+x-2)-(8x+4)(2x+1)\right]}{(x^2+x-2)^4}$$

$$f''(x)=\frac{8x^2+8x-16-16x^2-16x-4}{(x^2+x-2)^3}=\frac{-8x^2-8x-20}{(x^2+x-2)^3}$$

$$f''(-\frac{1}{2})=\frac{-8(\frac{1}{4})-8(-\frac{1}{2})-20}{(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2)^3}=\frac{-2+4-20}{(\frac{1-2-8}{4})^3}=\frac{-18}{(-\frac{9}{4})^3}$$

$$f''(-\frac{1}{2})=\frac{+128}{81}>0\Rightarrow P(-0{,}5,\ 2{,}77)\min$$

برای دریافت نقطه انعطاف $f''(x)=0$

$$\Rightarrow\frac{-8x^2-8x-20}{(x^2+x-2)^3}=0\Rightarrow -8x^2-8x-20=0,\quad (x^2+x-2)^3\neq 0$$

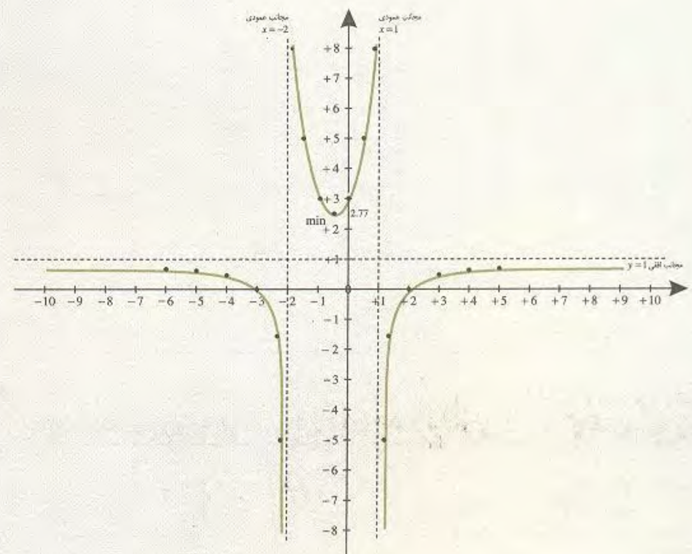
$$-8x^2-8x-20=0\ /:-4$$

$$2x^2+2x+5=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4(2)(5)=4-40=-36$$

$\Rightarrow \Delta<0$ معادله جذر حقیقی ندارد

پس در نتیجه تابع مذکور دارای نقطه انعطاف نمی‌باشد.



مثال ۴: گراف تابع ذیل را ترسیم نمایید. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

تابع دو مجانب عمودی دارد $\Rightarrow x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$

مجانب عمودی

مجانب افقی $y=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2-4}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{4}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}}=\frac{1}{\frac{1}{\infty}-\frac{4}{\infty}}=\frac{1}{0}=\infty$$

پس در نتیجه تابع مجانب افقی ندارد.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-4 \\ \underline{\pm x^3 \mp 4x} & x \\ +4x & \end{array}$$

معادله ناصف ناحیه اول و سوم $y_1=x$

جدول مجانب مایل تابع مذکور

x	....	-2	-1	0	$+1$	$+2$	....
y		-2	-1	0	$+1$	$+2$	.....

جهت دریافت نقاط اکستریم تابع می توان چنین عمل نمود.

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2(x^2-4)-x^3(2x)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x^4-12x^2-2x^4}{(x^2-4)^2}=\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=0\Rightarrow x^4-12x^2=0 \\ (x^2-4)^2\neq 0 \end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow x^2(x^2-12)=0 \\ x^2=0\Rightarrow x_1=0\end{array}$$

$$x^2-12=0\Rightarrow x^2=12\Rightarrow x=\pm\sqrt{12}=\pm 3.4$$

$$\Rightarrow x_2=+3.4,\ x_3=-3.4$$

$$f(0)=\frac{0^3}{0^2-12}=\frac{0}{-12}=0$$

$$f(\sqrt{12})=\frac{(\sqrt{12})^3}{(\sqrt{12})^2-4}=\frac{12\cdot\sqrt{12}}{12-4}$$

$$=\frac{12\cdot 2\sqrt{3}}{8}=\frac{24\sqrt{3}}{8}=3\sqrt{3}=5.1$$

$$f(-\sqrt{12})=\frac{(-\sqrt{12})^3}{(-\sqrt{12})^2-4}=\frac{-12\cdot\sqrt{12}}{12-4}$$

$$=\frac{-12\cdot 2\sqrt{3}}{8}=\frac{-24\sqrt{3}}{8}=-3\sqrt{3}=-5.1$$

$$\Rightarrow P_1(0,0)$$

$$P_2(3.4,5.1)$$

$$P_3(-3.4,-5.1)$$

$$f''(x)=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2-2(x^2-4)(2x)(x^4-12x^2)}{(x^2-4)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2-4)\left[(4x^3-24x)(x^2-4)-4x\,(x^4-12x^2)\right]}{(x^2-4)^4}$$

$$f''(x)=\frac{4x^5-16x^3-24x^3+96x-4x^5+48x^3}{(x^2-4)^3}=\frac{8x^3+96x}{(x^2-4)^3}$$

$$f''(0)=\frac{8(0)^3+96(0)}{(0^2-4)^3}=\frac{0+0}{-64}=\frac{0}{-64}=0$$

پس نقطه $P_1(0,0)$ یک نقطه انعطاف تابع می‌باشد.

$$f''(\sqrt{12})=\frac{8(\sqrt{12})^3+96(\sqrt{12})}{\left[(\sqrt{12})^2-4\right]^3}$$

$$=\frac{8\cdot 12\cdot\sqrt{12}+96\sqrt{12}}{(12-4)^3}=\frac{\sqrt{12}\,(96+96)}{(8)^3}$$

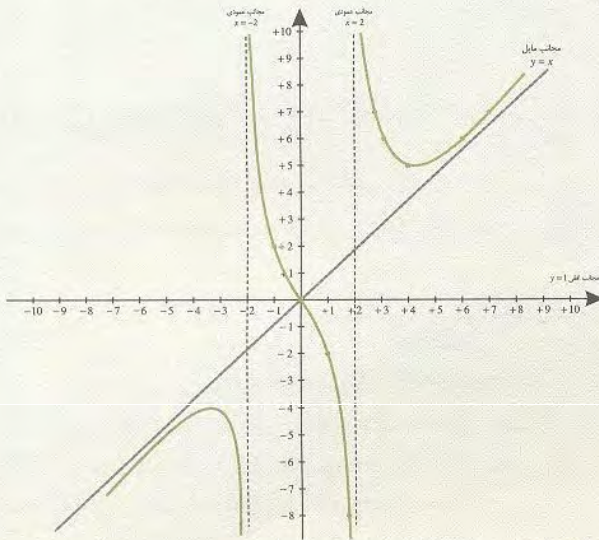
$$=\frac{\sqrt{12}\,(192)}{64\cdot 8}=\frac{3\sqrt{12}}{8}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$f''(\sqrt{12})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$\Rightarrow f''(\sqrt{12})=\frac{3\sqrt{3}}{4}>0\Rightarrow P_2(3.4,\,5.1)$ min یک نقطه اصغری

$$f''(-\sqrt{12})=\frac{8(-\sqrt{12})^3+96(-\sqrt{12})}{\left[(-\sqrt{12})^2-4\right]^3}=\frac{-\sqrt{12}(192)}{64\cdot 8}=\frac{-3\sqrt{12}}{8}=\frac{-3\sqrt{3}}{4}$$

$\Rightarrow f''(-\sqrt{12})=-\frac{3\sqrt{3}}{4}<0\Rightarrow P_3(-3.4,-5.1)$ max یک نقطه اعظمی



مثال ۵: گراف تابع ذیل را ترسیم نمایید.

$$f(x)=\tan x\ ,\quad (-\infty,+\infty)$$

$$\Rightarrow f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

مجانب عمودی $\Rightarrow \cos x=0\Rightarrow .x=-\frac{3\pi}{2},x=-\frac{\pi}{2},x=\frac{\pi}{2},x=\frac{3\pi}{2}\ldots$

در نتیجه بی‌نهایت مجانب عمودی دارد.

مجانب افقی $\Rightarrow y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{\cos x}$ تعریف نگردیده

پس تابع دارای مجانب افقی نمی‌باشد.

مجانب مایل $\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}$ تعریف نشده

پس تابع مذکور دارای مجانب مایل نیز نمی‌باشد.

برای دریافت نقاط اکستریم تابع مذکور می‌توان چنین نوشت:

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow f'(x)=\frac{(\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 1=0,\ \cos^2 x\neq 0$$ امکان ندارد

پس تابع مذکور هیچ نقطه اکستریم ندارد.

جهت دریافت نقاط انعطاف تابع مذکور می‌توان طور ذیل عمل نمود.

$$f''(x)=\frac{-1\cdot(2\cos x)(-\sin x)}{\cos^4 x}=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 2\sin x=0/:2\Rightarrow \sin x=0$$

$$\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow .....x=-2\pi,\ x=-\pi,\ x=0,\ x=\pi,\ x=2\pi,......$$

$$f(x)=\tan x\Rightarrow f(-2\pi)=\tan(-2\pi)=0\Rightarrow In(-2\pi,0)$$

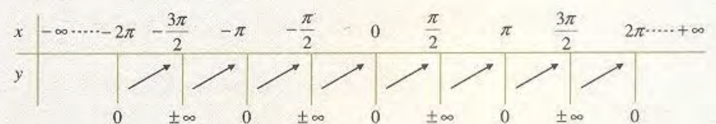
$$f(-\pi)=\tan(-\pi)=0\Rightarrow In(-\pi,0)$$

$$f(0)=\tan(0)=0\Rightarrow In(0,0)$$

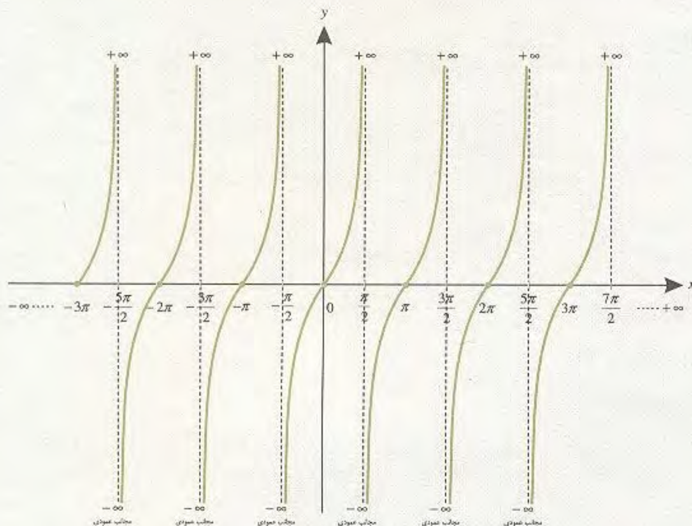
$$f(\pi)=\tan(\pi)=0\Rightarrow In(\pi,0)$$

$$f(2\pi)=\tan(2\pi)=0\Rightarrow In(2\pi,0)$$

پس در نتیجه تابع مثلثاتی مذکور دارای بی نهایت نقاط انعطاف می‌باشد.



طوریکه در جدول فوق ملاحظه می‌گردد تابع $f(x)=\tan x$ یک تـابع همیشه متزاید بوده نقاط اعظمی و اصـغری نـدارد و دارای بـی‌نهایـت نقـاط انعطاف می‌باشد.



مثال ۶: گراف تابع ذیل را ترسیم نمایید.

$$f(x)=\sec x$$

$$y=f(x)=\sec x=\frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \cos x=0\Rightarrow ..x=-\frac{3\pi}{2},x=-\frac{\pi}{2},x=0,x=\frac{\pi}{2},x=\frac{3\pi}{2}...$$

مجانب عمودی

$$\Rightarrow y=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{[-1,+1]}=\pm 1\quad\Rightarrow y=+1,\ y=-1$$

مجانب عمودی

$$\Rightarrow a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\cdot\cos x}$$ تعریف نشده (مجانب مایل ندارد)

مجانب مایل

برای دریافت نقاط اکستریم تابع مذکور می‌توان چنین نوشت:

$$f(x)=\frac{1}{\cos x}\Rightarrow f'(x)=\frac{-1\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos^2 x}=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \cos^2 x\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\dots x=-2\pi, x=-\pi,\ x=0,\ x=\pi,\ x=2\pi,\dots$$

$$f(x)=\frac{1}{\cos x} \Rightarrow f(-2\pi)=\frac{1}{\cos(-2\pi)}=\frac{1}{\cos 2\pi}$$

$$=\frac{1}{+1}=+1 \Rightarrow P(-2\pi,+1)$$

$$f(-\pi)=\frac{1}{\cos(-\pi)}=\frac{1}{\cos\pi}=\frac{1}{-1}=-1 \Rightarrow P(-\pi,-1)$$

$$f(0)=\frac{1}{\cos(0)}=\frac{1}{+1}=+1 \Rightarrow P(0,+1)$$

$$f(\pi)=\frac{1}{\cos\pi}=\frac{1}{-1}=-1 \Rightarrow P(\pi,-1)$$

$$f(2\pi)=\frac{1}{\cos(2\pi)}=\frac{1}{+1}=+1 \Rightarrow P(2\pi,+1)$$

جهت تشخیص نقاط اکستریم تابع مذکور می‌توان چنین نوشت:

$$f''(x)=\frac{\cos x\cdot\cos^2 x-\sin x\cdot 2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x}=\frac{\cos x(\cos^2 x+2\sin^2 x)}{\cos^4 x}$$

$$f''(x)=\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x+\sin^2 x}{\cos^3 x}=\frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$$

$$f''(-2\pi)=\frac{1+\sin^2(-2\pi)}{\cos^3(-2\pi)}=\frac{1+0}{(+1)^3}=\frac{+1}{+1}=+1>0$$

$$\Rightarrow P(-2\pi,+1)\min$$

$$f''(-\pi)=\frac{1+\sin^2(-\pi)}{\cos^3(-\pi)}=\frac{1+0}{(-1)^3}=\frac{+1}{-1}=-1<0$$

$$\Rightarrow P(-\pi,-1)\max$$

$$f''(0)=\frac{1+\sin^2(0)}{\cos^3(0)}=\frac{1+0}{(+1)^3}=\frac{+1}{+1}=+1>0$$

$$\Rightarrow P(0,+1)\min$$

$$f''(\pi)=\frac{1+\sin^2(\pi)}{\cos^3(\pi)}=\frac{1+0}{(-1)^3}=\frac{+1}{-1}=-1>0$$

$$\Rightarrow P(\pi,-1)\max$$

$$f''(2\pi)=\frac{1+\sin^2(2\pi)}{\cos^3(2\pi)}=\frac{1+0}{(+1)^3}=\frac{+1}{+1}=+1>0$$

$$\Rightarrow P(2\pi,+1)\min$$

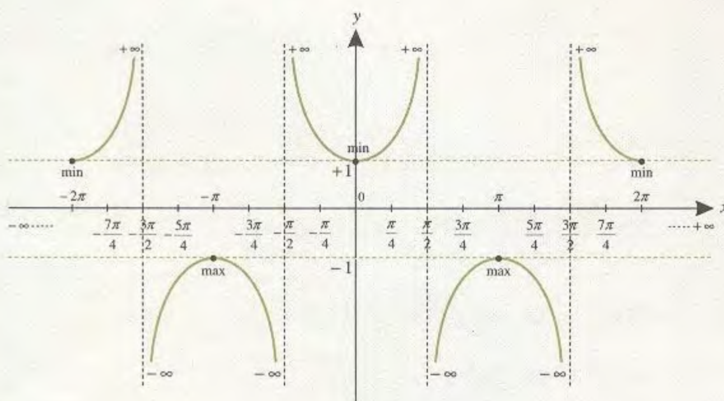
برای دریافت نقاط انعطاف تابع مذکور می‌توان چنین نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=0 \Rightarrow 1+\sin^2 x=0 \\ \cos^3 x\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sin^2 x=-1 \Rightarrow \sqrt{\sin^2 x}=\sqrt{-1}$$

$\sin x=\sqrt{-1}$ جذر حقیقی ندارد

در نتیجه تابع مثلثاتی مذکور دارای نقاط انعطاف نمی‌باشد.

x	$-\infty$		-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	±1	↘	$+1$	↗	$\pm\infty$	↗	-1	↘	$\pm\infty$	↘	$+1$	↗	$\pm\infty$	↗	-1	↘	$\pm\infty$	↘	$+1$	↗	±1



تمرینات فصل نهم

۱- لیمت توابع ذیل را به کمک مشتق (قاعده هوپیتال) دریافت نمایید:

1) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-32}{x^3-64}=?$

2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3+x-3}{x^2+3x-4}=?$

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^2-20}{2x^2+10}=?$

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-5x^2+x}{x(x^2-2x+1)}$

5) $\lim\limits_{x\to25}\dfrac{\sqrt{x}-5}{2x-50}=?$

6) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt[3]{2x}-2}=?$

7) $\lim\limits_{x\to27}\dfrac{\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt{3x}-9}=?$

8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=?$

9) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}=?$

10) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{8x}-4}{\sqrt[3]{4x}-2}=?$

11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{3x-1}+1}{\sqrt{2x+1}-1}=?$

11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{2x^2}=?$

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3\frac{x}{2}}{8x^3}=?$

14) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-tgx}{\sqrt{2}-\sec x}=?$

15) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=?$

16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{1-e^x}=?$

17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-a^x}{1-b^x}=?$

18) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{\cos x-\cos a}$

19) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{\cos x}=?$

20) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{e^x-1}=?$

21) $\lim\limits_{x\to1}\left[(1-x)\cdot\cos ec(1-x)\right]=?$

22) $\lim\limits_{x\to0}(5x\cdot\cot gx)=?$

23) $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{x}{\ln x})=?$

24) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=?$

نقاط اکستریم و انعطاف توابع ذیل را دریابید:

۲۵) نقطه اصغری تابع $f(x)=x^2-4$ را دریابید.

۲۶) نقطهٔ اعظمی تابع $f(x)=-x^2+2x+3$ را دریابید.

۲۷) نقاط اکستریم $f(x)=x^3-3x+2$ را دریابید.

۲۸) نقطه انعطاف تابع $f(x)=2x^3+6x^2+1$ را دریابید.

۲۹) نقاط اکستریم $f(x)=x^3+6x^2+20x-5$ را دریابید.

۳۰) تحولات تابع $f(x)=x^2+4x-5$ را دریابید.

۳۱) تحولات تابع $f(x)=-x^2-2x+3$ را دریابید.

۳۲) تحولات تابع $f(x)=x^3-12x+8$ را دریابید.

۳۳) تحولات تابع $f(x)=\sin 2x$ را در انتروال $[0,2\pi]$ دریابید.

۳۴) تحولات تابع $f(x)=\cos 2x$ را در انتروال $[0,2\pi]$ دریابید.

۳۵) تحولات تابع $f(x)=\dfrac{x+4}{x-2}$ را دریابید.

۳۶) تحولات $f(x)=\dfrac{1}{x}$ را دریابید.

۳۷) تحولات تابع $f(x)=\dfrac{5}{x+3}$ را دریابید.

فصل دهم

انتیگرال (Integral)

مفاهیم انتیگرال یکی از موضوعات ارزنده و اساسی علم ریاضیات بوده که در علوم ساینس خصوصاً محاسبات فزیک، انجنیری، کیمیا، محاسبه سطوح اجسام، تعیین احجام، تعیین مرکز ثقل اجسام، محاسبه کثافت، کتله و غیره برای اجسام به حیث هسته اساسی و کلید حل مشکلات می‌باشد.

بطور عموم انتیگرال به دو نوع می‌باشد، یکی انتیگرال غیرمعین به حیث تابعی که مشتق آن معین باشد و دومی انتیگرال معین به حیث لیمت مجموعهٔ عددی می‌باشد، که هردو نوع انتیگرال دو جانب یک قضیه می‌باشد، که با همدیگر ارتباط همه جانبه دارند، که بطور بسیار فشرده و به حیث معرفی انتیگرال از آن یادآور می‌شویم تا برای ادامه تحصیلات عالی شاگردان عزیز یک مقدمه کوچک ولی آشنا باشد.

انتیگرال غیرمعین (Indefinite Integral)

در مطالعه انتیگرال غیر معین موضوع اصلی عبارت از دریافت تابعی است که مشتق آن تابع داده شده باشد، یعنی عملیه انتیگرال غیر معین، عکس عملیه مشتق تابع می‌باشد، که با درنظرداشت قضایای مشتقات و بعضی مفاهیم جدید دیگر انتیگراال‌گیری توابع امکان‌پذیر می‌گردد.

تابع اولیه: $F(x)$ عبارت از تابع اولیه تابع $f(x)$ می‌باشد طوریکه مشتق آن مساوی به $f(x)$ گردد، یعنی:

$$F'(x) = f(x)$$

مثال: تابع $F(x) = 2x^3$ تابع اولیه تابع $f(x) = 6x^2$ می باشد، زیرا که:

$$F'(x) = (2x^3)' = 6x^2 \Rightarrow f(x) = 6x^2$$

بخاطر داشته باشید که یک تابع دیگری مانند $H(x) = 2x^3 + 7$ نیز یک تابع اولیه برای تابع $f(x) = 6x^2$ باشد، زیرا که:

$$H'(x) = (2x^3 + 7)' = 6x^2 + 0 = 6x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = 6x^2$$

همچنان توابع دیگر مانند $G(x) = 2x^3 - 5$ ، $P(x) = 2x^3 + 2$ ، ..... نیز تابع اولیه برای تابع $f(x) = 6x^2$ بوده می‌تواند، زیرا که:

$$(G(x))' = (2x^3 - 5)' = 6x^2 \Rightarrow f(x) = 6x^2$$

$$(P(x))' = (2x^3 + 2)' = 6x^2 \Rightarrow f(x) = 6x^2$$

$$\vdots$$

پس در نتیجه تابع اولیه $F(x)$ یک تابع یگانه نیست، که می‌توان بطور عموم تابع اولیه را در شکل $F(x) + c$ در نظر گرفت.

تعریف انتیگرال غیر معین: هرگاه $F(x)$ یک تابع اولیه برای تابع $f(x)$ باشد، پس ست تمام توابع $F(x) + c$ را در حالیکه c یک عدد ثابت را ارائه می‌نماید، به نام انتیگرال غیر معین برای تابع $f(x)$ می‌نامند و به عبارت ریاضی چنین ارائه می‌گردد:

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + c$$

در رابطه فوق ($\int$) علامه انتیگرال، $f(x)$ تابع تحت انتیگرال و dx نشان‌دهنده آن است که تابع $f(x)$ نظر به متحول x انتیگرال گرفته می‌شود، که مثال فوق را می‌توان چنین نوشت: $\int 6x^2 dx = 2x^3 + c$

خواص اولیه انتیگرال غیر معین: هرگاه c و k اعداد ثابت و $f(x)$، $g(x)$ توابع را ارائه نماید، در این صورت داریم که:

1) $\int o\,dx = c$

2) $\int k\,dx = k\int dx = kx + c$

3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$

4) $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)\,dx$

5) $\int [\,f(x) \pm g(x)\,]dx = \int f(x) + dx \pm \int g(x)\,dx$

6) $\int [\,f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)\,]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx$

قابل یادآوری است که:

$$\int f(x)\cdot g(x)dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx},\ g(x) \neq 0$$

انتیگرال‌های اساسی

با استفاده از مشتقات توابع که قبلاً مطالعه گردیده است، انتیگرال توابع اساسی را قرار ذیل درنظر گرفته می‌توانیم.

1) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,\ a \neq -1$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c, x \neq 0$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 1$

4) $\int e^x dx = e^x + c$

5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

6) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

7) $\int \sec^2 x\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

8) $\int \csc^2 x \cdot dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot gx + c$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x + c$

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\tan x + c$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c$

12) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$

13) $\int \sin hx = \cos hx + c$

14) $\int \cos hx = \sin hx + c$

15) $\int \frac{dx}{\cos h^2 x} = \tan hx + c$

16) $\int \frac{dx}{\sin h^2 x} = -\cot hx + c$

مثال ها:

انتیگرال‌های ذیل را محاسبه نماید.

1) $\int 2dx = 2\int dx = 2x + c$

2) $\int -7dx = -7\int dx = -7x + c$

3) $\int \frac{2}{\sqrt{5}}dx = \frac{2}{\sqrt{5}}\int dx = \frac{2x}{\sqrt{5}} + c$

4) $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1}dx = \frac{1}{6}x^6 + c$

5) $\int -4x^3dx = -4\int x^3dx = (-4)\frac{x^{3+1}}{3+1} + c = -x^4 + c$

6) $\int 12t^6dt = 12\int t^6dt = (12)\frac{t^{6+1}}{6+1} + c = \frac{12}{7}t^7 + c$

7) $\int -\frac{5}{4}u^4du = -\frac{5}{4}\int u^4du = -\frac{5}{4}\frac{u^{4+1}}{4+1} + c = -\frac{1}{4}u^5 + c$

8) $\int (7x^2 + 3x - 4)dx = ?$

$$\Rightarrow \int (7x^2 + 3x - 4)dx = \int 7x^2dx + \int 3x\,dx - \int 4\,dx$$

$$= 7\int x^2\,dx + 3\int x\,dx - 4\int dx$$

$$= \left((7)\frac{x^{2+1}}{2+1} + c_1\right) + \left((3)\frac{x^{1+1}}{1+1} + c_2\right) - (4x + c_3)$$

$$= \frac{7}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + c_1 + c_2 - c_3 = \frac{7}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + c$$

9) $\int \frac{8dx}{x^5} = ?$

$$\Rightarrow \int \frac{8dx}{x^5} = \int 8x^{-5}dx = 8\int x^{-5}dx = (8)\frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = -2x^{-4} + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{8dx}{x^5} = -2x^{-4} + c = \frac{-2}{x^4} + c$$

10) $\int 2\sqrt[5]{p^3}\,dp = ?$

$$\Rightarrow \int 2\sqrt[5]{p^3}\,dp = 2\int p^{\frac{3}{5}}dp = (2)\frac{p^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c$$

$$= (2)\frac{p^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = (2)\frac{5}{8}\sqrt[5]{p^8} + c = \frac{5}{4}p\sqrt[5]{p^3} + c$$

$$\Rightarrow \int 2\sqrt[5]{p^3}\,dp = \frac{5}{4}p\sqrt[5]{p^3} + c$$

11) $\int \frac{3x^5 + x^3 - 5}{x^2}dx = ?$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{3x^5}{x^2} + \frac{x^3}{x^2} - \frac{5}{x^2}\right)dx = \int \left(3x^3 + x - 5x^{-2}\right)dx$$

$$= 3\int x^3dx + \int x\,dx - 5\int x^{-2}dx$$

$$= 3\frac{x^{3+1}}{3+1} + c_1 + \frac{x^{1+1}}{1+1} + c_2 - 5\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c_3\right)$$

$$= \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 5x^{-1} + c_1 + c_2 - c_3$$

$$\Rightarrow \int \frac{3x^5 + x^3 - 5}{x^2}dx = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{x} + c$$

12) $\int -5\cos x\,dx = ?$

$$\Rightarrow \int -5\cos x\,dx = -5\int \cos x\,dx = -5(+\sin x) + c = -5\sin x + c$$

$$\Rightarrow \int -5\cos x\,dx = -5\sin x + c$$

13) $\int \frac{3}{2}\sin x\,dx = ?$

$$\Rightarrow \int \frac{3}{2}\sin x\,dx = \frac{3}{2}\int \sin x\,dx = \frac{3}{2}(-\cos x) + c = -\frac{3}{2}\cos x + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{3}{2}\sin x\,dx = -\frac{3}{2}\cos x + c$$

14) $\int 8e^x dx = ?$

$$\Rightarrow \int 8e^x dx = 8\int e^x\,dx = 8e^x + c$$

$$\Rightarrow \int 8e^x dx = 8e^x + c$$

دریافت انتیگرال توابع به کمک تعویض

هرگاه تابع مرکب $F(g(x))$ را درنظر بگیریم، می‌دانیم کـه مـشتق تـابع مذکور عبارت از:

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\cdot g'(x)$$

و یا به عباره دیگر، هرگـاه $y = f(u)$ باشـد درحالیکـه $u = g(x)$ را ارائه نماید، پس مشتق تابع مذکور عبارت از:

$$y' = f'(u)\cdot u'(x)$$

در نتیجه می‌توان انتیگرال توابع فوق را چنین نوشت:

$$\int F'(g(x))\cdot g'(x)dx = F(g(x)) + c$$

رابطه اخیر اساس انتیگرال‌گیری بـه وسـیله تعـویض را بیـان مـی‌نمایـد، طوریکه اگر $F' = f$ و $g(x) = u$ تعویض گردد، پس $du = g'(x)\cdot dx$ خواهد گردید، پس می‌توان چنین نوشت:

$$\int F(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

در این طریقه توجه گردد که متحول تابع تحت انتیگرال از جنس یک متحول مناسب جدید طوری تعویض گردد که انتیگـرال مربـوط آن نظر بـه متحـول تعویض شده تصور شده بتواند (تابع قابل تعویض و مـشتق آن تـابع در تحـت انتیگرال ملاحظه گردد). بعد از دریافت انتیگرال، بایـد متحـول قبلـی در تـابع اولیه مجدداً تعویض گردد.

یادداشت: جهت انتیگـرال‌گیـری توابـع بـه طریقـه تعویـضی مـی‌تـوان فورمول‌های ذیل را به شکل عمومیت یافته در نظر داشته باشید.

I) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$

II) $\int e^u du = e^u + c$

III) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

IV) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + c$

V) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + c$

VI) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + c$

VII) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$

مثال‌ها:

انتیگرال توابع ذیل را دریافت نمایید.

1) $\int (3x^2-1)^3 4x\,dx = ?$

$$\left.\begin{array}{l} u = 3x^2 - 1 \\ du = 6x\,dx \\ dx = \frac{du}{6x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \int (3x^2-1)^3 4x\,dx = \int u^3\cdot 4x\cdot\frac{du}{6x} = \int \frac{2}{3}u^3 du \\ = \frac{2}{3}\int u^3 du = \frac{2}{3}\cdot\frac{u^{3+1}}{3+1} + c = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}u^4 + c = \frac{1}{6}(3x^2-1)^4 + c \end{array}$$

2) $\int \sqrt{2\sin x}\cdot 6\cos x\,dx = ?$

$$\left.\begin{array}{l} u=2\sin x \\ du=2\cos x\cdot dx \\ dx=\dfrac{du}{2\cos x}\end{array}\right\} \Rightarrow \int \sqrt{u}\cdot 6\cos x\cdot\frac{du}{2\cos x}=\int 3\sqrt{u}\,du=3\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$=3\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=3\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=2\sqrt{u^3}+c=2u\sqrt{u}+c$$

$$=2(2\sin x)\cdot\sqrt{2\sin x}+c=4\sin x\cdot\sqrt{2\sin x}+c$$

3) $\int \frac{5dx}{x+4}=?$

$$\left.\begin{array}{l} u=x+4 \\ du=dx\end{array}\right\} \Rightarrow \int\frac{5dx}{x+4}=\int\frac{5du}{u}=5\int\frac{du}{u}=5\ln|u|+c=5\ln|x+4|+c$$

4) $\int \frac{-\frac{3}{2}x\,dx}{3x^2+5}=?$

$$\left.\begin{array}{l} u=3x^2+5 \\ du=6x\,dx \\ dx=\dfrac{du}{6x}\end{array}\right\} \Rightarrow \int\frac{-\frac{3}{2}x\,dx}{3x^2+5}=\int\frac{-\frac{3}{2}x\cdot\frac{du}{6x}}{u}=\int -\frac{1}{4}\cdot\frac{du}{u}=-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u}$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|u|+c=-\frac{1}{4}\ln|3x^2+5|+c$$

5) $\int 5^{3x^2+1}\cdot 12x\,dx=?$

$$\left.\begin{array}{l} a=5 \\ u=3x^2+1 \\ du=6x\,dx \\ dx=\dfrac{du}{6x}\end{array}\right\} \Rightarrow \int 5^{3x^2+1}\cdot 12x\,dx=\int a^u\cdot 12x\frac{du}{6x}=\int 2a^u du=2\int a^u du$$

$$=2\cdot\frac{a^u}{\ln a}+c=2\cdot\frac{5^{3x^2+1}}{\ln 5}+c=\frac{2}{\ln 5}\cdot 5^{3x^2+1}+c$$

6) $\int 8x\cdot e^{3x^2+1}dx=?$

$$\left.\begin{array}{l} u=3x^2+1 \\ du=6x\,dx \\ dx=\dfrac{du}{6x}\end{array}\right\} \Rightarrow \int 8x\cdot e^{3x^2+1}dx=\int 8x\cdot e^u\cdot\frac{du}{x}=\int\frac{4}{3}e^u du$$

$$=\frac{4}{3}\int e^u\,du=\frac{4}{3}e^u+c=\frac{4}{3}e^{3x^2+1}+c$$

7) $\int \frac{7e^{2x}}{(7+2e^{2x})^2}dx=?$

$$\left.\begin{array}{l} u=7+2e^{2x} \\ du=4e^{2x}dx \\ dx=\dfrac{du}{4e^{2x}}\end{array}\right\} \Rightarrow \int\frac{7e^{2x}}{(7+2e^{2x})^2}dx=\int\frac{7e^{2x}}{u^2}\cdot\frac{du}{4e^{2x}}=\int\frac{7}{4}\cdot\frac{du}{u^2}$$

$$=\frac{7}{4}\int u^{-2}\,du=\frac{7}{4}\cdot\frac{u^{-2+1}}{-2+1}+c=-\frac{7}{4u}+c$$

$$=-\frac{7}{4(7+2e^{2x})}+c=-\frac{7}{28+8e^{2x}}+c$$

8) $\int\frac{3\ln^5(2x)}{5x}dx=?$

$$\left.\begin{array}{l} u=\ln(2x) \\ du=\dfrac{2}{2x}dx \\ du=\dfrac{dx}{x} \\ dx=x\cdot du\end{array}\right\} \Rightarrow \int\frac{3\ln^5(2x)}{5x}dx=\int\frac{3u^5}{5x}\cdot x\,du=\int\frac{3}{5}u^5du=\frac{3}{5}\int u^5du$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{u^{5+1}}{5+1}+c=\frac{1}{10}u^6+c=\frac{1}{10}\ln^6(2x)+c$$

9) $\int\frac{\operatorname{arc}\cot x}{-3-3x^2}dx=?$

12) $\int \tan^6 x \cdot \sec^2 x\,dx = ?$

$$\left.\begin{array}{l} u=\tan x \\ du=\sec^2 x\,dx \end{array}\right\} \Rightarrow \int \tan^6 x\cdot\sec^2 x\,dx = \int u^6\cdot du = \frac{u^{6+1}}{6+1}+c = \frac{1}{7}u^7+c = \frac{1}{7}\tan^7 x + c$$

13) $\int \sin^4 x \cdot \cos x\,dx = ?$

$$\left.\begin{array}{l} u=\sin x \\ du=\cos x\cdot dx \end{array}\right\} \Rightarrow \int \sin^4 x\cdot\cos x\,dx = \int u^4\cdot du = \frac{u^{4+1}}{4+1}+c = \frac{1}{5}u^5+c = \frac{1}{5}\sin^5 x + c$$

14) $\int \cos^5 x \cdot \sin^2 x \cdot dx = ?$

$$\Rightarrow \int \cos^5 x\cdot\sin^2 x\cdot dx = \int \sin^2 x\cdot\cos^4 x\cdot\cos x\,dx$$

$$= \int \sin^2 x\cdot(\cos^2 x)^2\cdot\cos x\,dx = \int \sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)^2\cos x\,dx$$

$$= \int \sin^2 x(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\cos x\,dx$$

$$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x)\cos x\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u=\sin x \\ du=\cos x\cdot dx \end{array}\right\} \Rightarrow \int (u^2-2u^4+u^6)\,du = \int u^2 du - 2\int u^4 du + \int u^6 du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + c$$

$$\Rightarrow \int \cos^5 x\cdot\sin^2 x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + c$$

15) $\int \sin^3 x\,dx = ?$

$$\Rightarrow \int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x\cdot\sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u=arc\cot x \\ du=-\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dx=-(1+x^2)\,du \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{arc\cot x}{-3-3x^2}dx = \int \frac{arc\cot x}{-3(1+x^2)}dx$$

$$= \int \frac{u}{-3(1+x^2)}\cdot\left[-(1+x^2)\cdot du\right]$$

$$= \int \frac{1}{3}u\,du = \frac{1}{3}\int u\cdot du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{1+1}}{1+1}+c$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{u^2}{2}+c = \frac{1}{6}(arc\cot x)^2 + c$$

10) $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{9x^4+1}} = ?$

$$\left.\begin{array}{l} u=3x^2 \\ du=6x\cdot dx \\ dx=\dfrac{du}{6x} \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{5x\,dx}{\sqrt{9x^4+1}} = \int \frac{5x}{\sqrt{(3x^2)^2+1}}dx\ \int \frac{5x}{\sqrt{u^2+1}}\cdot\frac{du}{6x}$$

$$= \frac{5}{6}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{5}{6}\ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right|+c$$

$$= \frac{5}{6}\ln\left|3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right|+c$$

11) $\int \cos^2 5x\,dx = ?$

با استفاده از روابط مثلثاتی می‌دانیم که: $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ می‌باشد.

$$\Rightarrow \int \cos^2 5x\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 10x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 10x\,dx\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} u=10x \\ du=10\,du \\ dx=\dfrac{du}{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(x+\int \cos u\cdot\frac{du}{10}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}\int \cos u\cdot du$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}\cdot\sin u + c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}\sin 10x + c$$

$$=\int \sin x\,dx-\int \cos^2 x\cdot\sin x\,dx=-\cos x-\int \cos^2 x\cdot\sin x\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u=\cos x \\ du=-\sin x\,dx \end{array}\right\}=-\cos x-\int u^2\cdot(-du)=-\cos x+\frac{u^3}{3}+c$$
$$=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+c$$

16) $\int \frac{3dx}{4+9x^2}=?$

$$\Rightarrow \int \frac{3dx}{4+9x^2}=\int \frac{3dx}{(2)^2+(3x)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ u=3x \\ du=3dx \end{array}\right\}=\int \frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+c=\frac{1}{2}\arctan\frac{3x}{2}+c$$

17) $\int \frac{10x\,dx}{16-25x^4}=?$

$$\Rightarrow \int \frac{10x\,dx}{16-25x^4}=\int \frac{10x\,dx}{(4)^2-(5x^2)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} a=4 \\ u=5x^2 \\ du=10x\,dx \end{array}\right\}\Rightarrow \int \frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|+c=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{5x^2+4}{5x^2-4}\right|+c$$

18) $\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{81-x^6}}=\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{9^2-(x^3)^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} a=9 \\ u=x^3 \\ du=3x^2dx \end{array}\right\}\Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\left(\frac{u}{a}\right)+c=\arcsin\left(\frac{x^3}{9}\right)+c$$

دریافت انتیگرال توابع به روش انقسام (قسمی) یا جزء به جزء: هرگاه $u=f(x)$ و $v=g(x)$ دو تابع را ارائه نماید، پس می‌توان بـا اسـتفاده از مشتق حاصل‌ضرب توابع مذکور چنین نوشت:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$
$$u'\cdot v+u\cdot v'=(u\cdot v)'$$
$$u\cdot v'=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$
$$\Rightarrow \int u\cdot v'\,dx=\int (u\cdot v)'-\int v\cdot u'\,dx$$
$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$

که رابطه اخیر عبارت از فورمول انتیگرال غیر معین به طریقـه انقـسام یـا جزء به جزء یاد می‌گردد.

مثال‌ها:

انتیگرال‌های ذیل را به طریقه قسمی (جز به جز) دریابید.

1) $\int \ln x\cdot dx=?$

$$\left.\begin{array}{l} u=\ln x \\ du=\frac{dx}{x} \\ dv=dx \\ v=x \end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow \int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du=\int \ln x\cdot dx=x\cdot\ln x-\int x\cdot\frac{dx}{x} \\ =x\cdot\ln x-\int dx=\int \ln x\cdot dx=x\cdot\ln x-x+c\end{array}$$

2) $\int 5x\cdot\sin 2x\,dx=?$

$$u=5x\Rightarrow du=5\,dx$$
$$dv=\sin 2x\cdot dx\Rightarrow v=-\frac{1}{2}\cos 2x$$
$$\Rightarrow \int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$
$$=\int 5x\cdot\sin 2x\,dx=5x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int -\frac{1}{2}\cos 2x\cdot 5\,dx$$
$$=-\frac{5}{2}x\cdot\cos 2x+\frac{5}{2}\int \cos 2x\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u=\ln x \Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x^{-\frac{1}{2}}dx \Rightarrow v=2x^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du \\ =\int \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\ln x\cdot 2x^{\frac{1}{2}}-\int 2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{dx}{x} \end{array}$$

$$=2\sqrt{x}\cdot\ln x-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x}\cdot\ln x-2\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c$$

$$=2\sqrt{x}\cdot\ln x-2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$$

$$\Rightarrow \int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\cdot\ln x-4\sqrt{x}+c$$

6) $\int \dfrac{x\,dx}{\sin^2 x}=?$

$$\left.\begin{array}{l} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=\dfrac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow v=-\cot x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \int u\,dv=u\cdot v-\int v\,du \\ \Rightarrow \int \dfrac{x\,dx}{\sin^2 x}=x\cdot(-\cot x)-\int -\cot x\,dx \\ =-x\cdot\cot x+\int\dfrac{\cos x}{\sin x}dx \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} P=\sin x \\ dP=\cos x\,dx \end{array}\right\} =-x\cdot\cot x+\int\frac{dP}{P}=-x\cdot\cot x+\ln|P|+c$$

$$\Rightarrow \int\frac{x\,dx}{\sin^2 x}=-x\cdot\cot x+\ln|\sin x|+c$$

7) $\int x\cdot\sin x\cdot\cos x\,dx=?$

$$=-\frac{5}{2}x\cdot\cos 2x+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

$$\Rightarrow \int 5x\cdot\sin 2x\,dx=-\frac{5}{2}x\cdot\cos 2x+\frac{5}{4}\sin 2x+c$$

3) $\int \arctan x\,dx=?$

$$u=\arctan x \Rightarrow du=\frac{dx}{1+x^2}$$

$$dv=dx \Rightarrow v=x$$

$$\Rightarrow \int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$

$$\int \arctan x\cdot dx=x\cdot\arctan x-\int x\cdot\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=1+x^2 \\ du=2x\,dx \\ dx=\dfrac{du}{2x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} =x\cdot\arctan x-\int\dfrac{x\cdot\frac{du}{2x}}{u}=x\cdot\arctan x-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{du}{u} \\ =x\cdot\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln|u|+c=x\cdot\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+c \end{array}$$

4) $\int \dfrac{x}{e^x}dx=?$

$$\left.\begin{array}{l} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=\dfrac{dx}{e^x}=e^{-x}\cdot dx \\ v=-e^{-x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du=\int\dfrac{x}{e^x}dx \\ =x\cdot\left(-e^{-x}\right)-\int\left(-e^{-x}\right)dx=-x\cdot e^{-x}+\int e^{-x}dx \end{array}$$

$$=\int\frac{x}{e^x}dx=-x\cdot e^{-x}-e^{-x}+c \Rightarrow \int\frac{x}{e^x}dx=\frac{-x}{e^x}-\frac{1}{e^x}+c$$

5) $\int \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=?$

$$\left.\begin{aligned} &u = x \Rightarrow du = dx \\ &dv = \sin x \cdot \cos x\,dx \\ &dv = \frac{1}{2}\sin 2x\,dx \\ &v = -\frac{1}{4}\cos 2x \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\Rightarrow \int x \cdot \sin x \cdot \cos x\,dx = x \cdot \left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right) - \int -\frac{1}{4}\cos 2x\,dx$$

$$= -\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\int \cos 2x\,dx = -\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$\Rightarrow \int x \cdot \sin x \cdot \cos x\,dx = -\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + c$$

8) $\int \sin(\ln x)\,dx = ?$

$$u = \sin(\ln x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\Rightarrow \int u\,dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\Rightarrow \int \sin(\ln x)\,dx = x \cdot \sin(\ln x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx$$

$$= x \cdot \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$$

$$u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)\,dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$= x \cdot \sin(\ln x) - \left(u \cdot v - \int v \cdot du\right)$$

$$= x \cdot \sin(\ln x) - \left[x \cdot \cos(\ln x) - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x}\sin(\ln x)\right)dx\right]$$

$$= x \cdot \sin(\ln x) - x \cdot \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int \sin(\ln x)\,dx = x \cdot \sin(\ln x) - x \cdot \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$$

$$\int \sin(\ln x)\,dx + \int \sin(\ln x)\,dx = x \cdot \sin(\ln x) - x \cdot \cos(\ln x)$$

$$2\int \sin(\ln x)\,dx = x \cdot \sin(\ln x) - x \cdot \cos(\ln x) \quad /:2$$

$$\Rightarrow \int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\cdot\sin(\ln x) - \frac{x}{2}\cdot\cos(\ln x) + c$$

انتیگرال توابع شامل ترینـوم‌هـای درجـه دوم: انتیگـرال‌هـای کـه خصوصاً در شکل ترینـوم‌هـای درجـه دوم مانـند $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ یـا $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ و یـا $\int \frac{dx}{(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ قـرار داشته باشند ترینوم‌های فوق‌الذکر را به کمک تجزیه تکمیل مربـع بـه شـکل $ax^2+bx+c = a(x+k)^2+l$ تبدیل نموده (درحالیکه k و l مقـادیر ثابت را نشان می‌دهند) بعداً با توجه به شـکل انتیگـرال مربوطـه آن نظـر بـه حالات VII, VI, V, IV شکل عمومیـت یافتـه فورمـول‌هـای انتیگـرال بـه طریقه تعویضی به حل آنها می‌پردازیم.

مثال‌ها:

انتیگرال‌های ذیل را محاسبه نمایید.

1) $\int \frac{dx}{x^2+4x+9} = ?$

$$x^2+4x+9 = x^2+4x+4+9-4 = (x+2)^2+5$$

3) $\int \frac{dx}{3x^2+18x-5}=?$

$$3x^2+18x-5=3\left(x^2+6x-\frac{5}{3}\right)=3\left(x^2+6x+9-9-\frac{5}{3}\right)$$

$$=3\left[(x+3)^2-\frac{32}{3}\right]=3\left[(x+3)^2-\left(\sqrt{\frac{32}{3}}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{3x^2+18x-5}=\int\frac{dx}{3\left[(x+3)^2-\left(\sqrt{\frac{32}{3}}\right)^2\right]}$$

$$\left.\begin{array}{l}u=x+3\\ du=dx\\ a=\sqrt{\frac{32}{3}}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow\int\frac{du}{3(u^2-a^2)}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{-(a^2-u^2)}\\ =-\frac{1}{3}\int\frac{du}{a^2-u^2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|+c\end{array}$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{3x^2+18x-5}=-\frac{1}{6\cdot\sqrt{\frac{32}{3}}}\cdot\ln\left|\frac{(x+3)+\sqrt{\frac{32}{3}}}{(x+3)-\sqrt{\frac{32}{3}}}\right|+c$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{3x^2+18x-5}=\frac{-1}{24\sqrt{\frac{2}{3}}}\ln\left|\frac{x+3+4\sqrt{\frac{2}{3}}}{x+3-4\sqrt{\frac{2}{3}}}\right|+c$$

4) $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x+1}}=?$

$$-x^2+6x+1=-(x^2-6x-1)=-(x^2-6x+9-9-1)$$

$$=-[(x-3)^2-10]=10-(x-3)^3=(\sqrt{10})^2-(x-3)^2$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{x^2+4x+9}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+5}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+(\sqrt{5})^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}u=x+2\\ du=dx\\ a=\sqrt{5}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}arc\tan\left(\frac{u}{a}\right)+c\\ \Rightarrow\int\frac{dx}{x^2+4x+9}=\frac{1}{\sqrt{5}}arc\tan\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)+c\end{array}$$

2) $\int\frac{dx}{2x^2-5x+8}=?$

$$2x^2-5x+8=2\left(x^2-\frac{5}{2}x+4\right)=2\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}+4-\frac{25}{16}\right)$$

$$=2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{39}{16}\right]=2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{39}}{4}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{2x^2-5x+8}=\int\frac{dx}{2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{39}}{4}\right)^2\right]}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{39}}{4}\right)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}u=x-\frac{5}{4}\\ du=dx\\ a=\frac{\sqrt{39}}{4}\end{array}\right\}\begin{array}{l}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}arc\tan\left(\frac{u}{a}\right)+c\\ =\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{39}}arc\tan\left(\frac{x-\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{39}}{4}}\right)+c\end{array}$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{2x^2-5x+8}=\frac{2}{\sqrt{39}}arc\tan\left(\frac{4x-5}{\sqrt{39}}\right)+c$$

$$u=x^3-1,\quad du=3x^2\,dx,\quad dx=\frac{du}{3x^2},\quad a=\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow\int\frac{8x^2\,dx}{\sqrt{(x^3-1)^2-(\sqrt{5})^2}}=\int\frac{8x^2\cdot\frac{du}{3x^2}}{\sqrt{u^2-a^2}}=\int\frac{\frac{8}{3}du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{8}{3}\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{8}{3}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+c$$

$$\Rightarrow\int\frac{8x^2\,dx}{\sqrt{x^6-2x^3-4}}=\frac{8}{3}\ln\left|x^3-1+\sqrt{(x^3-1)^2-5}\right|+c$$

$$=\frac{8}{3}\ln\left|x^3-1+\sqrt{x^6-2x^3-4}\right|+c$$

محاسبه انتیگرال‌های توابع ناطق

هرگاه انتیگرال‌ها در شکل $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ قرار داشته باشد جهت محاسبه آن‌ها به کمک تجزیه کسرهای قسمی که حالات آن را در فصل (سوم) بیان نمودیم انتیگرال را به کسرهای قسمی ممکنه آن تجزیه نموده، حل مطالب می‌نماییم.

مثال‌ها:

انتیگرال‌های ذیل را محاسبه نمایید.

1) $\int\frac{5x-1}{x^2-x-2}dx=?$

$$\Rightarrow\frac{5x-1}{x^2-x-2}=\frac{5x-1}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{Ax+A+Bx-2B}{x^2-x-2}$$

$$\Rightarrow\frac{5x-1}{x^2-x-2}=\frac{(A+B)x+A-2B}{x^2-x-2}$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x+1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{10})^2-(x-3)^2}}$$

$$u=x-3,\quad du=dx,\quad a=\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{10})^2-(x-3)^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\left(\frac{u}{a}\right)+c$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x+1}}=\arcsin\left(\frac{x-3}{\sqrt{10}}\right)+c$$

5) $\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{x^4+8x^2+20}}=?$

$$x^4+8x^2+20=x^4+8x^2+16-16+20=(x^2+4)^2+4$$

$$=(x^2+4)^2+(2)^2$$

$$\Rightarrow\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{x^4+8x^2+20}}=\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{(x^2+4)^2+(2)^2}}$$

$$u=x^2+4,\quad du=2x\,dx,\quad a=2$$

$$\Rightarrow\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{(x^2+4)^2+(2)^2}}=\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+c=\ln\left|x^2+4+\sqrt{(x^2+4)^2+4}\right|+c$$

$$\Rightarrow\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{x^4+8x^2+20}}=\ln\left|x^2+4+\sqrt{x^4+8x^2+20}\right|+c$$

6) $\int\frac{8x^2\,dx}{\sqrt{x^6-2x^3-4}}=?$

$$x^6-2x^3-4=x^6-2x^3+1-5=(x^3-1)^2-(\sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow\int\frac{8x^2\,dx}{\sqrt{x^6-2x^3-4}}=\int\frac{8x^2\,dx}{\sqrt{(x^3-1)^2-(\sqrt{5})^2}}$$

$$\begin{array}{l} +A+\ \ B=5\ \ .....(1)\\ \underline{\overset{-}{+}A\overset{+}{-}2B=\overset{+}{-}1\ ....(2)}\\ \quad +3B=+6\Rightarrow B=2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} A+B=5\ \ .....(1)\\ A+2=5\Rightarrow A=3 \end{array}$$

$$\Rightarrow\frac{5x-1}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+1}$$

$$\Rightarrow\int\frac{5x-1}{x^2-x-2}dx=\int\left(\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$=\int\frac{3}{x-2}dx+\int\frac{2}{x+1}dx=3\int\frac{dx}{x-2}+2\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\Rightarrow\int\frac{5x-1}{x^2-x-2}dx=3\ln|x-2|+2\ln|x+1|+c$$

$$=\ln\left|(x-2)^3\right|+\ln\left|(x+1)^2\right|+c$$

$$\Rightarrow\int\frac{5x-1}{x^2-x-2}=\ln\left|(x-2)^3(x+1)^2\right|+c$$

2) $\int\frac{2x-8}{x^2-4}dx=?$

$$\frac{2x-8}{x^2-4}=\frac{2x-8}{(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}$$

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{Ax-2A+Bx+2B}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow\frac{2x-8}{x^2-4}=\frac{(A+B)x-2A+2B}{x^2-4}$$

$$\begin{cases} A+B=2\ \ .....(1\\ -2A+2B=-8\ \ .....2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2A+2B=-8\ \ /:2$$

$$\begin{array}{l} -A+B=-4\ \ .....(2)\\ \underline{\ \ A+B=\ \ 2\ ......(1)}\\ \quad 2B=-2\ \Rightarrow B=-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A+B=2\ \ .....(1)\\ A-1=2\\ A=2+1\\ A=3 \end{array}$$

$$\Rightarrow\int\frac{2x-8}{x^2-4}dx=\int\left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}\right)dx=\int\frac{3}{x+2}dx+\int\frac{-1}{x-2}dx$$

$$=3\int\frac{dx}{x+2}-\int\frac{dx}{x-2}=3\ln|x+2|-\ln|x-2|+c$$

3) $\int\frac{6}{x^3-1}dx=?$

$$\frac{6}{x^3-1}=\frac{6}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{x^3-1}$$

$$\Rightarrow\frac{6}{x^3-1}=\frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C}{x^3-1}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} A+B=0\ \ ....(1)\\ A-B+C=0\ \ ....(2)\\ A-C=6\ \ .....(3) \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} A+B\qquad =0\ .....(1)\\ \underline{A-B+C=0\ ....(2)}\\ 2A\qquad +C=0.....(4) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} A-C=6.....(3)\\ \underline{2A+C=0\ ....(4)}\\ 3A=6\Rightarrow A=2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} A+B=0...(1)\\ 2+B=0\\ B=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A-C=6\ \ ...(3)\\ 2-C=6\\ -C=6-2\\ C=-4 \end{array}$$

$$\Rightarrow\int\frac{6}{x^3-1}dx=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{-2x-4}{x^2+x+1}\right)dx=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{2x+4}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$=2\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{2x+4}{x^2+x+1}dx$$

$$=2\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{2x+1+3}{x^2+x+1}dx$$

$$=2\ln|x-1|-\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\int\frac{3}{x^2+x+1}dx$$

$$=2\ln|x-1|-\ln|x^2+x+1|-\int\frac{3}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}dx$$

$$=2\ln|x-1|-\ln|x^2+x+1|-3\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=x+\frac{1}{2}\\ du=dx\\ a=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow 2\ln|x-1|-\ln|x^2+x+1|-3\int\frac{du}{u^2+a^2}$$

$$=2\ln|x-1|-\ln|x^2+x+1|-3\,arc\,\tan\left(\frac{u}{a}\right)+c$$

$$\Rightarrow\int\frac{6}{x^3-1}dx=2\ln|x-1|-\ln|x^2+x+1|-3\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

4) $\int\frac{4x^2+x+5}{x^2-3x+2}dx=?$

$$\frac{4x^2+x+5}{x^2-3x+2}=4+\frac{13x-3}{x^2-3x+2}=4+\frac{13x-3}{(x-2)(x-1)}$$

$$=4+\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}=4+\frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)}=4+\frac{Ax-A+Bx-2B}{x^2-3x+2}$$

$$\Rightarrow 4+\frac{13x-3}{x^2-3x+2}=4+\frac{(A+B)x-(A+2B)}{x^2-3x+2}$$

$$\left.\begin{array}{r} A+\ B=13\quad .....(1)\\ \underline{-A+2B=-3\quad .....(2)}\\ -\ B=10\Rightarrow B=-10\end{array}\right\}\begin{array}{l} A+B=13\quad .....(1)\\ A-10=13\\ A=13+10\ \Rightarrow A=23\end{array}$$

$$\Rightarrow\int\frac{4x^2+x+5}{x^2-3x+2}dx=\int\left(4+\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}\right)dx$$

$$=\int 4dx+\int\frac{23}{x-2}dx-\int\frac{10}{x-1}dx$$

$$\Rightarrow\int\frac{4x^2+x+5}{x^2-3x+2}=4x+23\ln|x-2|-10\ln|x-1|+c$$

5) $\int\frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1}dx=?$

$$\Rightarrow\frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1}=\frac{x^2+1}{x^3-x^2-2x^2+2x+x-1}$$

$$=\frac{x^2+1}{x^2(x-1)-2x(x-1)+1(x-1)}$$

$$=\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-2x+1)}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x-1)^2}=\frac{x^2+1}{(x-1)^3}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2+1}{(x-1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2+1}{(x-1)^3}=\frac{A(x-1)^2+B(x-1)+C}{(x-1)^3}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2+1}{(x-1)^3}=\frac{Ax^2-2Ax+A+Bx-B+C}{(x-1)^3}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2+1}{(x-1)^3}=\frac{Ax^2+(-2A+B)x+A-B+C}{(x-1)^3}$$

$$\left.\begin{array}{l}A=1.....(1)\\-2A+B=0....(2)\\A-B+C=1....(3)\end{array}\right\}\begin{array}{l}-2A+B=0...(2)\\-2+B=0\\B=2\end{array}\left.\right\}\begin{array}{l}A-B+C=1...(3)\\1-2+C=1\\C=2\end{array}$$

$$\Rightarrow\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3}dx=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}\right)dx$$

$$=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{2}{(x-1)^2}dx+\int\frac{2}{(x-1)^3}dx$$

$$\left.\begin{array}{l}u=x-1\\du=dx\end{array}\right\}=\int\frac{du}{u}+\int\frac{2du}{u^2}+\int\frac{2du}{u^3}$$

$$=\ln|u|+2\frac{u^{-2+1}}{-2+1}+2\frac{u^{-3+1}}{-3+1}+c=\ln|u|-\frac{2}{u}-\frac{1}{u^2}+c$$

$$\Rightarrow\int\frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1}dx=\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+c$$

6) $\int\frac{4x^3-2x-3}{2x^2-x-3}dx=?$

$$\begin{array}{r|l}4x^3+0x^2-2x-3 & 2x^2-x-3\\ \underline{-4x^3\mp2x^2\mp6x} & 2x+1\\ 2x^2+4x-3 & \\ \underline{-2x^2\mp x\mp3} & \\ 5x & \end{array}$$

$$\Rightarrow\frac{4x^3-2x-3}{2x^2-x-3}=(2x+1)+\frac{5x}{2x^2-x-3}$$

$$=(2x+1)+\frac{5x}{(2x-3)(x+1)}=(2x+1)+\frac{A}{2x-3}+\frac{B}{x+1}$$

$$=(2x+1)+\frac{A(x+1)+B(2x-3)}{(2x-3)(x+1)}=(2x+1)+\frac{Ax+2Bx+A-3B}{2x^2-x-3}$$

$$\Rightarrow(2x+1)+\frac{5x}{2x^2-x-3}=(2x+1)+\frac{(A+2B)x+A-3B}{2x^2-x-3}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}A+2B=5.....(1)\\ \underline{A-3B=0\quad.....(2)}\\5B=5\Rightarrow B=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}A+2B=5\quad.....(1)\\A+2=5\\A=3\end{array}$$

$$\Rightarrow\int\frac{4x^3-2x-3}{2x^2-x-3}dx=\int\left[(2x+1)+\frac{A}{2x-3}+\frac{B}{x+1}\right]dx$$

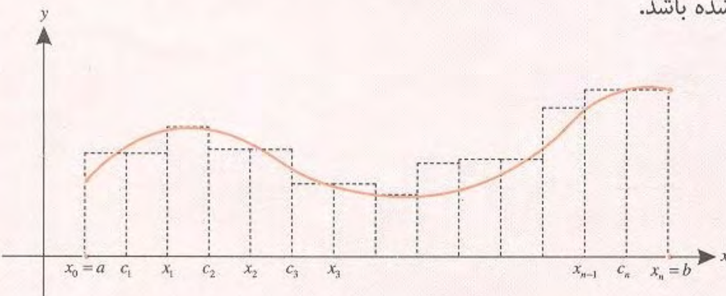
$$=\int2x\,dx+\int dx+\int\frac{3}{2x-3}dx+\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\int2x\,dx+\int dx+\frac{3}{2}\int\frac{2dx}{2x-3}+\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\Rightarrow\int\frac{4x^3-2x-3}{2x^2-x-3}dx=x^2+x+\frac{3}{2}\ln|2x-3|+\ln|x+1|+c$$

انتیگرال معین (Definite Integral)

هرگاه تابع $y=f(x)$ در انتـروال محـدود $[a,b]$ دارای قیمـت‌هـای مثبت بوده و گراف مذکور یک منحنی را ارائه نمایند، پـس از نگـاه هندسـی انتیگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ عبارت از مساحت سطحی است که بین منحنـی تـابع $y=f(x)$ و محور x در مـسافه محـدود $x_0=a$ الـی $x_n=b$ احاطـه شده باشد.



به تحلیل الجبری با درنظرداشت (قضیه مجموعه ریمان) انتیگرال معین عبارت از یک نوع مجموعه سلسله عددی می‌باشد، یعنی:

هرگاه $y = f(x)$ یک تابع متمادی در انتروال محدود $[a,b]$ موجود باشد.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \; .....< x_{n-1} < x_n = b$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \;,\; (k = 1,2,3,.....,n)$$

$$\Delta x_k \to 0 \;,\; n \to \infty$$

$$x_{k-1} \le c_k \le x_k \;,\; (k = 1,2,3,....,n)$$

طوریکه c_k حد متوسط را بیان نماید در اینصورت انتیگرال معین $y = f(x)$ از a تا b عبارت از:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + ... + f(c_n)\,\Delta x_n \right]$$

اعداد a حد تحتانی و b حد فوقانی مربوط تابع انتیگرال یاد می‌گردد.

قابل یادآوری است که افاده $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ را به نام مجموعهٔ ریمان یاد می‌گردد.

خواص انتیگرال معین: در حالیکه m,k,b,a و M اعداد ثابت را ارائه می‌نماید، خواص انتیگرال معین قرار ذیل است:

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) $\int_a^b k\, f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx \;,\; k = Const$ ثابت

4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

5) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

6) $m \le f(x) \le M \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a)$

قضیهٔ اساسی

هرگاه $y = f(x)$ یک تابع متمادی در انتروال بسته $[a,b]$ باشد و همچنان $F(x)$ یک تابع اولیه از $f(x)$ باشد، پس داریم که:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

طوریکه $F'(x) = f(x)$ می‌باشد. گفتنی است که این قضیه انتیگرال‌های معین و غیر معین را باهم دیگر مربوط می‌نماید که محاسبهٔ انتیگرال معین را ساده می‌سازد.

مثال‌ها:

انتیگرال‌های معین ذیل را محاسبه نمایید.

1) $\int_{-2}^{4} x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1}\Big|_{-2}^{4} = \frac{1}{4}(x^4)\Big|_{-2}^{4} = \frac{1}{4}[(4)^4 - (-2)^4]$

$= \frac{1}{4}(256-16) = \frac{1}{4}(240) = 60$

2) $\int_0^5 3x^2\,dx = 3\frac{x^{2+1}}{2+1}\Big|_0^5 = x^3\Big|_0^5 = (5)^3 - (0)^3 = 125$

3) $\int_1^3 (2x^3 - x + 5)dx = 2\int_1^3 x^3\,dx - \int_1^3 x\,dx + 5\int_1^3 dx$

$\Rightarrow \int_1^3 (2x^3 - x + 5) = 2\frac{x^4}{4}\Big|_1^3 - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^3 + 5x\Big|_1^3$

$$=\frac{1}{2}\left(3^4-1^4\right)-\frac{1}{2}\left(3^2-1^2\right)+5(3-1)$$

$$=\frac{1}{2}(80)-\frac{1}{2}(8)+5(2)=40-4+10=46$$

4) $\int_2^4\left(5x+2e^x+\frac{3}{x}\right)dx=?$

$$\Rightarrow \int_2^4\left(5x+2e^x+\frac{3}{x}\right)dx=\int_2^4 5x\,dx+\int_2^4 2e^x\,dx+\int \frac{3}{x}\,dx$$

$$=5\int_2^4 x\,dx+2\int_2^4 e^x\,dx+3\int_2^4\frac{dx}{x}$$

$$=\frac{5}{2}x^2\Big|_2^4+\frac{2}{3}e^x\Big|_2^4+3\ln x\Big|_2^4$$

$$=\frac{5}{2}\left(4^2-2^2\right)+\frac{2}{3}\left(e^4-e^2\right)+3\left(\ln 4-\ln 2\right)$$

$$=\frac{5}{2}(12)+\frac{2}{3}e^4-\frac{2}{3}e^2+3\ln 2$$

$$\Rightarrow \int_2^4\left(5x+2e^x+\frac{3}{x}\right)dx=30+\frac{2}{3}e^4-\frac{2}{3}e^2+3\ln 2$$

تعویض متحول در انتیگرال معین: با درنظرداشت انتیگرال معین $\int_a^b f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)\,dx$ تعویض $u=g(x)$ را مدنظر گرفته در نتیجه داریم که $du=g'(x)\,dx$ می‌گردد، در این صورت می‌توان چنین نوشت:

$$\int_a^b f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

مثال ها:

انتیگرال‌های ذیل را به طریقه تعویض حل نمایید.

1) $\int_1^5\sqrt{x-1}\,dx=?$

$$\left.\begin{aligned}&u=x-1\\&du=dx\\&x=1\Rightarrow u=1-1\Rightarrow u=0\\&x=5\Rightarrow u=5-1\Rightarrow u=4\end{aligned}\right\}\Rightarrow \int_1^5\sqrt{x-1}\,dx=\int_0^4\sqrt{u}\,du=\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^4$$

$$=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{2}{3}\sqrt{u^3}\Big|_0^4=\frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3}-\sqrt{0^3}\right)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{64}-0\right)=\frac{2}{3}\cdot 8=\frac{16}{3}$$

2) $\int_0^2 2e^{5x-1}\,dx=?$

$$\left.\begin{aligned}&u=5x-1\\&du=5dx\\&dx=\frac{du}{5}\\&x=0\Rightarrow u=5(0)-1\Rightarrow u=-1\\&x=2\Rightarrow u=5(2)-1\Rightarrow u=9\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\Rightarrow\int_0^2 2e^{5x-1}\,dx\\&=2\int_{-1}^9 e^u\cdot\frac{du}{5}=\frac{2}{5}\int_{-1}^9 e^u\,du\\&=\frac{2}{5}e^u\Big|_{-1}^9=\frac{2}{5}\left(e^9-e^{-1}\right)=\frac{2}{5}e^9-\frac{2}{5e}\end{aligned}$$

3) $\int_1^3\frac{x\,dx}{2x^2+5}=?$

$$\left.\begin{aligned}&u=2x^2+5\\&du=10x\,dx\\&dx=\frac{du}{10x}\\&x=1\Rightarrow u=2(1)^2+5\Rightarrow u=7\\&x=3\Rightarrow u=2(3)^2+5\Rightarrow u=23\end{aligned}\right\}$$

$$u=\cos x \Rightarrow du=-\sin x\,dx \Rightarrow dx=-\frac{du}{\sin x}$$

$$x=0 \Rightarrow u=\cos 0 \Rightarrow u=1$$

$$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=\cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=0$$

$$=-\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)-\int_1^0 u^2\cdot\sin x\cdot\frac{-du}{\sin x}$$

$$=-(0-1)+\int_1^0 u^2\cdot du$$

$$=1+\frac{1}{3}u^3\Big|_1^0=1+\frac{1}{3}\left(0^3-1^3\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

دریافت انتیگرال‌های معین به طریقه انقسام یا جزء به جـزء: روش انتیگرال‌گیری در انتیگرال‌های معین مانند انتیگرال‌هـای غیـرمعین بـوده و از عین قاعده پیروی می‌نمایند، یعنی:

$$\int_a^b u\cdot dv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b v\cdot du$$

مثال‌ها:

انتیگرال‌های معین ذیل را به طریقه قسمی (انقسام) محاسبه نمایید.

1) $\int_0^2 5x\cdot e^{5x+1}\,dx=?$

$$u=x\Rightarrow du=dx \qquad dv=5\cdot e^{5x+1}\,dx$$

$$t=5x+1,\quad dt=5dx,\quad dx=\frac{dt}{5}\;\Big\}\; dv=5\cdot e^t\cdot\frac{dt}{5},\quad dv=e^t\cdot dt,\quad v=e^t,\quad v=e^{5x+1}$$

$$\Rightarrow\int_0^2 u\cdot dv=u\cdot v\Big|_0^2-\int_0^2 v\cdot du$$

$$=\int_0^2 5x\cdot e^{5x+1}dx=x\cdot e^{5x+1}\Big|_0^2-\int_0^2 e^{5x+1}dx$$

$$=\left(2\cdot e^{11}-0\cdot e^1\right)-\frac{1}{5}e^{5x+1}\Big|_0^2=2e^{11}-\frac{1}{5}\left(e^{11}-e^1\right)$$

$$=2e^{11}-\frac{1}{5}e^{11}+\frac{e}{5}=\frac{9}{5}e^{11}+\frac{e}{5}$$

$$\Rightarrow\int_1^3\frac{x\,dx}{2x^2+5}=\int_7^{23}\frac{x\cdot\frac{du}{10x}}{u}=\frac{1}{10}\int_7^{23}\frac{du}{u}$$

$$=\frac{1}{10}\ln u\Big|_7^{23}=\frac{1}{10}(\ln 23-\ln 7)=\frac{1}{10}\ln\left(\frac{23}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{10}\ln(3.285)\approx\frac{1}{10}(1.189)\approx 0.1189$$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx=?$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2x\,dx$$

$$u=2x\Rightarrow du=2dx\Rightarrow dx=\frac{du}{2}$$

$$x=0\Rightarrow u=2(0)\Rightarrow u=0$$

$$x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=2\left(\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow u=\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\cdot\frac{du}{2}$$

$$=\frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,du$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)+\frac{1}{4}(\sin u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}(1-0)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}=\frac{\pi+2}{8}$$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=?$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 x\right)\sin x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos^2 x\cdot\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot\sin x\,dx$$

$$=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot\sin x\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u=1+x^2 \Rightarrow du=2x\cdot dx \\ dx=\dfrac{du}{2x} \\ x=1 \Rightarrow u=1+1^2 \Rightarrow u=2 \\ x=0 \Rightarrow u=1+0^2 \Rightarrow u=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} =\dfrac{\pi}{4}-\int_1^2 \dfrac{x\cdot\dfrac{du}{2x}}{u} \\ =\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\int_1^2 \dfrac{du}{u}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln u\Big|_1^2 \\ =\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(\ln 2-0)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2 \end{array}$$

4) $\int_1^e \ln x\,dx=?$

$$\left.\begin{array}{l} u=\ln x \Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b u\cdot dv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b v\cdot du$$

$$\Rightarrow \int_1^e \ln x\,dx=x\cdot\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{dx}{x}$$

$$=(e\cdot\ln e-1\cdot\ln 1)-\int_1^e dx$$

$$=(e-0)-x\Big|_1^e=e-(e-1)=e-e+1=+1$$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} x\cdot\sin^2 x\,dx=?$

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \Rightarrow \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{8}} x\cdot\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}} x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{x}{2}dx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} x\cdot\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}dx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} x\cdot\cos 2x\,dx$$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x\,dx=?$

$$\left.\begin{array}{l} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=\cos x\,dx \\ v=\sin x \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \int_a^b u\cdot dv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b v\cdot du$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x\,dx=x\cdot\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}-0\cdot\sin 0\right)+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot 1-0+\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}+(0-1)=\frac{\pi}{2}-1$$

3) $\int_0^1 arc\tan x\,dx=?$

$$\left.\begin{array}{l} u=arc\tan x \Rightarrow du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b u\cdot dv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b v\cdot du$$

$$\Rightarrow \int_0^1 arc\tan x\,dx=x\cdot arc\tan\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=[1\cdot arc\tan(1)-0\cdot arc\tan(0)]-\int_0^1\frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{64}-0^2\right)-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} x\cdot\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{\pi^2}{256}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} x\cdot\cos 2x\,dx$$

هرگاه:

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{8}} x\cdot\cos 2x\,dx$$

$$u=x\Rightarrow du=dx$$

$$dv=\cos 2x\cdot dx\Rightarrow v=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Rightarrow I_1=\int_0^{\frac{\pi}{8}} x\cos 2x=\int_a^b u\cdot dv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b v\cdot du$$

$$\Rightarrow I_1=x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}-\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{1}{2}\sin 2x\cdot dx$$

$$I_1=\frac{x}{2}\cdot\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin 2x\,dx$$

$$I_1=\left(\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{4}-\frac{0}{2}\cdot\sin 0\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$I_1=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-0+\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$I_1=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{16}+\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos 0\right)$$

$$I_1=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{16}+\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{16}+\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}\pi+2\sqrt{2}-4}{16}$$

$$\Rightarrow I_1=\frac{\sqrt{2}\,\pi+2\sqrt{2}-4}{16}$$

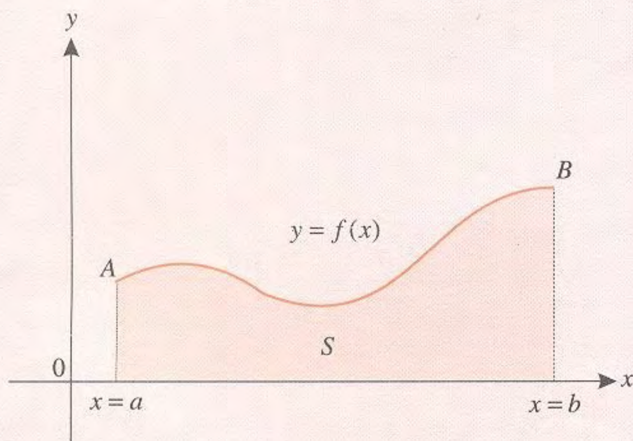
$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{8}} x\cdot\sin^2 x\,dx=\frac{\pi^2}{256}-\frac{1}{2}I_1$$

$$=\frac{\pi^2}{256}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}\,\pi+2\sqrt{2}-4}{16}\right)$$

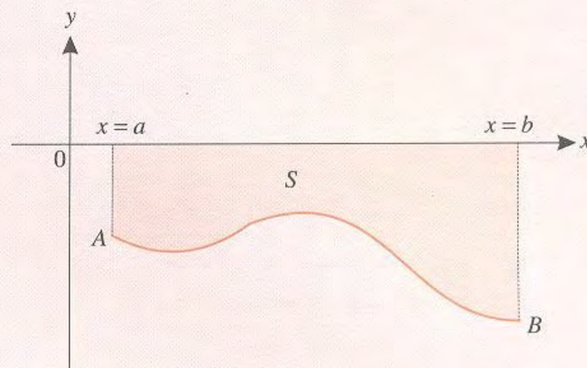
$$=\frac{\pi^2}{256}-\frac{\sqrt{2}\pi+2\sqrt{2}-4}{32}=\frac{\pi^2-8(\sqrt{2}\pi+2\sqrt{2}-4)}{256}$$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{8}} x\cdot\sin^2 x\,dx=\frac{\pi^2-8\sqrt{2}\,\pi-16\sqrt{2}+32}{256}$$

محاسبه مساحت بـه وسـیلهٔ انتیگـرال معـین: طوریکـه در معرفـی انتیگرال معین واضح گردید که اگر تابع $y=f(x)$ در یک انتروال $[a,b]$ متمادی بوده طوریکه $f(x)$ دارای قیمت‌های مثبت باشـد. پس مـساحت سطح که بین منحنی $y=f(x)$ و محور افقی (x) در طول انتروال مذکور عبارت از: $\Rightarrow S=\int_a^b f(x)\,dx$

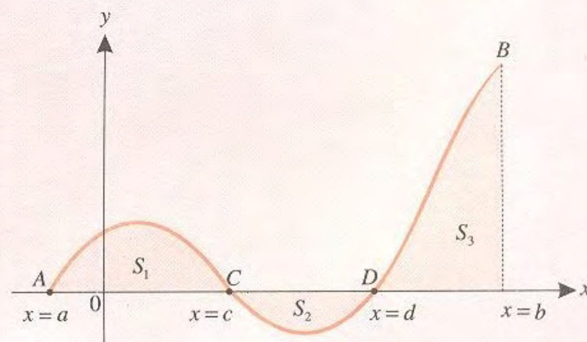


در صورتیکه تابع $y=f(x)$ در انتروال مربوط قیمت‌های منفی داشـته باشد. مساحت سطح مذکور عبارت از: $\Rightarrow S=-\int_a^b f(x)\,dx$



هرگاه گراف منحنی تابع $y = f(x)$ در قسمت بالا و پایین محور قـرار داشته باشد. در این صورت مساحت سطوح که بین منحنی تابع و محور افقـی (x) در طول انتروال قرار دارد.

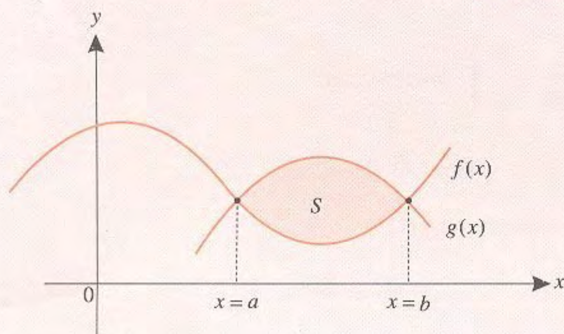
نظر به شکل ذیل عبارت از:



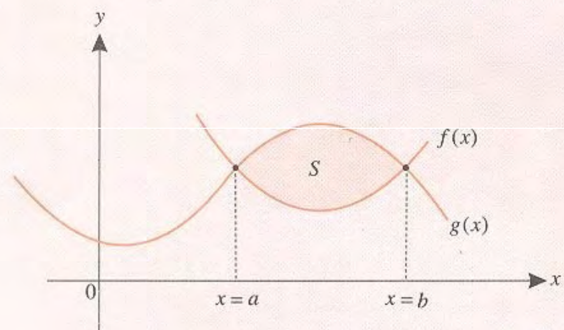
$$\Rightarrow S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

در صورتی که منحنی گراف توابـع $f(x)$ و $g(x)$ یکـدیگر را در یـک انتروال $[a,b]$ قطع نماید، مساحت سطح واقع بین دو منحنی فـوق‌الـذکر در انتروال داده شده، در دو حالت ذیل عبارت از:

حالت اول: هرگاه $f(x) > g(x)$ باشد، $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$



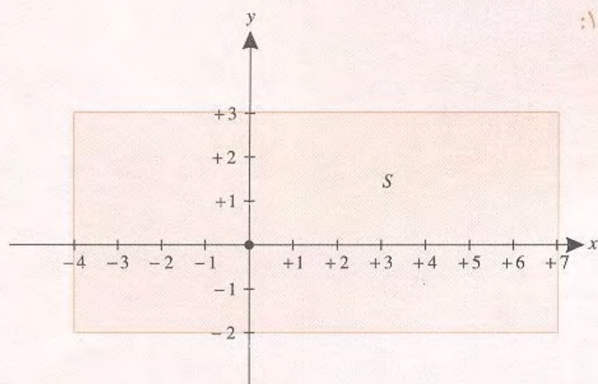
حالت دوم: هرگاه $g(x) > f(x)$ باشد، $S = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$



مثال‌ها:

مساحت ساحات محصور ذیل را دریابید.

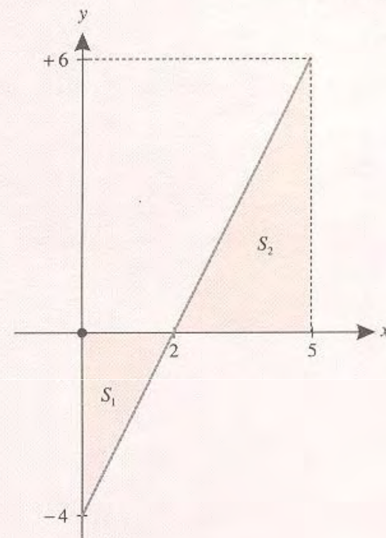
مثال ۱:



حل: چون $y=5$ ، $a=-4$ ، $b=7$ می‌باشد، بناءً می‌توان نوشت:

$$S=\int_{-4}^{7}5\,dx=5\int_{-4}^{7}dx=5\left(x\Big|_{-4}^{7}\right)=5[7-(-4)]=5[7+4]=55$$

مثال ۲: مساحت سطح که توسط خط مستقیم $y=2x-6$ را با محور افقی در انتروال $[0,5]$ دریابید.



$y=2x-4$

x	y
0	-4
2	0

$\Rightarrow S=S_1+S_2$

$$\int_0^5(2x-4)\,dx=-\int_0^2(2x-4)\,dx+\int_2^5(2x-4)\,dx$$

$$=-(x^2-4x)\Big|_0^2+(x^2-4x)\Big|_2^5$$

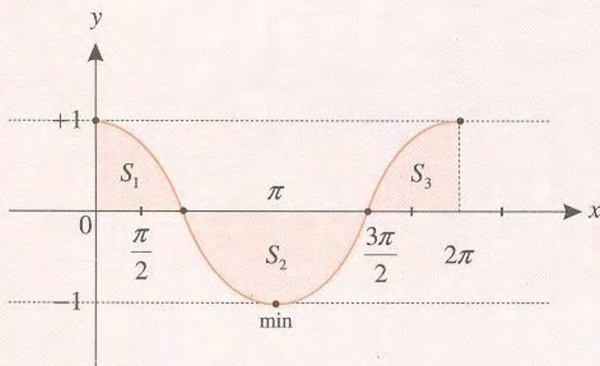
$$=-\left[(2)^2-0^2-4(2-0)\right]+\left[5^2-2^2-4(5-2)\right]$$

$$=-(4-8)+(25-4-12)=+4+9=+13$$

مثال ۳: مساحت سطح که توسط منحنی $y=\cos x$ را با محور افقی در انتروال $[0,2\pi]$ را دریابید.

$y=\cos x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	+1	0	−1	0	+1



$S=S_1+S_2+S_3$

$$S=\int_0^{2\pi}\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos x\,dx$$

$$=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0-\left(\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)+\sin 2\pi-\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$=+1-0-(-1-1)+0-(-1)$$

$$=+1-(-2)+1=+1+2+1=4$$

مثال ۴: مساحت سطح که توسط منحنی $y=4-x^2$ را با محور افقی (x) محاسبه نمایید.

$y=4-x^2$

$y'=0-2x\Rightarrow y'=-2x\Rightarrow y'=0\Rightarrow -2x=0\Rightarrow x=0$

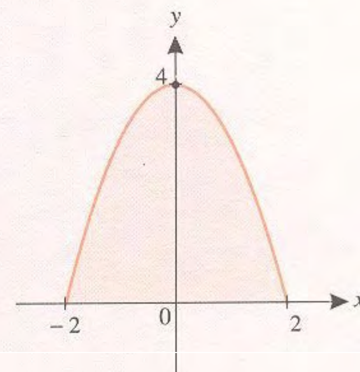
$\Rightarrow y = 4 - x^2 \Rightarrow y = 4 - 0^2 \Rightarrow y = 4$

نقطه بحرانی تابع فوق عبارت از: $\max(0,4)$

تقاطع با محور x عبارت از: $y = 0$

$y = 4 - x^2 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$P_1(-2,0)$, $P_2(+2,0)$



$$\Rightarrow \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 4\,dx - \int_{-2}^{2} x^2\,dx$$

$$= 4\int_{-2}^{2} dx - \int_{-2}^{2} x^2\,dx = 4x\Big|_{-2}^{2} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{2}$$

$$= 4[2-(-2)] - \frac{1}{3}[2^3 - (-2)^3]$$

$$= 4(2+2) - \frac{1}{3}(8+8) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} = 10.67$$

مثال ۵: مساحت سطح که توسط منحنی $y = x^2 - 8x + 12$ را با محور افقی (x) محاسبه نمایید.

$y = x^2 - 8x + 12$

$y' = 2x - 8 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8/:2 \Rightarrow x = 4$

$\Rightarrow y = x^2 - 8x + 12 \Rightarrow y = (4)^2 - 8(4) + 12$

$= 16 - 32 + 12 = -4 \Rightarrow y = -4$

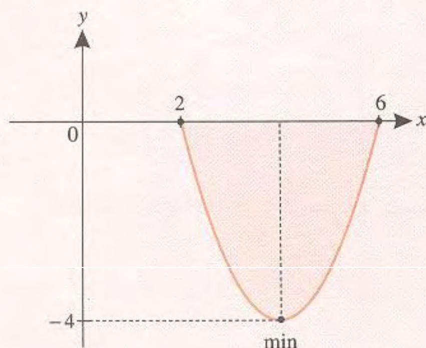
نقطه بحرانی تابع فوق عبارت از: $\min(4,-4)$

تقاطع با محور x عبارت از $y = x^2 - 8x + 12$

$y = 0$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$(x-2)(x-6) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 6 \Rightarrow P_1(2,0)$, $P_2(6,0)$



$$S = -\int_{2}^{6} f(x)\,dx = -\int_{2}^{6}(x^2 - 8x + 12)\,dx$$

$$= -\left(\int_{2}^{6} x^2 dx - 8\int_{2}^{6} x\,dx + 12\int_{2}^{6} dx\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_{2}^{6} - 8\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_{2}^{6} + 12x\Big|_{2}^{6}\right)$$

$$= -\left[\frac{1}{3}(6^3 - 2^3) - 4(6^2 - 2^2) + 12(6-2)\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{3}(216-8) - 4(36-4) + 12\cdot 4\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{3}(208) - 4(32) + 48\right] = -(69.33 - 128 + 48)$$

$$= -(117.33 - 128) = -(-10.67) = 10.67$$

مثــال ۶: مــساحت ســطح محــصور شــده توســط منحنــی تــابع $f(x)=-x^2+6x$ و خط مستقیم $g(x)=x$ به وجود می‌آید. دریافت نمایید.

$f(x)=-x^2+6x$

$f'(x)=-2x+6 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow -2x+6=0 \Rightarrow x=3$

$\Rightarrow y=-x^2+6x \Rightarrow y=-9+18 \Rightarrow y=9$

نقطه بحرانی منحنی $f(x)$ عبارت از $\Rightarrow \max(3,9)$

تقاطع با محور x عبارت از: $y=-x^2+6x$

$y=0 \Rightarrow -x^2+6x=0 \Rightarrow x(-x+6)=0$

$x=0 \Rightarrow -x+6=0 \Rightarrow x=6$

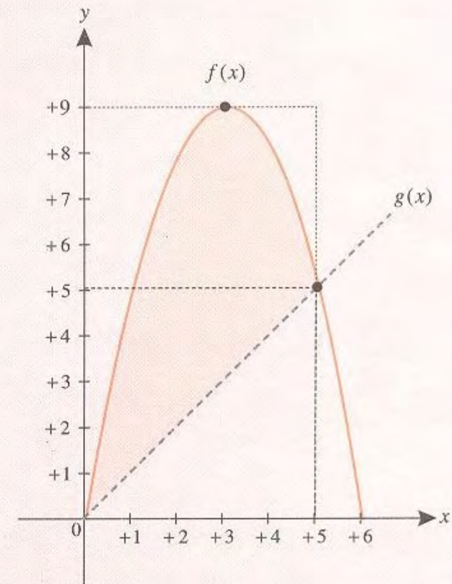
$P_1(0,0)\ ,\ P_2(6,0)$

نقاط تقاطع خط و منحنی عبارت از: $f(x)=g(x)$

$-x^2+6x=x \Rightarrow -x^2+5x=0 \Rightarrow x(-x+5)=0$

$x=0 \Rightarrow -x+5=0 \Rightarrow x=5$

$M_1(0,0)$ و $M_2(5,5)$



طوریکه در شکل ملاحظه می‌گردد گراف $f(x)$ بالاتر از گراف $g(x)$ قرار دارد، یعنی $f(x)>g(x)$ است پس می‌توان چنین نوشت:

$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_0^5(-x^2+6x-x)dx=\int_0^5(-x^2+5x)\,dx$$

$$=-\int_0^5 x^2\,dx+5\int_0^5 x\,dx=-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^5+5\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^5$$

$$=-\frac{1}{3}(5^3-0)+\frac{5}{2}(5^2-0)=-\frac{1}{3}\cdot125+\frac{5}{2}\cdot25$$

$$=-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}=\frac{-250+375}{6}=\frac{125}{6}=20.8$$

مثال ۷: مساحت سطح احاطه شده توسط دو منحنی $f(x)=x^2+4x$ و $g(x)=-x^2$ را محاسبه نمایید.

$f(x)=x^2+4x$

$f'(x)=2x+4 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow x=-2$

$f(2)=(-2)^2+4(-2)=4-8=-4 \Rightarrow y=-4$

نقطه بحرانی تابع $f(x)$ عبارت از: $\min(-2,-4)$

نقاط تقاطع تابع $f(x)$ با محور x عبارت از: $f(x)=x^2+4x$

$y=0 \Rightarrow x^2+4x=0$

$x(x+4)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x+4=0 \Rightarrow x=-4$

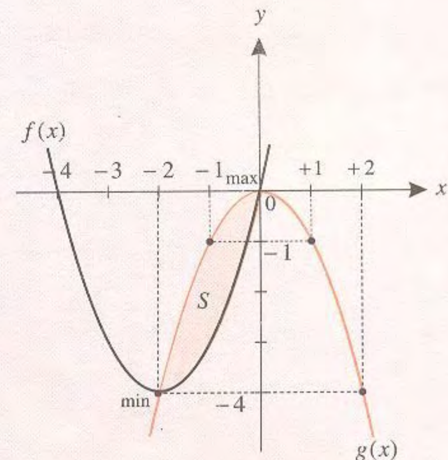
$P_1(0,0)$ و $P_2(-4,0)$

$g(x)=-x^2$

$g'(x)=-2x \Rightarrow g'(x)=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0$

نقطه بحرانی تابع g(x) عبارت از: $\max(0,0)$

x	-2	-1	0	$+1$	$+2$
$g(x)$	-4	-1	0	-1	-4



طوریکه در شکل ملاحظه می‌گردد، گراف $g(x)$ بـالاتر از گـراف $f(x)$ قرار دارد، یعنی $g(x) > f(x)$ است پس می‌توان چنین نوشت:

$$S = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_{-2}^{0} \left[-x^2 - x^2 - 4x\right]dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (-2x^2 - 4x)\,dx$$

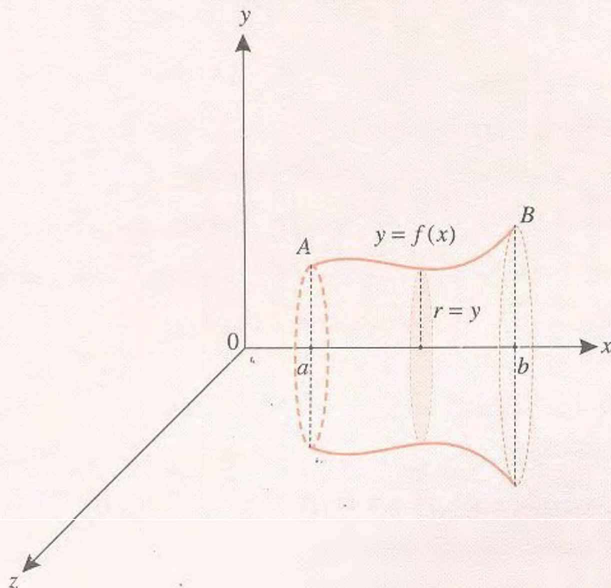
$$= -2\int_{-2}^{0} x^2\,dx - 4\int_{-2}^{0} x\,dx = -\frac{2}{3}x^3\Big|_{-2}^{0} - 4\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0}$$

$$= -\frac{2}{3}\left[0 - (-2)^3\right] - 2\left[0^2 - (-2)^2\right]$$

$$= -\frac{2}{3}(+8) - 2(-4) = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{-16+24}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$

محاسبه احجام دورانی

هرگاه یک سطح را در نظر بگیریم که توسط منحنـی تـابع $y = f(x)$ روی سیستم کمیـات وضـعیه قـایم بـا محـور x در انتـروال $[a, b]$ محـدود گردیده باشد، اگر این سطح به حول محور x در فضا دوران نمایند. قرار شـکل ذیل جسم فرضی تقریباً استوانه‌یی را به وجود می‌آورد.



اگر ارتفاع آن $\Delta x = b - a$ باشد و سـطح ایـن اسـتوانه توسـط سـطوح دایروی در نقـاط مختلـف $\Delta x_1, \Delta x_2, ...\Delta x_n$ احاطـه گردیـده باشـد چـون مساحت دایره نظر به محـور x، $A(x) = \pi r^2$ و شـعاع هریـک از دایـروی قطع شده از استوانه نظر به شکل موازی به محور y مـی‌باشـد پـس $y = r$ می‌گردد پس فورمول حجم این جسم نظر به مجمـوع ریمـان طـور ذیـل بـه دست می‌آید:

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x)\cdot\Delta x \int_a^b \pi r^2 \cdot dx = \pi\int_a^b r^2\,dx = \pi\int_a^b y^2\,dx$$

$$\Rightarrow V = \int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

مثال‌ها:

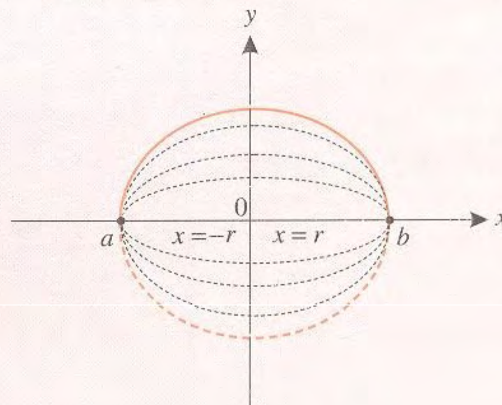
حجم‌های اشکال ذیل را به وسیله انتیگرال محاسبه نمایید.

۱) حجم یک کره به شعاع r را محاسبه نمایید.

حل: اگر یک نیمه دایره به حول قطر خویش دوران نماید کره به دست می‌آید.

پس نظر به شکل ذیل داریم که:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$



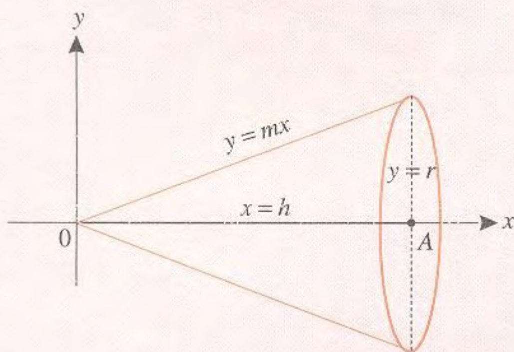
$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} y^2 dx = 2\pi \int_0^r y^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx$$
$$= 2\pi (r^2 \int_0^r dx - \int_0^r x^2 dx)$$
$$= 2\pi r^2 \cdot x\Big|_0^r - 2\pi \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^r = 2\pi r^2 (r - o) - \frac{2\pi}{3}(r^3 - o^3)$$
$$= 2\pi r^3 - \frac{2\pi}{3} r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

مثال ۲: حجم مخروطی به شعاع r و ارتفاع h را محاسبه نمایید.

چون سطح مخروط از دوران خط مستقیم $y = mx$ حول محور x حاصل می‌گردد، بنابر این نظر به شکل می‌توان چنین نوشت:

$$V = \int_0^h \pi y^2 dx$$

$$V = \int_0^h \pi (mx)^2 dx = \int_0^h \pi \cdot m^2 x^2 dx$$
$$= \pi m^2 \int_0^h x^2 dx = \pi m^2 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h$$
$$= \pi m^2 \cdot \frac{1}{3}(h^3 - o^3) = \frac{\pi h}{3}(m.h)^2$$



طوریکه در شکل ملاحظه می‌گردد $x = h$ و $y = r$ است و از جانبی

$$\Rightarrow y = mx \Rightarrow r = m.h$$
$$v = \frac{\pi h}{3}(mh)^2 \Rightarrow v = \frac{\pi h}{3}(r)^2 \Rightarrow v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

مثال ۳: حجم جسمی که از دوران بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ و محور x که به حول قطر بزرگ خویش دوران نموده و به وجود می‌آید، دریافت نمایید.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Big/ \cdot b^2$$
$$\Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

$$\Rightarrow v=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2)dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{a}(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2)dx=2\pi\int_{0}^{a}b^2dx-2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\int_{0}^{a}x^2dx$$

$$=2\pi b^2x-\Big|_0^a\frac{2\pi b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^a$$

$$=2\pi b^2(a-o)-\frac{2\pi b^2}{3a^2}(a^3-o)$$

$$=2\pi ab^2-\frac{2\pi a^3b^2}{3a^2}$$

$$=2\pi ab^2-\frac{2\pi ab^2}{3}=\frac{2\pi(3ab^2-ab^2)}{3}$$

$$=2\pi(\frac{2ab^2}{3})=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

$$\Rightarrow v=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

فورمول فوق زمانی قابل تطبیق است که محور محراقی الپیس محـور x باشد.

در صورتیکه محور محراقی الپیس محور y باشد در این صورت حجـم آن عبارت از:

$$v=\frac{4}{3}\pi a^2b$$

تمرینات فصل دهم

انتیگرال‌های ذیل را محاسبه نمایید.

1) $\int 8\,dx=?$

2) $\int -\frac{3}{5}dx=?$

3) $\int \sqrt{2}\,dx=?$

4) $\int x^4dx=?$

5) $\int \frac{3}{5}x^{11}\,dx=?$

6) $\int 8m^5\,dm=?$

7) $\int +\frac{3}{5}p^4\,dp=?$

8) $\int (4x^3-2x+5)\,dx=?$

9) $\int \frac{-3}{x^2}dx=?$

10) $\int 5\sqrt[3]{u^2}\,du=?$

11) $\int \frac{3x^7-2x^4+1}{x^3}dx=?$

12) $\int +3\sin x\,dx=?$

13) $\int -\frac{1}{2}\cos x\,dx=?$

14) $\int \frac{5}{3}e^x\,dx=?$

15) $\int (5x^2+2)^4\,3x\,dx=?$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+4}}=?$

17) $\int \sqrt[3]{x^2+1}\cdot 2x\,dx=?$

18) $\int \sqrt[5]{\cos^2 x}\cdot\sin x\cdot dx=?$

19) $\int \frac{2\,dx}{3x-1}=?$

20) $\int \frac{5x}{3x^2+2}dx=?$

21) $\int 2^{x^2+5}\cdot x\,dx=?$

22) $\int e^{x^3+1}\cdot 5x^2\,dx=?$

23) $\int \frac{5e^{2x+1}dx}{(1+e^{2x+1})^3}=?$

24) $\int \frac{5x\cdot\ln^3(3x^2+1)}{3x^2+1}dx=?$

25) $\int \frac{2\ln^5(7x)}{3x}dx = ?$

26) $\int \frac{arc\tan x}{2x^2+2}dx = ?$

27) $\int \frac{3x}{\sqrt{25x^4+1}}dx = ?$

28) $\int \sin^2 3x\,dx = ?$

29) $\int \cot^5 x \cdot \csc^2 dx = ?$

30) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx = ?$

31) $\int \cos^7 x \cdot \sin x\,dx = ?$

32) $\int \cos^5 x\,dx = ?$

33) $\int \frac{dx}{1+4x^2} = ?$

34) $\int \frac{3x\,dx}{9-16x^4} = ?$

35) $\int \frac{5x^2\,dx}{\sqrt{25-4x^6}} = ?$

36) $\int x \cdot e^x\,dx = ?$

37) $\int x \cdot \ln x\,dx = ?$

38) $\int x \cdot \sin x\,dx = ?$

39) $\int \ln(1-x)\,dx = ?$

40) $\int arc\sin x\,dx = ?$

41) $\int x \cdot \cos^2 x\,dx = ?$

42) $\int \frac{\ln x}{x}dx = ?$

43) $\int \frac{2x\,dx}{\cos^2 x} = ?$

44) $\int 5x(\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx = ?$

45) $\int x \cdot arc\tan dx = ?$

46) $\int \frac{dx}{x^2+2x+1} = ?$

47) $\int \frac{dx}{x^2-6x+10} = ?$

48) $\int \frac{dx}{2x^2+4x+11} = ?$

49) $\int \frac{dx}{x^2-4x-1} = ?$

50) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}} = ?$

51) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+10x+29}} = ?$

52) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x-16}} = ?$

53) $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx = ?$

54) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+8x+15)} = ?$

55) $\int \frac{x^4\,dx}{x^3+2x^2-x-2} = ?$

56) $\int \frac{x^2+5x-1}{x^2+x-12}dx = ?$

57) $\int \frac{5\,dx}{x^2-1} = ?$

58) $\int \frac{x^2+5x+11}{x^3+2x^2+x+2}dx = ?$

59) $\int \frac{x^2+5x+9}{(x+1)^3}$

60) $\int \frac{x+1}{x^2+4x+4}dx = ?$

61) $\int \frac{x^3+5x^2+7x+9}{x^2+5x+4}dx = ?$

62) $\int_{-3}^{3} x^4\,dx = ?$

63) $\int_0^1 18x^{15}\,dx = ?$

64) $\int_0^4 \frac{5}{3}x^2\,dx = ?$

65) $\int_1^5 (3x^2+8x-2)dx = ?$

66) $\int_1^3 \left(2x-3e^x+\frac{1}{x}\right)dx = ?$

67) $\int_0^3 3e^{3x+5}\,dx = ?$

68) $\int_2^4 \frac{3x\,dx}{5x^2+1} = ?$

69) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cdot\cos x\,dx = ?$

70) $\int_0^3 2x\cdot e^{3x-1}\,dx = ?$

71) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin x\,dx = ?$

72) $\int_1^{\sqrt{3}} arc\cot x\,dx = ?$

73) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\cos^2 x\,dx = ?$

74) مـساحت سـطح محـاط بـا منحنـی‌هـای $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ را دریافت نمایید.

75) مساحت سطح محصور با منحنی $y=\sin x$ در انتـروال $[0,4\pi]$ را دریابید.

76) مساحت سطح احاطه شده که توسط منحنـی $y=-x^2+6x-5$ را با محور x محاسبه نمایید.

فصل یازدهم

احتمالات (Probability)

تاریخچه احتمالات: در قرن چهارم قبل میلاد، ارسطو فیلـسوف یونـانی توانسته بود در مقابل هر عوامل، حوادث اتفاقی آن را از نظـر فلـسفه بررسـی نماید. بعداً ریاضی‌دانان دیگر به نام‌های کاردان، گالیله، شواله دومیر، پاسـکال و فارما نظریاتی راجع به برد و باخت در قمار ارائـه نمودنـد کـه بعـد از آن‌هـا عالمی دیگری به نام Huyyens کتابی تحت عنوان بخت آزمایی نوشت. بعداً برنولی که این علم را در اوایل به حیث یک موضوع سرگرمی می‌دانست، وارد علم واقعی گردانید. برنولی یک فارمول را نیز کشف نمـود و همچنـان نظریـه تحلیلی احتمال را ارائه نمود.

بعداً Demover تمام آثار علاقمندان علم احتمال را منسجم کرد و کتابی تحت عنوان Doctorin chance نوشت. بالاخره بعد از قرن 18 میلادی علم احتمالات را به حیث یک علم واقعی ساختند که در توسعه این علم بعد از قرن 18 علمای مختلف مانند بوفن فرانسوی، دالابرت، لاپلاس، گـوس و در قـرن 19 و 20 علمای روسیه مانند چبشیوف، مارکوف و کولموگورف سهم برازنـده داشتند و کولموگورف توانست تمام علم احتمال را از ابتدأ تـا سـال 1913 بـه شکل ست (Set) تنظیم نمود و در تمام پوهنتـون‌هـای جهـان از آن اسـتفاده می‌کنند که قبل از وی علم احتمال جنبه کلاسیک را داشت.

نظریه احتمال

شمارش منطقی اعداد و اشیا

با استفاده از شمارش منطقی اعـداد طبیعـی مـی‌تـوان احتمـال ترتیـب و جابجای آن‌ها را به طور منظم دریافت نمود که می‌توان از آن در بهبـود امـور اجتماعی، اقتصادی و سایر بخش‌های حیاتی استفاده نمود که ذیلاً به توضـیح آن‌ها آغاز می‌نماییم.

فورمول اصل ضرب در شمارش: هرگـاه یـک عملیـه بـه p_1 شـکل مختلف و عملیه دوم بعد از انجام عملیه اولی به p_2 شکل مختلـف و عملیـه سومی بعد از انجام عملیه‌های اولی و دوم به p_3 شکل مختلف.... p_n شـکل صورت بگیرد پس تعداد حالات مختلفه این عملیه‌ها به طور همزمان از رابطه ذیل به دست می‌آید:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots\cdots p_n$$

مثال‌ها:

مثال ۱: با استفاده از ارقام 2، 5، 7 چند عدد سـه رقمـی سـاخته شـده می‌تواند، که تکرار آن مجاز باشد.

حالت که تمام اعداد در خانه یک‌ها جابجا گردد $p_1 = 3$

حالت که تمام اعداد در خانه دها جابجا گردد. $p_2 = 3$

حالات که تمام اعداد در خانه صدها جابجا گردد. $p_3 = 3$

یک‌ها	ده‌ها	صدها
3 عدد	3 عدد	3 عدد

پس تعداد حالات مختلفه این عملیه عبارت از:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$$
$$p = 3.3.3. \Rightarrow p = 27$$

مثال ۲: در یک دفتر پولیس امنیت عامه 4 نفر صاحب منصب، 7 نفر افراد پولیس طبقه ذکور و 5 نفر افراد پولیس طبقه اناث وجود دارد به چنـد گـروپ

سه نفری می‌توانند نوکریوالی 24 ساعته را اجرأ نمایند:

$$\left.\begin{matrix} P_1=4 \\ P_2=7 \\ P_3=5 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} P=P_1.P_2.P_3 \\ P=4.7.5=140 \end{matrix} \quad \text{گروپ}$$

مثال ۳: با استفاده از ارقام (1) الی (9) چند عـدد چهـار رقمـی را سـاخته می‌تواند در صورتیکه تکرار ارقام مجاز نباشد.

یک‌ها	دها	صدها	هزارها
9	8	7	6

تمام حالات که تمام ارقام در خانه یک‌ها قرار گیرد. $p_1=9$

تمام حالات که باقی ارقام بدون تکرار در خانه ده‌ها قرار گیرد.

$p_2=8$

تمام حالات که باقی ارقام بدون تکرار در خانه صدها قرار گیرد.

$p_3=7$

تمام حالات که باقی ارقام بدون تکرار خانه هزارها قرار گیرد.

$p_4=6$

$p=p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$

$p=9.8.7.6 \Rightarrow p=3024$

فورمول اصل جمع در شمارش: هرگاه n عملیه مستقل از یکدیگر مانند p_1، p_2، p_3، .... p_n داشته باشیم و هدف تنها معلوم نمـودن تعـداد حالات وقوع یکی از آن‌ها باشد، در این صورت تعداد حالات مختلفـه عبـارت است از:

$$p=p_1+p_2+p_3+.......+p_n$$

مثال‌ها:

مثال ۱: چهار تکه به رنگ‌های سرخ، سبز، سیاه و آبی داریم، می‌خـواهیم از آن‌ها بیرق بسازیم که در آن از حد اکثر سه رنگ کار گرفته شود.

4			تعداد بیرق های یک رنگ	$p_1=4$
4	3		تعداد بیرق های دو رنگ	$p_2=3.4=12$
4	3	2	تعداد بیرق های سه رنگ	$p_3=2.3.4=24$

تعداد بیرق ها مورد ضرورت

$$\Rightarrow p=p_1+p_2+p_3 \Rightarrow p=4+12+24=40$$

مثال ۲: به چند شکل ممکنه می‌توان حـد اقـل دو کتـاب از چهـار کتـاب مختلفه را انتخاب نموده و در یک الماری پهلوی همدیگر قرار دهیم.

p_2: انتخاب 2 کتاب از 4 کتاب

موقعیت اول	موقعیت دوم
4	3

$p_2=4.3=12$

P_3: انتخاب 3 کتاب از 4 کتاب

موقعیت اول	موقعیت دوم	موقعیت سوم
4	3	2

$p_3=4.3.2=24$

P_4: انتخاب کتاب از 4 کتاب

موقعیت اول	موقعیت دوم	موقعیت سوم	موقعیت چهارم
4	3	2	1

$p_4=4.3.2.1=24$

تمام حالات مختلفه:

$$\Rightarrow p=p_2+p_3+p_4$$

$$p=12+24+24=60$$

ترتیب‌ها (Arrangements):

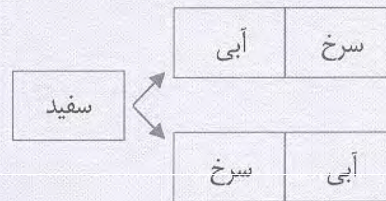
حالات مختلف را که می‌توان n شی مختلف را به طور مرتب در کنار هم ترتیب شده می‌توانند، به نام ترتیب‌های مختلف آن گفته می‌شود که تعداد این ترتیب‌ها عبارت است از:

$$p_{(n,n)} = n!$$

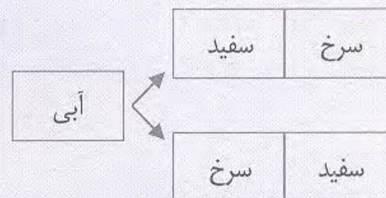
مثال‌ها:

مثال ۱: سه پارچه کاغذ به رنگ‌های سفید، آبی و سرخ داریم به چند شکل متفاوت از هم می‌توانند پهلوی هم سرش گردند.

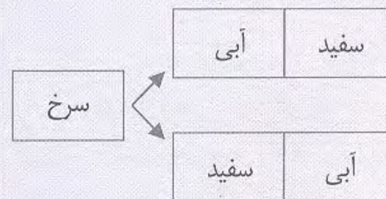
حالت اول:



حالت دوم:



حالت سوم:



پس در نتیجه می‌توان چنین نوشت:

$$n = 3$$

$$p_{(n,n)} = n! \Rightarrow p_{(3,3)} = 3! = 6$$

مثال ۲: به چند شکل می‌توانند سه کتاب مختلف ریاضی و 4 کتاب مختلف فزیک را به شرط که کتاب‌های ریاضی در کنار هم و در قطار اول قرار گیرند، ترتیب گردیده می‌توانند.

$$p_1 = (n_1)! \Rightarrow p_1 = 3! = 6$$

$$p_2 = (n_2)! \Rightarrow p_2 = 4! = 24$$

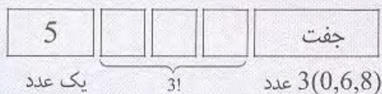
$$\Rightarrow p = p_1 . p_2 \Rightarrow p = 6.24 = 144$$

موقعیت دوم (فزیک) موقعیت اول (ریاضی)



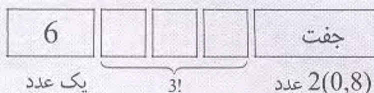
مثال ۳: با استفاده از ارقام $0,5,6,7,8$ چند عدد پنج رقمی بدون تکرار جفت و کوچکتر از (70000) ساخته می‌توانید.

حالت اول



$$p_1 = 1.3!.3 = 6.3 = 18$$

حالت دوم



$$p_2 = 1.3!.2 = 6.2 = 12$$

$$\Rightarrow p = p_1 + p_2 \Rightarrow p = 18 + 12 \Rightarrow p = 30$$

تبدیل‌ها (Permutations)

حالت مختلف که می‌توانیم از n شی مختلف r شی را طوریکه باشد با در نظرداشت ترتیب آنها در کنار همدیگر مرتب نماییم، $(r \leq n)$ تبدیل نامیده می‌شود که تعداد آن عبارت است از:

$$p_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال‌ها:

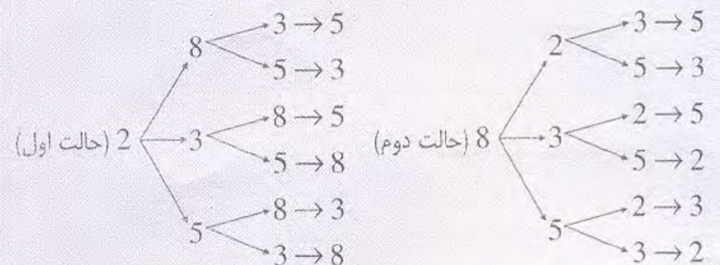
مثال ۱: به چند شکل مختلف می‌توان از صنف دوازدهم الف که 15 نفر شاگرد دارد، سه شاگرد را به شرطی که، شاگرد اول نماینده، شاگرد دوم معاون نماینده و شاگرد سوم مسؤول حاضری و ترقی تعلیم صنف است تعیین نمود.

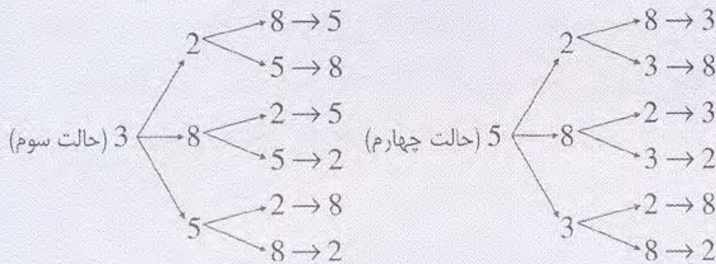
$$\begin{matrix} n=15 \\ r=3 \end{matrix} \Rightarrow p(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$p(15,3) = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15.14.13.12!}{12!} = 15.14.13 = 2730$$

مثال ۲: با استفاده از ارقام 5، 3، 8، 2 چند سه رقمی بدون تکرار ساخته می‌توانید. این اعداد را به روش درختی تعیین نماید.

$$\begin{matrix} n=4 \\ r=3 \end{matrix} \Rightarrow p(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow p(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{24}{1} = 24$$





مثال ۳: با استفاده از حروف A، B، C، D، E، H، M به چند شکل می‌توان یک چهار ضلعی را که دارای زوایای مختلف اند، مشخص نمود (هر حرف علاوه بر اینکه یک رأس را مشخص می‌سازد، زاویه مربوط آن را نیز معرفی می‌کند).

$$\begin{matrix} n=7 \\ r=4 \end{matrix} \Rightarrow p(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\Rightarrow p(7,4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!} = 840$$

تبدیل‌های دایروی: هرگاه n شی مختلف روی محیط یک دایره ترتیب شوند، تبدیل دایروی نامیده می‌شود که تعداد ترتیب‌های آن‌ها عبارت است از:

$$p = (n-1)!$$

مثلاً در یک دعوت 8 نفر همصنفی‌های صنف دوازدهم به دور یک میز مدور غذا خوری به چند حالت مختلفه نشسته می‌توانند؟

$$n = 8$$

$$\Rightarrow p = (n-1)! \Rightarrow p = (8-1)! \Rightarrow p = 7! \Rightarrow p = 5040$$

تبدیل‌های مکرر: هرگاه در n شی طوریکه در آن یک شی a مراتبه، شی دیگر b مراتبه .... تکرار شده باشد، تبدیل‌های مکرر نامیده می‌شود که تعداد تبدیل‌های آن‌ها عبارت است از:

$$p = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot \cdots}$$

مثال: چند عدد نو رقمی از عدد 322523537 ساخته شده می‌تواند.

$n=9$ تعداد ارقام

$a=3$ تعداد تکرار ارقام (2)

$b=3$ تعداد تکرار ارقام (3)

$c=2$ تعداد تکرار ارقام (5)

$$p=\frac{n!}{a!.b!.c!}$$

$$p=\frac{9!}{3!.3!.2!}=\frac{9.8.7.6.5.4.3!}{3!.6.2}$$

$$\Rightarrow p=9.8.7.5.2=5040$$

ترکیب‌ها (Combinations)

هرگاه از n شی مختلف r شی آن را طوری انتخاب نماییم که ترتیب انتخاب‌ها مد نظر نباشد، به نام ترکیب یاد می‌گردد که می‌توان تعداد آنها را از رابطه ذیل دریافت نمود:

$$r\le n\Rightarrow c\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!.r!}$$

مثال‌ها:

مثال ۱: به چند شکل می‌توان از مجموعه 10 نفر ورزشکاران قهرمان مسابقات تکواندو 4 نفر آن را برای مسابقات المپیا انتخاب نمود.

$$c\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!.r!}$$

$$\begin{matrix}n=10\\r=4\end{matrix}\Rightarrow c\binom{10}{4}=\frac{10!}{(10-4)!.4!}=\frac{10.9.8.7.6!}{6!.4.3.2.1}=10.3.7=210$$

مثال ۲: با استفاده از 9 نقطه واقع بر محیط یک دایره چند مخمس (شش ضلعی) ساخته شده می‌تواند.

$$c\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!.r!}$$

$$\begin{matrix}n=9\\r=6\end{matrix}\Rightarrow c\binom{9}{6}=\frac{9!}{(9-6)!.6!}=\frac{9..8.7.6!}{3.2.1.6!}=3.4.7=84$$

مثال ۳: محصلان یک صنف 8 دختر و 12 پسر اند. در یک موتر که فقط گنجایش 11 نفر را دارد به سیر علمی انتخاب گردد به شرطی که در این گروپ 4 نفر دختر شامل باشد.

ترکیب دختران

$$p_1=c\binom{8}{4}=\frac{8!}{(8-4)!.4!}=\frac{8.7.6.5.4!}{4!.4.3.2.1}=7.2.5.=70$$

ترکیب پسران

$$p_2=c\binom{12}{7}=\frac{12!}{(12-7)!.7!}=\frac{12.11.10.9.8.7!}{120.7!}=11\cdot9\cdot8=792$$

$$\Rightarrow p=p_1\cdot p_2=70.792=55440$$

ترکیب مرکب: حالات مختلف که می‌توانیم n شی مختلف را به k دسته، طوریکه n_1 شی در دسته اول، n_2 شی در دسته دوم، n_3 شی در دسته سوم، ......، n_k شی در دسته kام شامل باشد و ترتیب انتخاب اشیا در این دسته‌ها دارای اهمیت نباشد، تقسیم گردد.

به نام ترکیب مرکب n شی به k دسته یاد شده که حالات آن از رابطه ذیل دریافت می‌گردد.

$$c\binom{n}{n_1,n_2,\dots\dots,n_k}=\frac{n!}{(n-n_1-n_2-\dots-n_k)!.n_1!.n_2!\dots\dots n_k!}$$

مثال: به تعداد 12 نفر داکتر درخواست وظیفه برای سه شفاخانه A، B و C داده اند طوریکه این شفاخانه‌ها به ترتیب 5 نفر، 3 نفر و 2 نفر ضرورت دارند. به چند شکل مختلفه می‌توان دکتوران مورد ضرورت را انتخاب نمود.

$$\left.\begin{array}{l} n=12 \\ n_1=5 \\ n_2=3 \\ n_3=2 \end{array}\right\} c\binom{n}{n_1,n_2,n_3}=\frac{n!}{(n-n_1-n_2-n_3)!.n_1!n_2!.n_3!}$$

$$c\binom{12}{5,3,2}=\frac{12!}{(12-5-3-2)!.5!.3!.2!}=\frac{12.11.10.9.8.7.6.5!}{2!.5!.3!.2!}$$

$$=\frac{12.11.10.9.8.7.6}{2.6.2}=11.5.9.8.7.6=166320$$

تبدیل مرکب: حالات مختلف که می‌توانیم n شـی مختلـف را بـه k دسته، طوریکه n_1 شی در دسته اول، n_2 شی در دسـته دوم، ...... n_k شـی در دسته kام شامل بوده و ترتیب انتخاب اشیا در این دسته‌ها دارای اهمیـت باشد، تقسیم گردد به نام تبدیل مرکب n شی به k دسته یـاد گردیـده کـه حالات آن از رابطه ذیل دریافت می‌گردد:

$$p\binom{n}{n_1,n_2,.......,n_k}=\frac{n!}{(n-n_1-n_2-.....-n_k)!}$$

مثال: هشت رنگ مختلف تکه داریم می‌خواهیم دو بیرق بسازیم. از تکه‌ها به صورت نوارهای عمودی در بیرق‌ها استفاده شده طوریکه ترتیـب رنـگ‌هـا حایز اهمیت است. در صورتیکه در بیرق اول از دو رنگ و در بیرق دومی سـه رنگ استفاده شده باشد، تعداد انواع بیرق‌ها را تعیین نمایید.

$$\left.\begin{array}{l} n=8 \\ n_1=2 \\ n_2=3 \end{array}\right\} p\binom{n}{n_1,n_2}=\frac{n!}{(n-n_1-n_2)!}$$

$$p\binom{8}{2,3}=\frac{8!}{(8-2-3)!}=\frac{8.7.6.5\ .4.3!}{3!}=8.7.6.5.4=6720$$

ترتیب مرکب: هرگاه n شی مختلف طوری به k دسته تقـسیم گـردد که در دسته اول n_1 شی و در دسته دوم n_2 شـی، ..... و در دسـته kام n_k شی قرار داشته و عناصر هر دسته از همدیگر متفـاوت باشـند بـه نـام ترتیـب مرکب n شی به k دسته یاد می‌گردد که تعداد آنها از رابطـه ذیـل دریافـت می‌گردد.

$$p(n,n_1,n_2....,n_k)=\frac{n!}{n_1!.n_2!......n_k!}$$

مثال: در یک قرعه‌کـشی حـسابات پـس‌انـداز یـک بانـک نمبـر حـساب 5859855 برنده جایزه گردید. معلوم نمایید چند نمبر حساب دیگر وجـود دارد که از عین ارقام به موقعیت‌های مختلف قرار دارد، اما برنـده جـایزه نگردیـده باشد.

$$p(n,n_1,n_2,n_3)=\frac{n!}{n_1!.n_2!.n_3!}$$

$n=7$................ تعداد تمام ارقام

$n_1=4$.................... تعداد رقم 5

$n_2=2$.................. تعداد رقم 8

$n_3=1$.................. تعداد رقم 9

$$p(7,4,2,1)=\frac{7!}{4!.2!.1!}=\frac{7.6.5.4!}{4!.2.1}=105$$

پـس تعـداد نمـرات حـساب بـانکی کـه برنـده نـشده اسـت عبـارت از: $105-1=104$، زیرا یک نمبر برنده شـده اسـت بنـاءً 104 نمبـر حـساب دیگر برنده شناخته نمی‌شود.

قضیه بینوم: با استفاده از تعریف ترکیب می‌توان انکـشاف حـدود بینـوم $(a+b)^n$ را از رابطه ذیل دریافت نمود:

$$(a+b)^n = c\binom{n}{o}a^n b^o + c\binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + c\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$$

$$+ .... + c\binom{n}{n}a^o b^n$$

$$\Rightarrow (a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} c\binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot b^r$$

مثال‌ها:

مثال ۱: بینوم $(x+y)^7$ را انکشاف دهید:

$$(x+y)^7 = c\binom{7}{0}x^7y^0 + c\binom{7}{1}x^6y^1 + c\binom{7}{2}x^5y^2 + c\binom{7}{3}x^4y^3$$

$$+ c\binom{7}{4}x^3y^4 + c\binom{7}{5}x^2y^5 + c\binom{7}{6}x^1y^6 + c\binom{7}{7}x^0y^7$$

$$\Rightarrow (x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3$$

$$+ 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$$

مثال ۲: در انکشاف بینوم $(a+b)^{20}$ جمله سیزدهم آن را دریابید:

حل: چون r از صفر شروع می‌گردد پس در جملهٔ سیزدهم $r=12$ می‌باشد، پس می‌توان چنین نوشت:

$$\left.\begin{matrix} n=20 \\ r=12 \end{matrix}\right\} c\binom{n}{r}a^{n-r}\,b^r = c\binom{20}{12}a^{20-12}.b^{12}$$

$$= \frac{20!}{(20-12)!.12!}a^8b^{12}$$

$$= \frac{20.19.18.17.16.15.14.13.12!}{8.7.6.5.4.3.2.1.12!}a^8\,b^{12}$$

$$= 125970\,a^8b^{12}$$

احتمال (Probability)

تعریف علم احتمال: علم احتمال یک بخش از علم ریاضیات بوده که از حوادث اتفاقی بحث می‌کند یعنی هر حادثه که وقوع و یا عدم وقوع آن به طور قطعی تعیین گردیده نتواند، حادثه اتفاقی بوده که علم احتمالات جهت پیشبینی‌های لازم برای وقوع و یا عدم وقوع، آن حادثه را پیشگویی نموده که بر اساس تجارب می‌توان آن را تا اندازهٔ منظم نمود.

تجربه: عبارت از هر علم افاقی که باعث ایجاد حوادث اتفاقی گردد، تجربه نامیده می‌شود:

حالات تجربه: تعداد امکانات مساعد و نامساعد یک حادثه را حالات تجربه می‌نامند، مثلاً در انداختن یک سکه، دو حالت وجود دارد که یک حالت آن مساعد و یک حالت آن نامساعد گفته می‌شود که می‌تواند سکه مذکور شیر باشد، اما خط نباشد و یا خط باشد، لاکن شیر نباشد.

تعریف احتمال: هرگاه یک تجربه شامل n حالت ممکنه باشد، طوریکه تعداد امکانات مساعد s و نامساعد آن f باشند یعنی $n=s+f$ پس احتمال وقوع مساعد و نامساعد آن عبارت از:

$$p(s)=\frac{s}{n},\ p(f)=\frac{f}{n}$$

اگر یک حادثه حالت نامساعد نداشته باشد پس احتمال مساعد آن (1) یعنی (100%) و اگر حالت مساعد نداشته باشد احتمال مساعد آن حادثه صفر (0%) خواهد بود، بناءً: $0 \le P(S) \le 1$

همچنان: $p(s)+p(f)=\frac{s}{n}+\frac{f}{n}=\frac{s+f}{n}=\frac{n}{n}=1$

حالات متساوی‌الاحتمال: هرگاه یک تجربه که شامل n حالات ممکنه است طوریکه تعداد امکانات حالات مساعد و نامساعد باهم مساوی باشند، یعنی $s=f$ پس احتمال وقوع این حادثه باهم مساوی نامیده می‌شود، مثلاً: در انداختن یک سکه حالات مساعد و نامساعد آن باهم مساوی است.

احتمال محدود و نامحدود: هرگاه در یک تجربه که شـامل n حـالات ممکنه باشد تعداد حالات ممکنه قابل شمارش باشـد، احتمـال محـدود و اگـر تعداد حالات ممکنه قابل شمارش نباشد، احتمال نامحدود گفته می‌شود.

مثال‌ها:

مثال ۱: هرگاه دو سکه را به اندازیم و بخواهیم هـردو سـکه شـیر باشـد، حالات مساعد و نامساعد آن را حساب کنید:

حل: تمام حالات ممکنه آن $n=4$ بوده پس $s=1$ و $f=3$ می‌باشد.

احتمال مساعد $(S)=P$ (دو شیر) $=\dfrac{S}{n}=\dfrac{1}{4}=0,25\Rightarrow(25\%)$

احتمال‌های نامساعد آن (دو خط، شیر و خط، خط و شیر)

$$p(f)=\frac{f}{n}=\frac{3}{4}=0,75\Rightarrow(75\%)$$

مثال ۲: هرگاه یک دایس (مکعب که دارای شش نمـره مـی‌باشـد) را بـه اندازیم و بخواهیم شمارش دایس (2) باشد، حالات مـساعد و نامـساعد آن را حساب نمایید.

حل: تمام حالات ممکنه آن $n=6$ بوده پس $s=1$ و $f=5$ می‌باشد.

احتمال مساعد آن:

$$p(s)=\frac{s}{n}\Rightarrow p(2)=\frac{1}{6}=0,1\overline{6}\Rightarrow(16,\overline{6}\%)$$

احتمال نامساعد آن:

$$p(f)=\frac{f}{n}\Rightarrow p(1,3,4,5,6)=\frac{5}{6}=0,8\overline{3}\Rightarrow(83,\overline{3}\%)$$

در همین مثال اگر بخواهیم شماره دایس عدد طاق باشد پس وقوع حادثه متساوی‌الاحتمال می‌باشد، یعنی $s=3$ و $f=3$ است، پس:

$p(s)=p$ (عدد طاق) $=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}=0,5\Rightarrow(50\%)$

$p(f)=p$ (عدد جفت) $=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}=0,5\Rightarrow(50\%)$

مثال ۳: در یک قطی 10 مهره سفید، 7 مهره سیاه و 5 مهره زرد قـرار دارد، از آن یک مهره را بیرون می‌نماییم، احتمالات ذیل را دریابید:

الف: مهره سفید باشد.

ب: مهره سیاه باشد.

ج: مهره زرد باشد.

د: مهره سرخ باشد.

الف: احتمال مهره سفید:

$$n=10+7+4=22$$
$$s=10,f=12$$

امکان مساعد $p(s)=\dfrac{s}{n}=\dfrac{10}{22}=\dfrac{5}{11}=0,\overline{45}\Rightarrow(45,\overline{45}\%)$

امکان نامساعد $p(f)=\dfrac{f}{n}=\dfrac{12}{22}=\dfrac{6}{11}=0,\overline{54}\Rightarrow(54,\overline{54}\%)$

ب: احتمال مهره سیاه:

$$n=22,s=7,f=15$$

امکان مساعد $P(s)=\dfrac{S}{n}=\dfrac{7}{22}=0.3\overline{18}\Rightarrow(31.8\overline{18}\%)$

امکان نامساعد $P(f)=\dfrac{f}{n}=\dfrac{15}{22}=0.68\overline{18}\Rightarrow(68.\overline{18}\%)$

ج: احتمال مهره زرد:

$$n=22,S=5,f=17$$

امکان مساعد $P(s)=\dfrac{S}{n}=\dfrac{5}{22}=0.22\overline{72}\Rightarrow(22.\overline{72}\%)$

امکان نامساعد $P(f)=\dfrac{f}{n}=\dfrac{17}{22}=0.77\overline{27}\Rightarrow(77.\overline{27}\%)$

د: احتمال مهره سرخ:

$n=22, S=0, f=22$

امکان مساعد $P(s)=\dfrac{S}{n}=\dfrac{0}{22}=0\Rightarrow(0\%)$

امکان نامساعد $P(f)=\dfrac{f}{n}=\dfrac{22}{22}=1\Rightarrow(100\%)$

مثال ۴: در یک درجن قطعه (52 دانه)، چهار قطعـه را بطـوری اختیـاری انتخاب می‌نماییم، احتمال این که هر چهار قطعه شاه باشد، را دریابید.

تعداد امکان مساعد $S=c\binom{4}{4}=1$

$n=c\binom{52}{4}=\dfrac{52!}{(52-4)!\cdot 4!}=\dfrac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48!}{48!\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=270725$

تعداد حالات ممکنه

$P(s)=\dfrac{S}{n}=\dfrac{1}{270725}=0.000003693\Rightarrow(0.0003693\%)$

امکان مساعد

فضای نمونه: فضای نمونه یک تجربـه عبـارت از یـک سـت S اسـت، طوریکه هر حالت ممکنه همان تجربه، به یک عنصر S مطابقت داشته باشد. عناصر S را نقاط نمونه آن تجربه می نامند. اگر ایـن نقـاط بـا نهایـت باشـد فضای نمونه محدود و اگر این تعداد بی‌نهایت باشد فضای نمونه آن نامحـدود نامیده می‌شود.

مثلاً: در تجربه انداختن دو سکه از نگـاه شـیر (H) یـا خـط آمـدن (T)، فضای نمونه آن عبارت از: $S=\{HH,HT,TH,TT\}$

به همین ترتیب فضای نمونه دیگر از نگاه مختلف نیز وجود دارد، مثلاً:

فضای نمونه از نگاه شیر آمدن عبارت از: $S=\{0,1,2\}$

فضای نمونه از نگاه خط آمدن عبارت از: $S=\{0,1,2\}$

فضای نمونه از نگاه مثل هم بودن عبارت از: $S=\{HH,TT\}$

فضای نمونه از نگاه دوگانه بودن عبارت از: $S=\{HT,TH\}$

حوادث اتفاقی

هر ست فرعی یک تجربه کیفی را حادثه اتفاقی یاد می‌نمایند و بـرعکس هر حادثه اتفاقی حاصل از یک تجربه یک ست فرعی فضای نمونه آن تجربه است.

بخاطر داشته باشید که ست خالی $\varnothing$ حادثه اتفـاقی غیـر ممکـن و سـت فضای نمونه (چون یک ست کامل است) حادثه حتمی گفته می‌شود.

مثال: در انداختن دو دایس (مکعب های شش نمره‌یی) حوادث اتفاقی ذیل را دریابید:

$S=\{(x,y)/x=1,2,3,4,5,6 \text{ و } y=1,2,3,4,5,6\}$

A: حادثه اتفاقی طاق بودن شماره‌هـای دایـس در انـداختن دو دایـس را دریابید.

$A=\left\{(x,y)\Big/\begin{matrix}x=1,3,5\\ y=1,3,5\end{matrix}\right\}\subseteq S$

$A=(1,1),(1,3)(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)$

B: حادثه اتفاقی مجموع شماره دو دایس (7) باشد، در تجربه انـداختن دو دایس را دریابید.

$B=\{(x,y)/x+y=7\}=\left\{\begin{matrix}(1,6),(2,5),(3,4),\\(4,3),(5,2),(6,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow B\subseteq S$

یادداشت: احتمال مجموعه حوادث اتفاقی یک تجربه مساوی بـه تعـداد ست‌های فرعی آن است، یعنی:

تعداد مجموعه حوادث اتفاقی $=2^n$

مثلاً در مثال بالا انداختن دو دایس $n=6\times 6=36$ و تعداد مجموعـه

حوادث اتفاقی آن مساوی 2^{36} است.

فضای نمونه گسسته و پیوسته

چون فضاهای نمونه یک تجربه از مجموعـه نقـاط محـدود و غیرمحـدود تشکیل گردیده است که یک دسته آن‌ها قابـل شـمارش و یـک دسـته آنهـا غیرقابل شمارش می‌باشد. پس فضای نمونهٔ که عناصر آنها قابـل شـمارش و تشخیص اند به نام فضای نمونه گسسته یا غیر متـصل و فـضای نمونـه کـه عناصر آنها قابل شمارش نیست به نام فضای نمونه پیوسـته یـا متمـادی یـاد می‌گردند.

مثلاً انتخاب 2 نفر شاگرد از بین تعداد داخله یک صنف به حیث نماینـده و معاون نماینده صنف یک فضای نمونه گسسته می‌باشد.

اما انتخاب یک عدد بین 5 الی 10 از ست اعداد حقیقی (IR) یک فضای نمونه پیوسته است، زیرا ست اعداد بـین 5 الـی 10 از جملـه اعـداد حقیقـی نامحدود می‌باشد.

احتمال حادثه اتفاقی ساده و مرکب

چـون فـضای نمونـه محـدود یـک تجربـه عبـارت از یـک سـت: $S=\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ می‌باشد که هر ست فرعی آن یک حادثه اتفـاقی را نشان می‌دهد، پس هر ست فرعی یک عنصره S را حادثـه اتفـاقی سـاده (اولیه) و هر ست فرعی بیشتر از یک عنصره S را حادثه اتفـاقی مرکـب یـاد می‌نمایند.

مثلاً ست فضای نمونه، تجربه در انـداختن یـک سـکه $S=\{H,T\}$ و حوادث اتفاقی آن $S_1=\{H\}$ و $S_2=\{T\}$ می‌باشد، بنـاءً S_1 و S_2 هـر کدام یک حادثه اتفاقی ساده یا اولیه نامیده می‌شود؛ زیرا ست‌های مذکور یک عنصره می‌باشند.

همچنـــان ســـت فـــضای نمونـــه، تجربـــه در انـــداختن دو ســـکه $S=\{HH,TT,HT,TH\}$ است که حوادث اتفاقی آن عبـارت اسـت از:

$$S_1=\{HH\},\ S_2=\{TT\},\ S_3=\{H,T\},\ S_4=\{T,H\}$$

بناءً S_1,S_2,S_3,S_4 هرکدام یک حادثه اتفاقی مرکب یاد می‌گـردد، زیـرا ست‌های مذکور بیشتر از یک عنصره می‌باشد.

حوادث هم چانس

حوادث ساده اولیه که احتمال آن‌ها در اثر انجام یـک تجربـه بـاهم برابـر باشد به نام حوادث هم چانس یاد می‌شوند. بخاطر داشته باشید کـه مجموعـه احتمالات حوادث اولیه مساوی به یک است، یعنی: $\sum_{i=1}^{n} P_i=1$

مثلاً اگر در یک مسابقه بوکس به تعـداد 6 نفـر اشـتراک کننـده جهـت دریافت مدال طلا و لقب قهرمان این مسابقه داشته باشیم. پس احتمال برنـده شدن هرکدام آنها حوادث هم چانس گفته می‌شود، زیرا:

فضای نمونه این مسابقه عبارت از: $S=\{a,b,c,d,e,f\}$

احتمال هر حادثه اتفاقی اولیه آن عبارت از:

$$P(a)=P(b)=P(c)=P(d)=P(e)=P(f)=\frac{1}{6}$$

از جانبی دیگر مجموعه احتمال حوادث اولیه آن‌ها عبارت از:

$$P(s)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

قضیه: هرگاه A یک حادثه اتفـاقی و B نیـز یـک حادثـه اتفـاقی باشـد طوریکه S فضای نمونه این حوادث را نشان دهد، پس:

$$\left.\begin{matrix} A\subseteq S \\ B\subseteq S \end{matrix}\right\} \begin{matrix} A\cup B\subseteq S \\ A\cap B\subseteq S \end{matrix}$$

$A\cup B$: یک حادثه اتفاقی بوده و زمانی صـورت گرفتـه مـی‌توانـد کـه حادثه اتفاقی A یا حادثه اتفاقی B صورت گرفته باشد.

$A\cap B$: نیز یک حادثه اتفاقی بوده و هنگامی صورت گرفته می‌تواند که حادثه اتفاقی A و هم حادثه اتفاقی B صورت گرفته باشد.

مثال: یک دایس را می اندازیم احتمال این کـه شـماره دایـس جفـت یـا بزرگتر از 2 باشد، را دریافت نماید.

حل: فضای نمونه این تجربه عبارت از: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

حادثه اتفاقی A (شماره دایس جفت باشد) $A=\{2,4,6\}\subseteq S$

$$P(A)=P(\{2,4,6\})=P(\{2\})+P(\{4\})+P(\{6\})$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=50\%$$

حادثه اتفاقی B (شماره دایس بزرگتر از 2 باشد)

$$B=\{3,4,5,6\}\subseteq S$$

$$P(B)=P(\{3,4,5,6\})=P(\{3\})+P(\{4\})+P(\{5\})+P(\{6\})$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=66.\overline{6}\%$$

در نتیجه:

$A\cup B$ عبارت از ستی است که نمره دایـس جفـت یـا بزرگتـر از (2) باشد، که احتمال آن عبارت از:

$$A=\{2,4,6\},\ B=\{3,4,5,6\}$$

$$\Rightarrow A\cup B=\{2,3,4,5,6\}$$

$$P(A\cup B)=P(\{2,3,4,5,6\})$$

$$=P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{4\})+P(\{5\})+P(\{6\})$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}=83.\overline{3}\%$$

$A\cap B$ عبارت از ستی است که نمره دایس جفـت و هـم بزرگتـر از 2 باشد. که احتمال آن عبارت از:

$$A=\{2,4,6\},\ B=\{3,4,5,6\}$$

$$\Rightarrow A\cap B=\{4,6\}$$

$$P(A\cap B)=P(\{4,6\})=P(\{4\})+P(\{6\})$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=33.\overline{3}\%$$

قضیه: هرگاه A و B حوادث اتفاقی از فضای نمونه محدود S باشـند، پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

که قضیه فوق را به نام قضیه حوادث مکمل نیز یاد می‌نمایند.

مثال: دو دایس مختلف رامی اندازیم دریافت نمایید احتمال این که شماره دایس اولی بزرگتر از 4 یا مجموع شماره آنها 9 باشد.

حل:

A: حادثه اتفاقی است که شماره دایس اولی بزرگتر از 4 باشد.

B: حادثه اتفاقی است که مجموع شماره هردو دایس 9 باشد.

$A\cap B$: حادثه اتفـاقی اسـت کـه شـماره دایـس اولـی بزرگتـر از 4 و مجموع شماره هردو دایس 9 باشد.

$$A=\left\{\begin{matrix}(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),\\(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}=33.\overline{3}\%$$

$$B=\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}=11.\overline{1}\%$$

$$A\cap B=\{(5,4),(6,3)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}=5.\overline{5}\%$$

با استفاده از قضیه می‌توانیم احتمال این که شماره دایس اولـی بزرگتـر از 4 یا مجموع شماره آنها 9 باشد، را چنین دریافت نمود:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{18}=\frac{6+2-1}{18}=\frac{7}{18}=38.\overline{8}\%$$

حوادث اتفاقی مکمله

هرگاه A یک حادثه اتفاقی از یک فضای نمونه محدود S باشد، $\overline{A}$ را حادثه مکمله A مـی‌گوینـد در صـورتیکه $A\cap\overline{A}=\varnothing$ و $A\cup\overline{A}=S$ باشد.

مثلاً در تجربه انداختن یک سکه اگر خط آمدن حادثـه اتفـاقی A باشـد، پس حادثه اتفاقی خط نیامدن $\overline{A}$ است.

قضیه: اگر A و $\overline{A}$ دو حادثه اتفاقی از یک فـضای نمونـه محـدود S باشند، پس: $P(A)+P(\overline{A})=1$

مثال: در یک قطی 4 مهره سیاه، 3 مهره سرخ و 3 مهـره آبـی اسـت. یک مهره را بیرون می‌کنیم پیدا کنید احتمال اینکه مهره سیاه نباشد؟

حل:

A: مهره سیاه باشد.

$\overline{A}$: مهره سیاه نباشد.

A: اگر $m=4$ حالات مساعد و $n=10$ حالات ممکنه باشد، پس:

$$m=c\binom{4}{1}=4\ ,\ n=c\binom{10}{1}=10$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}=40\%$$

$\overline{A}$: اگر $m=6$ حالات مساعد و $n=10$ حالات ممکنه باشد، پس:

$$m=c\binom{6}{1}=6,\ n=c\binom{10}{1}=10$$

$$\Rightarrow P(\overline{A})=\frac{m}{n}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=60\%$$

$$\Rightarrow P(A)+P(\overline{A})=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=\frac{5}{5}=1\ (100\%)$$

$$\Rightarrow P(A)+P(\overline{A})=1$$

احتمال مشروط: هرگاه A و B دو حادثه اتفاقی یک فضای نمونه S باشد طوریکه $P(B)\neq 0$ است، در اینصورت احتمال حادثه A به شـرطیکه حادثه B رخ داده باشد، احتمال مشروط A نظر به B گفته می شود کـه از رابطه ذیل قابل دریافت می باشد.

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

از احتمال مشروط، نتیجه ذیل بدست می آید:

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$$

مثال‌ها:

مثال۱: از ارقام (1) الی (9) یک رقم را انتخاب مـی نمـاییم، ملاحظـه می گردد که رقم مذکور کوچکتر از 6 است، پیدا کنید احتمال ایـن کـه رقـم مذکور طاق باشد.

حل:

B: حادثه اتفاقی است که رقم گرفته شده کوچکتر از 6 باشد.

$$B=\{1,2,3,4,5\}\Rightarrow P(B)=\frac{5}{9}$$

A: رقم گرفته شده طاق باشد (مشروط)

$$A=\{1,3,5,7,9\}$$

$A\cap B$: رقم گرفته شده طاق و کوچکتر از 6 باشد.

$$A\cap B=\{1,3,5\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{9}$$

پس احتمال مشروط A نظر به B عبارت از:

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{9}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{5}=(60\%)$$

مثال ۲: دو دانه دایس را می‌اندازیم هرگاه یکی از دایس‌ها طوس (شـماره یک) آمده باشد، دریافت نمایید حاصل تفریق شماره‌هـای هـر دو دایـس (3) باشد.

B: حادثه اتفاقی است که یکی از شماره‌های دو دایس (1) باشد.

$$B=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\(6,1),(5,1),(4,1),(3,1),(2,1)\end{Bmatrix}$$

طوریکه می دانیم در تجربه انداختن دو دایس، فضای نمونه متشکل از 36 حوادث ساده می‌باشد، پس احتمال حادثه اتفاقی B عبارت از:

$$P(B)=\frac{11}{36}$$

A: حاصل‌تفریق (تفاضل) شماره‌های هردو دایس (3) باشد.

$$A=\{(6,3),(5,2),(4,1),(3,6),(2,5),(1,4)\}$$

$A\cap B$: یکی از شماره‌ها (1) و تفاضل شماره‌های دو دایس مساوی به (3) باشد.

$$A\cap B=\{(1,4),(4,1)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{36}$$

پس احتمال مشروط A نظر به B عبارت از:

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{2}{11}=(18.18\%)$$

حوادث مستقل و غیر مستقل

هرگاه A و B دو حادثه اتفاقی از یک فضای نمونه S باشد، طوریکه:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

باشد، پس حوادث A و B را مستقل (غیر مرتبط) می‌گویند.

امـا اگـر $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$ باشـد، حـوادث A و B را غیرمستقل (مرتبط یا وابسته) می‌نامند.

مثال‌ها:

مثال ۱: یک سکه و یک دایس را باهم می‌اندازیم معلوم نمایید احتمال این که سکه خط و شماره دایس کوچکتر از 5 باشد؟

حل: اولاً فضای نمونه (S) را تعیین می‌نماییم.

$$S=\begin{Bmatrix}(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6),\\(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6)\end{Bmatrix}$$

A: حادثه اتفاقی که سکه خط آمده باشد.

$$\left.\begin{matrix}n=2 & \text{حالات ممکنه}\\ S_1=1 & \text{امکان مساعد}\end{matrix}\right\}P(A)=\frac{S_1}{n}=\frac{1}{2}=(50\%)$$

B: حادثه اتفاقی که شماره دایس کوچک‌تر از 5 باشد.

$$\left.\begin{matrix}n=6 & \text{حالات ممکنه}\\ S_2=4 & \text{امکان مساعد}\end{matrix}\right\}P(B)=\frac{S_2}{n}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=(66.\overline{6}\%)$$

$A\cap B$: سکه خط و شماره دایس کوچک‌تر از 5 باشد.

$$A\cap B=\{(T,4),(T,3),(T,2),(T,1)\}$$

$$\left.\begin{matrix}n=12 & \text{حالات ممکنه}\\ S_3=4 & \text{امکان مساعد}\end{matrix}\right\}P(A\cap B)=\frac{S_3}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}=(33.\overline{3}\%)$$

از جانب دیگر:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}(33.\overline{3}\%)$$

طوری که ملاحظه می‌گردد حادثه مثال فوق یک حادثه مستقل (غیرمرتبط) شمرده می‌شود؛ زیرا $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

مثال۲: دو دایس سیاه و سفید را باهم می‌اندازیم، دریافت نمایید احتمال این که مجموعه شماره‌ها 10 گردد، یعنی $x+y=10$ و $x\neq y$ باشد.

حل: چون در تجربه انداختن دو دایس، فضای نمونه 36 می‌باشد.

A: مجموع شماره‌های هردو دایس 10 باشد.

$$A=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$$

$$\left.\begin{matrix}n=36 & \text{حالات ممکنه}\\ S_1=3 & \end{matrix}\right\}P(A)=\frac{S_1}{n}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}=(8.\overline{3}\%)\ \text{حالات مساعد}$$

B: شماره دایس سفید خلاف شماره دایس سیاه باشد، یعنی $x \neq y$ یعنـی شـمارههـای دایـس $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)$ نباشد، بنابر این 6 حادثه اتفاقی شامل فضای نمونه نمی‌باشد.

$$\left.\begin{array}{ll} n=36 & \text{حالات ممکنه} \\ S_2=30 & \text{امکان مساعد} \end{array}\right\} P(B)=\frac{S_2}{n}=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}=(83.3\%)$$

$A \cap B$: مجموع شماره‌های هردو دایس 10 و شماره دایس سفید خلاف شماره دایس سیاه باشد،

یعنی $x \neq y$ و $x+y=10$

$$A \cap B=\{(4,6),(6,4)\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} n=36 & \text{حالات ممکنه} \\ S_3=2 & \text{امکان مساعد} \end{array}\right\} P(A \cap B)=\frac{S_3}{n}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}=(5.\bar{5}\%)$$

در نتیجه $P(A \cap B) \neq P(A)\cdot P(B)$ بوده، زیرا:

$$\frac{1}{18} \neq \frac{1}{12}\cdot\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{1}{18} \neq \frac{5}{72} \Rightarrow (5.\bar{5}\%) \neq (6.9\bar{4}\%)$$

پس در نتیجه حادثه مثال فوق یک حادثه غیر مستقل (مرتبط یا وابسته) نامیده می‌شود.

آزمایش‌های برنولی

هرگاه یک تجربه به منظور وقـوع یاعـدم وقـوع یـک حادثـه اتفـاقی A صورت گیرد چنین تجربه را یک آزمایش، وقوع حادثـه A را کامیـابی و عـدم وقوع A را ناکامی می‌نامند.

پس یک آزمایش را زمانی آزمایش برنولی گفته می‌توانیم کـه n مراتبـه تکرار گردد، سلسله آزمایش‌های که به دست می‌آید دارای سه خاصیـت ذیـل باشد:

۱- هر آزمایش به یکی از دو حالاتی کامیابی یا ناکامی منتهی گردد.

۲- احتمال کامیابی در تمام این آزمایش‌ها ثابت باشد.

۳- تمام آزمایش‌ها در عین شرایط و به صورت غیر مرتبط (غیر مـستقل) صورت گیرد.

مثال: دو سکه را 5 مراتبه می‌اندازیم، پیدا کنید احتمال این کـه فقـط دو مراتبه دو سکه خط آمده باشد.

حل: برای دریافت دو مراتبـه خـط آمـدن از جملـه 5 آزمـایش (در پـنج موقعیت) 2 کامیابی (S) در نظر گرفته شود، پس حتماً یـک ترکیـب $c\binom{5}{2}$ است.

پس می‌توان نوشت:

$$A_1=S-S-F-F-F$$
$$A_2=F-S-S-F-F$$
$$A_3=F-F-S-S-F$$
$$A_4=F-F-F-S-S$$
$$A_5=S-F-S-F-F$$
$$A_6=S-F-F-S-F$$
$$A_7=S-F-F-F-S$$
$$A_8=F-S-F-F-S$$
$$A_9=F-F-S-F-S$$
$$A_{10}=F-S-F-S-F$$

قضیه: هرگاه در یک سلسله n آزمایشه برنولی احتمال کامیـابی (S) و احتمال ناکامی F باشد، پس احتمال m کامیابی عبارت از:

$$P(m)=C\binom{n}{m}(S)^m\cdot(F)^{n-m}$$

مثلاً در مثال بالا در $n=5$ آزمـایش $m=2$ مراتبـه کامیـابی دو خـط بودن عبارت از:

$$P(m)=C\binom{n}{m}S^m\cdot(F)^{n-m} \Rightarrow P(2)=C\binom{5}{2}S^2\cdot(F)^{5-2}$$

$$=\frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}S^2\cdot F^3$$

$$\Rightarrow P(2)=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2}S^2\cdot F^3=10S^2F^3$$

قضیه بینوم در احتمالات: در فورمول $P(m)=C\binom{n}{m}(S)^m(F)^{n-m}$، احتمال کامیابی‌های مختلف با در نظرداشت قضیه بینوم $(S+F)^n$ به وجود می‌آید.

مثلاً اگر (4) سکه بطور همزمان انداخته شود، احتمال این کـه فقـط دو سکه شیر باشد چند خواهد بود؟ هرگاه احتمال شیر آمدن به حیث کامیابی S و خط آمدن به حیث ناکامی F باشد.

در این صورت: $P(S+F)^4=1S^4+4S^3F^1+6S^2F^2+4S^1F^3+F^4$

احتمال آزمایش	مفهوم آزمایش	حدود	ضرایب
$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$	یک مراتبـه 4 شـیر آمدن	$1S^4$	$C\binom{4}{0}$
$4\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$	چهار مراتبه سه شیر آمـدن و یـک خـط آمدن	$4S^3F^1$	$C\binom{4}{1}$
$6\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$	شش مراتبه دو شیـر آمدن و دو خط آمدن	$6S^2F^2$	$C\binom{4}{2}$
$4\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$	چهار مراتبه یک شیر آمـدن و سـه خـط آمدن	$4S^1F^3$	$C\binom{4}{3}$
$1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$	یک مراتبـه 4 خـط آمدن	$1F^4$	$C\binom{4}{4}$

در نتیجه احتمال این که فقط دو شیر آمده باشد $\frac{3}{8}=37.5\%$ می‌باشد.

یادداشت:

۱) احتمال حد اکثر m مراتبه کامیابی در آزمایش‌های برنولی عبارت از:

$$P(x\le m)=P(m)+P(m-1)+P(m-2)+....+P(0)$$

$$=\sum_{i=0}^{m}C\binom{n}{i}S^i F^{n-i}$$

۲) احتمال حد اقل m مراتبه کامیابی در آزمایش‌های برنولی عبارت از:

$$P(x\ge m)=P(m)+P(m+1)+P(m+2)+....+P(n)$$

$$=\sum_{i=m}^{n}C\binom{n}{i}S^i F^{n-i}$$

مثال: در یک قطی 2 مهره سرخ و 3 مهـره سـبز اسـت، یـک مهـره را برداشته بعد از ملاحظه رنگ آن، آن را دوباره به قطی می‌اندازیم و این عمـل را 4 مراتبه تکرار می‌نماییم، اگر سرخ بودن مهره را کامیـابی فـرض نمـاییم، پیدا نمایید، احتمال این که:

الف: دو کامیابی را در این تجربه

ب: حد اقل دو کامیابی را در این تجربه

ج: حد اکثر دو کامیابی را در این تجربه

حل الف:

مهره سرخ (کامیابی S)

$$\left.\begin{matrix} n=5 \text{ حالات ممکنه} \\ m=2 \text{ حالات مساعد}\end{matrix}\right\} P(S)=\frac{m}{n}=\frac{C\binom{2}{1}}{C\binom{5}{1}}=\frac{2}{5}$$

مهره سبز (ناکامی F)

$$\left.\begin{matrix} n=5 \text{ حالات ممکنه} \\ m=3 \text{ حالات مساعد} \end{matrix}\right\} P(F)=\frac{m}{n}=\frac{C\binom{3}{1}}{C\binom{5}{1}}=\frac{3}{5}$$

پس تعداد کامیابی‌ها $(m=2)$ و تعداد تمام آزمایش‌هـا $(n=4)$ بـوده، پس می‌توان نوشت:

$$P(m)=C\binom{n}{m}(S)^m\cdot(F)^{n-m}$$

$$\Rightarrow P(2)=C\binom{4}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{4-2}=\frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!}\cdot\frac{4}{25}\cdot\frac{9}{25}$$

$$=6\cdot\frac{4}{25}\cdot\frac{9}{25}=\frac{216}{625}$$

$$=6\cdot\frac{4}{25}\cdot\frac{9}{25}=\frac{216}{625}=(34.56\%)$$

ب: احتمال حد اقل دو کامیابی

$$P(x\geq m)=\sum_{i=m}^{n}C\binom{n}{i}S^i\cdot F^{n-i}$$

$$\Rightarrow P(x\geq 2)=\sum_{i=2}^{4}C\binom{4}{i}S^i\cdot F^{4-i}=\sum_{i=2}^{4}C\binom{4}{i}\left(\frac{2}{5}\right)^i\left(\frac{3}{5}\right)^{4-i}$$

$$=C\binom{4}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2+C\binom{4}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1+C\binom{4}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^0$$

$$=\frac{216}{625}+\frac{96}{625}+\frac{16}{625}=\frac{216+96+16}{625}=\frac{328}{625}=(52.48\%)$$

ج: احتمال حد اکثر دو کامیابی

$$P(x\leq m)=\sum_{i=0}^{m}C\binom{n}{i}S^i\cdot F^{n-i}$$

$$\Rightarrow P(x\leq 2)=\sum_{i=0}^{2}C\binom{4}{i}\left(\frac{2}{5}\right)^i\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{4-i}$$

$$=C\binom{4}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^{4-0}+C\binom{4}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^{4-1}+C\binom{4}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^{4-2}$$

$$=\frac{81}{625}+\frac{216}{625}+\frac{216}{625}=\frac{81+216+216}{625}=\frac{513}{625}=(82.08\%)$$

همبسته‌گی و ضریب همبسته‌گی: همبـسته‌گـی عبـارت از سـنجش و دریافت درجه ارتباط بین متحول‌ها است، که این ارتباط بین متحول می‌توانـد به صورت خطی توسط یک خط مستقیم و یا به صورت غیر خطی بـه وسـیله منحنی نمایش داده شود.

همبسته‌گی عموماً بـه دو حالـت مثبـت و منفـی بـین دو متحـول ارائـه می‌گردد. بهترین شکل تشخیص وجود همبسته‌گی یا عدم همبسته‌گی و حتی نوع، جهت و میزان همبسته‌گی خطی عبارت از ضریب همبـستگی اسـت کـه توسط فورمول ذیل ارائه می‌گردد:

$$r=\frac{\frac{\sum xy}{n}-(\bar{x})(\bar{y})}{(\delta x)(\delta y)}$$

$$r=\frac{\dfrac{\text{مجموعه حاصل ضرب x و y}}{\text{تعداد شان}}-\text{یعنی (اوسط y) (اوسط x ها)}}{\text{(انحراف معیاری y ها) (انحراف معیاری x ها)}}$$

مثال: در یک باغوحش وزن یک حیوان مانند (چوچه گرگ‌ها یا پلنـگ‌هـا وغیره الی بزرگ شدن) بعداز تطبیق رژیم غذایی قرار ذیل جدول‌بندی گردیده است:

شماره	x	y	x . y
1	3	1	3
2	2	4	8
3	5	2	10
4	1	3	3
5	4	15	60
6	10	24	240
7	7	5	35
8	8	10	80
	$\sum x = 40$	$\sum y = 64$	$\sum xy = 439$

$$\bar{x} = \frac{3+2+5+1+4+10+7+8}{8} = \frac{40}{8} = 5$$

$$\bar{y} = \frac{1+4+2+3+15+24+5+10}{8} = \frac{64}{8} = 8$$

$$\delta_x = \sqrt{\frac{(3-5)^2+(2-5)^2+(5-5)^2+(1-5)^2+(4-5)^2+(10-5)^2+(7-5)^2+(8-5)^2}{8}}$$

$$\delta_x = \sqrt{\frac{4+9+0+16+1+25+4+9}{8}} = \sqrt{\frac{68}{8}} \Rightarrow \delta_x = \sqrt{8,5}$$

$$\delta_y = \sqrt{\frac{(1-8)^2+(4-8)^2+(2-8)^2+(3-8)^2+(15-8)^2+(24-8)^2+(5-8)^2+(10-8)^2}{8}}$$

$$8_y = \sqrt{\frac{49+16+36+25+49+256+9+4}{8}} = \sqrt{\frac{444}{8}} = \sqrt{55,5}$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - (x)(y)}{(8_x)(8_y)} = \frac{\frac{439}{8} - (5)(8)}{\sqrt{8,5} \cdot \sqrt{55.5}} = \frac{49,125 - 40}{\sqrt{471,25}} = \frac{9,125}{21,72} = 0,42$$

$\Rightarrow \gamma = 0,42$ ضریب همبستگی خطی

خط رگرسیون: رگرسیون یعنی تخمین عبـارت از سـنجش و دریافـت ارزش یک متحول تابع نظر به ارزش یک یا چند متحول مستقل می‌باشد.

معادله‌یی که ارتباط بین متحول‌ها را ارائه می‌نماید به نام معادله رگرسیون یا سنجش یاد می‌گردد که از رابطه ذیل دریافت می‌گردد: $y = ax + b$

در حالیکه $a = r \cdot \frac{\delta y}{\delta x}$ و $b = \bar{y} - a\bar{x}$ می‌باشد.

در روابط فوق δ_y انحراف معیاری y، δ_x انحراف معیـاری x، r ضـرایب همبستگی، $\bar{x}$ اوسط x ها و $\bar{y}$ اوسط y ها می‌باشد.

مثال: data ذیل را در نظر بگیرید، خط رگرسیون y نسبت به x را دریافت نمایید.

x	1	5	4	6
y	3	4	8	5

حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+5+4+6}{4} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow \bar{x} = 4$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{3+4+8+5}{4} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow \bar{y} = 5$$

$$\delta_x = \sqrt{\frac{(1-4)^2+(5-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{9+1+0+4}{4}} = \sqrt{\frac{14}{4}} = \sqrt{3,5} \Rightarrow \delta_x = \sqrt{3,5}$$

$$\delta_y = \sqrt{\frac{(3-5)^2+(4-5)^2+(8-5)^2+(5-5)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4+1+9+0}{4}} = \sqrt{\frac{14}{4}} = \sqrt{3,5} \Rightarrow \delta_y = \sqrt{3,5}$$

$$\gamma = \frac{\frac{\sum xy}{n} - (\bar{x})(\bar{y})}{\delta_x \cdot \delta_y} = \frac{\frac{3+20+32+30}{4} - (4)(5)}{\sqrt{3,5} \cdot \sqrt{3,5}} = \frac{\frac{85}{4} - 20}{\sqrt{12,25}}$$

$$\gamma = \frac{21,25 - 20}{\sqrt{12,25}} = \frac{1,25}{3,5} = 0,36 \Rightarrow \gamma = 0,36$$

$$\Rightarrow a=\gamma\cdot\frac{\delta_y}{\delta_x}\Rightarrow a=0{,}36\cdot\frac{\sqrt{3{,}5}}{\sqrt{3{,}5}}=0{,}36\cdot 1=0{,}36$$

$$\Rightarrow a=0{,}36$$

$$\Rightarrow b=\overline{y}-a\overline{x}\Rightarrow b=5-0{,}36\cdot(4)\Rightarrow b=5-1{,}44=3{,}56$$

$$\Rightarrow b=3{,}56$$

در نتیجه معادله خط رگرسیون عبارت است از:

$$y=ax+b$$

$$\Rightarrow \boxed{y=0{,}36x+3{,}56}$$

تمرینات بخش احتمالات

۱) با استفاده از ارقام $6,4,3$ چند عدد سه رقمی که تکرار آن مجاز باشد ساخته شده می‌تواند؟

۲) با استفاده از ارقام $5,2,1$ چند نمبر پلیت موتر به شکل سه رقمی ساخته می‌تواند که تکرار آن مجاز نباشد؟

۳) در یک مرکز صحی 2 نفر داکتر داخله، 3 نفر نرس و 3 نفر کارگر وجود دارد به چند گروپ سه نفری می‌توانند نوکریوالی یک شبانه روز اجرا نمایند؟

۴) سه رنگ کاغذ به رنگ‌های سیاه، سفید و سرخ داریم می‌خواهیم از آن کاغذپران بسازیم که در آن حد اکثر سه رنگ کار گرفته شده باشد؟

۵) به چند شکل ممکنه می‌توان حد اقل سه کتاب از پنج کتاب مختلفه را انتخاب و پهلوی هم قرار داد؟

۶) با استفاده از کلمه (مکتب) حد اقل چند کلمه دو حرفی ساخته می‌توانید (منظور ترکیب کلمه بوده حتمی نیست معنی خاص داشته باشد) که تکرار آن مجاز نباشد؟

۷) سه پارچه تکه به رنگ‌های سرخ، سبز و سیاه داریم به چند شکل متفاوت از هم می‌توانیم از آن بیرق بسازیم؟

۸) به چند شکل متفاوت از هم می‌توان دو کتاب کیمیا و سه کتاب بیولوژی را پهلوی هم قرار دهیم به شرطی که در موقعیت اول کیمیا و در موقعیت دوم بیولوژی قرار گیرند؟

۹) با استفاده از ارقام $4,1,3,5$ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار طاق کوچکتر از (5000) ساخته می‌توانید؟

۱۰) چند نمبر پلیت موتر می‌توان ساخت طوریکه در طرف راست نمبر پلیت یک عدد سه رقمی بدون صفر و بدون ارقام مکرر بوده و به طرف چپ آن دو حرف T و M قرار داشته باشد؟

۱۱) 4 متعلم صنف دوازدهم و 3 متعلم صنف یازدهم را بـه چنـد شـکل مختلف می‌توان در پهلوی هم قرار داد طوریکه متعلمان هر صـنف در کنار همدیگر باشند؟

۱۲) به چند شکل می‌توانیم از 6 نفر نمایندگان مردم در پارلمان یک نفـر را به حیث ریس و دو نفر را به حیث معاونین انتخاب نمود؟

۱۳) به چند شکل می‌توان از حروف کلمه (دوکتور) کلمه سه حرفی ساخت (حتمی نیست که دارای معنی خاص باشد)؟

۱۴) صنف دوازدهم یک مکتب خصوصی10 نفر شاگرد و صنف یازدهم آن 12 نفر شاگرد دارد و می‌خـواهیم از هـر صـنف دو نماینـده (ریـس و معاون) انتخاب نماییم، معلوم نمایید به چند شکل می‌توان این گـروپ 4 نفر را تشکیل نمود؟

۱۵) با استفاده از حروف K, L, P, N, M به چند شکل مـی‌تـوان یـک مثلث مختلف‌الاضلاع را مشخص نمود (هر حرف برعلاوه راس، زاویه مربوط مثلث را نیز معرفی می‌نماید)؟

۱۶) در یک گفتمان (نشست تلویزیونی) به دور یک میز مدور 5 نفـر روی یک موضوع اجتماعی بحث دارند، به چند شکل مختلفه آن‌ها بـه دور میز اخذ موقع نموده می‌تواند؟

۱۷) از کلمه Derivative چند کلمه ده حرفی ساخته شده می‌تواند؟

۱۸) به چند شکل می‌توان از 8 تـیم برتـر فوتبـال سـه تـیم آن را بـرای مسابقات جام منطقوی کشورهای همجوار انتخاب نمود؟

۱۹) با استفاده از 7 نقطه در موقعیت‌های مختلف واقـع بـر محـیط یـک دایره چند چهار ضلعی ساخته شده می‌تواند؟

۲۰) به چند شکل می‌توان از 8 نفر تیم A و 6 نفر تیم B یک تیم 5 نفری منتخب را تشکیل داد، طوریکه از تیم A به تعداد سـه نفـر در تیم منتخب شامل باشد؟

۲۱) به تعداد 10 نفر گارد امنیتی درخواست وظیفه بـرای سـه محـل A، B و C داده انـد طوریکـه در محـلات مـذکور بـه ترتیـب 2,3,4 ضرورت است، به چند شکل مختلف می‌توان گاردهـای امنیتـی مـورد ضرورت را انتخاب نمود؟

۲۲) تکت لاتری نمبر (353753) برنده جایزه ممتاز گردیده است چنـد تکت دیگر وجود دارد که از عین ارقام تشکیل گردیده؛ اما برنده جایزه نگردیده باشد؟

۲۳) 8 نفر می‌خواهند به دو موتر مختلف سوار شونده در یک موتر 5 نفر و در موتر دوم 3 نفر گنجایش دارد، به چند شکل مختلف مـی‌تواننـد اشخاص مذکور در این دو موتر تقسیم گردند؟

۲۴) با استفاده از حروف کلمـه (Mathematic) بـه چنـد شـکل مختلـف می‌توان دو کلمه سه حرفی و دو حرفی را تشکیل نمود؟

۲۵) با استفاده از حروف کلمـه (Notation) چنـد کلمـه از عـین حـروف ساخته می‌توانید؟

۲۶) در انکشاف بینوم $(1+x)^{20}$ جمله چهاردهم آن را دریابید؟

۲۷) هرگاه یک دایس را به اندازیم و بخواهیم شـماره دایـس (6) باشـد، حالت مساعد آن را دریابید؟

۲۸) هرگاه یک دایس را به اندازیم و بخـواهیم شـماره دایـس (5) باشـد، حالت نامساعد آن را دریابید؟

۲۹) هرگاه یک دایس را به اندازیم و بخواهیم شماره دایـس جفـت باشـد، حالت مساعد آن را دریابید؟

۳۰) در یک قطی 20 مهره است طوریکه 8 مهـره آبـی، 5 مهـره زرد و 7 مهره سرخ قرار دارد. و از آن یک مهره را بیرون می‌نماییم احتمـالات ذیل را دریابید؟

الف: مهره آبی باشد   ب: مهره زرد باشد

ج: مهره سرخ باشد   د: مهره سفید باشد

۳۱) در یک درجن قطعه (52 قطعه) سه قطعـه را بطـور اختیـاری بیـرون می‌کنیم احتمال این که هر سه قطعه طوس باشد، را محاسبه نمایید.

۳۲) سه سکه را می‌اندازیم فضای نمونه از نگاه شیر آمدن آن را دریابید؟

۳۳) سه سکه را می‌اندازیم فضای نمونه (از نگاه شیر یا خـط آمـدن) آن را دریابید؟

۳۴) دو دایس را می‌اندازیم حادثه اتفاقی که دایس اول جفت و دایـس دوم طاق باشد چند است؟

۳۵) دو دایس را می‌اندازیم حادثه اتفاقی کـه مجمـوع شـماره‌هـای هـردو دایس 6 باشد، چند است؟

۳۶) یک دایس را می‌اندازیم، احتمال این که شماره دایس طاق یا کوچکتر از 5 باشد را دریابید؟

۳۷) یک دایس را می‌اندازیم، احتمال این کـه شـماره دایـس طـاق و هـم بزرگتر از 3 باشد، را دریابید؟

۳۸) دو دایس مختلف را می‌اندازیم دریافت احتمال این که شـماره دایـس اولی کوچکتر 4 و مجموعه شماره آن‌ها 8 گردد؟

۳۹) در یک قطی 5 مهره سفید، 2 مهره سیاه و 2 مهره زرد است، پیدا کنید احتمال این که مهره زرد نباشد؟

۴۰) از ارقام (1) الی (7) یک رقم را انتخاب می‌نماییم ملاحظـه نماییـد که رقم بزرگتر 3 است، پیدا کنید احتمال این که رقم مـذکور جفـت باشد؟

۴۱) دو دایس را می‌اندازیم هرگاه یکی از دایـس‌هـا (6) باشـد، دریافـت نمایید احتمال این که حاصل‌جمع شماره‌ها (9) گردد؟

۴۲) یک سکه و یک دایس را باهم می‌اندازیم دریافت نمایید احتمال ایـن که سکه جفت و شماره دایس بزرگتر از (3) باشد؟

۴۳) در یک قطی به تعداد 20 دانه مهره به چهار رنگ سیاه، سفید، سـرخ و سبز به تعداد مساوی وجود دارد، دو مهره را از قطی بیرون می‌نماییم پیدا کنید احتمال این که هردو مهره سرخ باشد؟

۴۴) از یک دسته قطعه، 3 قطعه را بیرون مـی‌نمـاییم دریافـت نماییـد احتمال این که هر 3 قطعه خشت یا هر 3 قطعـه خـشت عکـس‌دار باشد؟

۴۵) در یک قطی 3 مهره سیاه 4 مهره سفید قرار دارد و این عمل را پـنج مراتبه تکرار می‌نماییم، هرگاه مهره سـفید را کامیـابی فـرض نمـاییم دریافت نمایید احتمال این که:

الف: دو کامیابی را
ب: حد اقل دو کامیابی را
ج: حد اکثر دو کامیابی را

فصل دوازدهم

احصائیه (Stutistics)

احصائیه Stutistics از کلمه Stute به معنی دولت اشتقاق گردیده کـه در زمانه‌های قدیم با بوجود آمـدن دولـت‌هـا و ضـرورت بـا داشـتن معلومـات و اطلاعات درباره دستگاه‌هـای اداره کننـده دولـت، نظـام عـسکری و ملکـی و فراهم نمودن احتیاجات آنها با در نظرداشت اندازه نفوس بـه مقیـاس دارایـی، وسایل حیاتی و غیره احساس می‌گردید. بدین لحاظ معنی احـصائیه از همـان زمانه‌ها عبارت از جمع‌آوری اطلاعات به منظور استفاده دولت‌ها تعبیر گردیـده است. پس کلمه احصائیه دارای دو مفهوم عمده ذیل است:

۱- احصائیه به معنی علم عبارت از یک روش علمی به منظور تحقیقات و ارزیابی مقدمات عددی می‌باشد.

۲- احصائیه به معنی معلومات عددی که بیشتر در تحقیقات روزمره جهت پیشبرد امور اجتماعی فرهنگی و سیاسی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تعریف احصائیه: احصائیه (آمار) علمی است که بـا جمـع آوری، ترتیـب، تجزیه، تحلیل و تفسیر معلومات عددی (data) سروکار دارد.

Data عبارت از جمـع‌آوری و نمـایش اعـداد بـرای تحقیـق، سـنجش و بررسی است که مواد مذکور قابل فهم نبوده و به نـام مـواد خـام یـا داتـا یـاد می‌شود، که داتاها دارای فواید ذیل می‌باشند:

- تهیه پلان منظم
- جلوگیری از ضیاع وقت
- جلوگیری از نواقص
- زود رسیدن به هدف
- اتخاذ تصامیم درست و معقول

کاربرد احصائیه: از علم احصائیه به حیث یک رشتهٔ از علـوم بـا روش و میتودهای خاص در عرصه‌های ذیل بطور وسیع کار گرفته می‌شود:

- در عرصهٔ تولید و توزیع محصولات زراعتی و صنعتی
- در عرصه خصوصیات نفوس، خانواده و افراد
- در عرصه مهاجرت‌ها، مسافرت‌ها و حالات مربوط به آن
- در عرصه تعلیم و تربیه
- در عرصه جمع‌آوری مالیات و غیره ...

تقسیم‌بندی عمومی علم احصائیه: نظر به نوعیت و تشریح ارقام، علـم احصائیه به دو بخش عمومی تقسیم گریده است:

۱- احصائیه تشریحی یا توصیفی یا استقرایی: عبـارت از تمـام اصـول و روش‌های است که در تشریح و توضیح اوصاف و مشخصات نفـوس و یا نمونه مورد استفاده قرار می‌گیرد، مـثلاً محاسـبه اوسـط، میانـه، مود، فاصله، انحراف و غیره ... .

۲- احصائیه استنباطی یا قیاسی: عبارت از یک سلسله روش‌هـای اسـت که از طریق آنها مشخصات و اوصاف نفوس از مشخصات مربوطه به یک نمونه استنباط می‌شود، مثلاً: اگر نتیجه امتحانات احمد بالترتیب 50، 70 و 60 و نتیجـه امتحانـات حمیـد 80، 68 و 59 باشـد، در اینصورت اوسط نمرات احمد 60 و از حمید 69 است. کار انجام شده تا این قدم مربوط احصائیه توصیفی بوده، اکنون اگر با در نظرداشـت اوسط نمرات گفته شود که حمید بهتر از احمد است، مربوط احـصائیهٔ استنباطی می‌شود.

جمع‌آوری معلومات: عبارت از به دست آوردن اندازه‌گیری‌ها و یا شمارش‌ها می‌باشد که از منابع قابل اعتبار بطور دقیق جمع‌آوری گردیده باشد و یکی از مهمترین بخش‌های طرزالعمل احصائیوی می‌باشد.

ترتیب معلومات: چون معلومات جمع‌آوری شده مربوط به یکتعداد معلومات آشکارا می‌باشد که آن را می‌توانیم به صورت واضح و ساده به اختصار جهت درک بهتر مطالب ارائه نمود.

پس ترتیب معلومات عبارت از عملیه بیان اندازه‌گیری و یا شمارش‌های جمع‌آوری شده به صورت مناسبی است که بتوانیم از آنها نتایج مؤثر را به دست بیاوریم.

عموماً روش‌های بیان معلومات عددی به دو طریقه ذیل صورت می‌گیرد:

1) روش ارائه جدولی معلومات عددی: در این طریقه با استفاده از جدول‌ها می‌توان مطالب جمع‌آوری شده را ترتیب و بیان نمود، مثلاً نفوس قاره‌های جهان در جدول ذیل چنین نمایش داده می‌شود:

قاره‌های جهان	آسیا	استرالیا	افریقا	اروپا	امریکا
نفوس نفر (به ملیون)	4164	33.288	1032	739	316

بخاطر داشته باشید که می‌تواند یک جدول ارائه معلومات شامل چندین عناصر باشد، مثلاً: تعداد فارغ تحصیلان پوهنتون یک شهر به ترتیب سال چنین بیان گردیده است.

سال‌ها	1381	1382	1383	1384	1385	1386	1387	1388	1389	1390
فاکولته طب	30	34	28	25	31	42	40	35	26	36
فاکولته انجنیری	20	18	21	20	14	31	25	27	23	28
فاکولته فارمسی	16	25	32	50	40	27	25	33	41	36
فاکولته زراعت	100	120	138	210	172	141	85	68	93	105

بخاطر داشته باشید که هر عنصر قابل اندازه‌گیری را به نام متحول می‌نامند، مثلاً: نام قاره‌ها، فارغ‌التحصیلان، فاکولته‌ها و غیره ... .

همچنان هر اندازه‌گیری یک متحول را به نام تغییر یا تحول (قیمت تابع) یاد می‌نمایند، مثلاً در مثال‌های فوق، مساحت براعظم‌ها (قاره‌ها)، تعداد فارغ‌التحصیلان فاکولته در سال‌های مختلف و غیره ...

2) روش گرافیکی ارائه معلومات عددی: اشکال و تصاویری که جهت مطالعه تغییرات یک متحول و یا مقایسه چند متحول مشابه رسم می‌گردد، به نام گراف معلومات عددی یاد می‌شوند که به اشکال مختلف مانند گراف نواری (مستطیلی)، گراف خط شکسته (منکسر)، گراف دایروی، گراف تصویری و غیره ارائه گردیده می‌توانند.

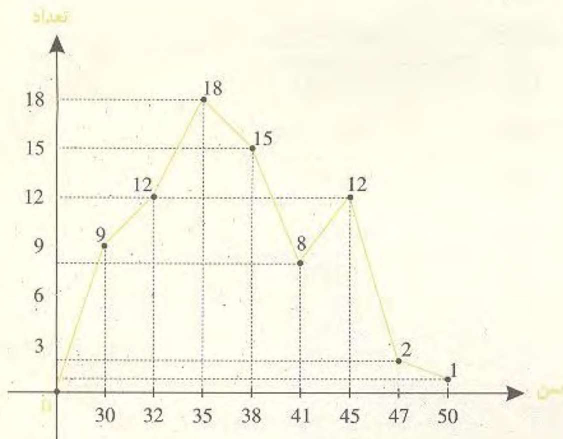
مثلاً تعداد کارگران بخش‌های صنعتی و زراعتی یک شهر در طول ۸ سال در گراف نواری (مستطیلی) قرار ذیل معلومات داده شده است:

سال‌ها	تعداد کارگران زراعتی	تعداد کارگران صنعتی
2004	25000	34000
2005	300000	400000
2006	150000	450000
2007	200000	500000
2008	300000	520000
2009	600000	400000
2010	550000	350000
2011	210000	530000



گراف‌های خط منکسر عموماً زمانی مـورد اسـتعمال قـرار مـی‌گیرنـد کـه تغییرات یک متحول به صورت متمادی و یا در وقفه‌های زمانی صورت گرفته باشد، مثلاً سن کاندیـداهـای دوره ماسـتری ریاضـیات بـرای سـال ۲۰۱۲ در اکادمی علوم قرار ذیل ارائه گردیده است:

تعداد	سن کاندیداها
0	کمتر از 30
9	30 - 32
18	32 - 35
15	35 – 38
8	38 – 41
12	41 - 45
2	45 - 47
1	47 - 50



در گراف‌های دایروی سطح دایره را به حیث یک کل در نظر گرفته و هـر جز از معلومات داده شده را بطور قسمت از دایره که محدود به اضـلاع زاویـه مرکز همان دایره (مساحت قطاع دایره) می‌باشد، ارائه می‌گردد که البته انـدازه این زاویه مرکزی متناسب به مقدار معلومات همان جز می‌باشـد، مـثلاً تعـداد دانش‌آموزان یک مرکز آموزشی در رشته‌های مختلف قرار ذیل معلومـات داده شده است:

رشته	ریاضیات	فزیک	کیمیا	لسان انگلیسی	هنر خطاطی و رسامی	مجموع
تعداد دانش‌آموزان	480 نفر	250 نفر	320 نفر	720 نفر	130 نفر	2000 نفر

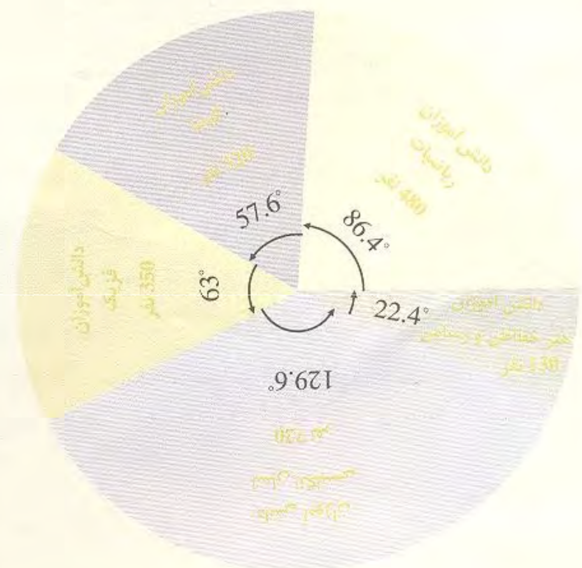
$$\begin{matrix} 360^\circ & 2000 \\ x_1 & 480 \end{matrix} \Rightarrow x_1 = \frac{360^\circ \cdot 480}{2000} = 86.4^\circ$$

$$\begin{matrix} 360^\circ & 2000 \\ x_2 & 350 \end{matrix} \Rightarrow x_2 = \frac{360^\circ \cdot 350}{2000} = 63^\circ$$

$$\begin{matrix} 360^\circ & 2000 \\ x_3 & 320 \end{matrix} \Rightarrow x_3 = \frac{360^\circ \cdot 320}{2000} = 57.6^\circ$$

$$\begin{matrix} 360^\circ & 2000 \\ x_4 & 720 \end{matrix} \Rightarrow x_4 = \frac{360^\circ \cdot 720}{2000} = 129.6^\circ$$

$$\begin{matrix} 360^\circ & 2000 \\ x_5 & 130 \end{matrix} \Rightarrow x_5 = \frac{360^\circ \cdot 130}{2000} = 23.4^\circ$$



به همین ترتیب بعضی از اوقات از تصاویر مختلف بـه منظـور ارائـه یـک معلومات مشخص عددی استفاده صورت می‌گیرد.

طوریکه منبع معلومات‌دهنده بخاطر جلب توجـه خوانـده و بیننـده و درک سریع مطلب از این روش استفاده می‌نمایند.

مثلاً تعداد نوزادان یک زایشگاه در شش ماه اول سال قرار ذیل معلومـات داده شده است.

ماه های سال	حمل	ثور	جوزا	سرطان	اسد	سنبله
تعداد نوزادان به هزار	2	2,5	3.5	1,2	2,8	4

ماه	نمایندەگی از هزار طفل
حمل	
ثور	
جوزا	
سرطان	
اسد	
سنبله	

توزیع کثرت وقوع: معلومات که در احصائیه حاصـل مـی‌گـردد معمـولاً شامل اندازه‌گیری‌های مختلف یک شی و یا صنوف مختلف است کـه بـرای ارائه مختصر و مناسـب آن از جـدول‌هـا اسـتفاده مـی‌گـردد، طوریکـه تعـداد مجموعی اعداد جدول که شامل یک کتگوری معین (یک صنف) اند، بـه نـام کثرت وقوع (فریکونسی) همان کتگوری معین یا صنف یاد می‌گردد.

بخاطر داشته باشید که هرگاه یک متحول قیمـت‌هـای خـاص عـددی را اختیار نماید (معمولاً اعداد تام است) به نام متحول منفصل (غیر پیوسـته) یـاد می‌گردد مانند تعداد کارگران یک فابریکه، تعداد محصلین یک پوهنتون، مقدار

حاصلات یک ولایت و غیره ... .

هرگاه یک متحول قیمت‌های حقیقی بین یک حدود معین را اختیار نمایـد آن را متحول متصل (پیوسته) یاد می‌نماینـد ماننـد سـن کاندیـدان ماسـتری، مقدار با راندگی در یک شهر و غیره ... .

گفتنی است این که تعـداد اصـناف کـه در یـک جـدول احـصائیوی درج می‌گردد عموماً بین ۵ الی ۲۰ صنف در نظر گرفته می‌شود.

مثال: در یک امتحان اختـصاصی شـاگردان صـنف اول پـوهنحی ادبیـات جهت تعیین رشته‌ها، برای دیپارتمنت انگلیسی، فرانسوی، آلمانی، دری و پشتو که به تعداد ۴۶ نفر اشتراک نموده اند نتایج آنها از قرار ۱۰۰ قرار ذیل به دست آمده است.

47, 53, 94, 100, 100, 95, 65, 82, 42, 35, 63, 72, 81, 79, 64, 55, 52, 50, 97, 98, 100, 73, 95, 77, 68, 61, 58, 70, 32, 64, 90, 93, 65, 69, 82, 88, 73, 80, 60, 44, 22, 41, 36, 79, 58, 50

با استفاده از معلومات فوق می‌خواهیم توزیع کثـرت وقـوع ارقـام فـوق را ترتیب نماییم.

حل: اولاً نمرات فوق را بطور صعودی ترتیب می‌نماییم.

22, 32, 35, 36, 41, 42, 44, 47, 50, 50, 52, 53, 55, 58, 58, 60, 61, 63, 64, 64, 65, 65, 68, 69, 70, 72, 73, 73, 77, 79, 79, 80, 81, 82, 82, 88, 90, 93, 94, 95, 95, 97, 98, 100, 100, 100

وسعت اعداد مذکور را دریافت می نماییم. $100 - 22 = 78$

وسعت مذکور را به هر صنف (کلاس) که خواسـته باشـیم تقـسیم نمـوده می‌توانیم. آن را می‌خواهیم به (۱۰) کلاس تقسیم نماییم، پس داریم که:

انتروال هر کلاس (صنف) $\frac{78}{10} = 7.8$

چون انتروال هر کلاس 7.8 تعیین گردید، بناءً برای ساده‌گی در کـار آن را (8) در نظر گرفته و حد کلاس (صنف) اول را به اندازه 0.5 کمتر در نظر گرفته می‌شود، یعنی حد اول کلاس اول 21.5 در نظر گرفته می‌شـود. پـس جدول توزیع کثرت وقوع آن قرار ذیل است:

حدود صنوف (کلاس ها)	نقطه وسطی (x) (وسط صنف)	کثرت وقوع (فریکونسی f)
21.5-29.5	25.5	1
29.5-37.5	33.5	3
37.5-45.5	41.5	3
45.5-53.5	49.5	5
53.5-61.5	57.5	5
61.5-69.5	65.5	7
69.5-77.5	73.5	5
77.5-85.5	81.5	6
85.5-93.5	89.5	3
93.5-101.5	97.5	8
مجموع کثرت وقوع		46

برای وضاحت جدول فوق تعریفات ذیل را در نظر داشته باشید.

۱) نقاط ابتدایی (سرحد پایین کـلاس) و نقـاط انتهـایی (سـرحد بـالایی کلاس) را نقاط سرحدی می‌نامند، مثلاً در کلاس (صنف) اول جـدول 21.5 سرحد پایین و 29.5 سرحد بالایی همان کلاس نامیده می‌شود.

۲) نقطه وسطی سرحد بالایی و سرحد پایین یک کلاس (صنف) را به نام نقطه وسطی یا (Mid point) یاد می‌گردد، مثلاً نقطه وسطی کلاس (صنف) اول $\frac{21.5+29.5}{2} = 25.5$

۳) اختلاف بین سرحد پایین اولین کلاس (صنف) و سرحد بالایی آخرین کلاس (صنف) را به نام وسعت (Range) جدول مـی‌نامنـد، مـثلاً در جدول فوق وسعت آن عبارت از: $100 - 22 = 78$

۴) حاصل تقسیم وسعت یک جدول بر تعداد کلاس‌ها (صنوف) که تعیین تعداد کلاس‌ها اختیاری می‌باشد (بین 5 الی 20) عبارت از انتـروال

هر کلاس گفته می‌شود، مثلاً در جدول فـوق $\frac{78}{10} = 7.8$ بـوده کـه برای سهولت کار و همچنان برای ارائه تمام معلومات در جدول کمـی بیشتر از آن انتروال در نظر گرفته می‌شـود، یعنـی $7.8 \simeq 8$ انتـروال جدول فوق می‌باشد.

۵) چون اولین کلاس (صنف) شامل کوچکترین قیمت عددی (نمره 22 در معلومات فوق) می‌باشد، بناءً به اندازه 0.5 یا 0.55 کمتر از آن را به حیث سـرحد پـایین اولـین کـلاس (صـنف) قبـول مـی‌گـردد تـا قیمت‌های متحول معلومات یک جدول در نقاط سرحدی قرار نگیـرد. مثلاً در جدول فوق 21.5 به حیث سرحد پایین در نظر گرفتـه شـده است.

۶) تعداد قیمت‌های متحول را در هر کلاس (صنف) به نام کثـرت وقـوع (فریکونسی Frequence) همان کلاس می‌نامند و آن را به f نشان می‌دهند، مثلاً در جدول فوق کثرت وقوع (فریکونسی) کلاس اول آن $f_1 = 1$ می‌باشد که بزرگترین کثرت وقوع را به نـام کثـرت اعظمـی (Mode) می‌نامند که در جدول فوق (8) می‌باشد و هرگاه ایـن عـدد تکرار آمده باشد آن جدول دارای کثرت اعظمی نمی‌باشد.

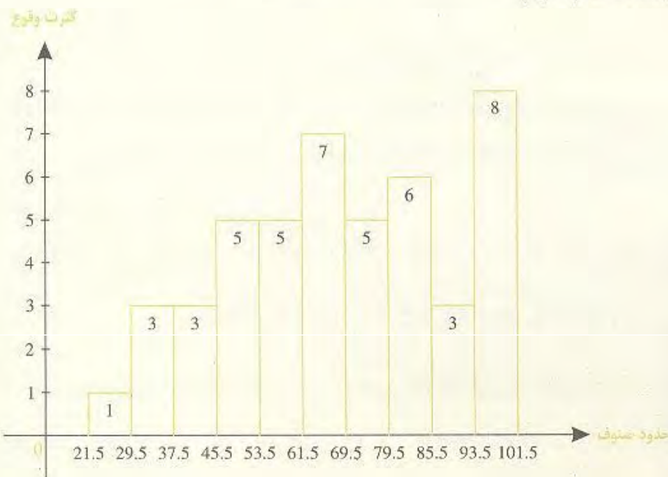
مثلاً در ست آمار $\{1,2,5,6,7\}$ اصـلاً کثـرت اعظمـی mode وجـود ندارد و در بعضی موارد ممکن است یک ست آمار دارای دو یـا بیـشتر از دو mode باشد، مثلاً در ست اعداد $\{3,7,8,3,4,7,1,5\}$ دو mode یعنی (3) دو مراتبه و (7) دو مراتبه وجود دارد، که به نام ست آمار دو mode یا (Bimodal) یاد می‌گردد.

۷) ست کثرت وقوع کلاس‌ها (صنوف) مختلفه یک جدول را به نام توزیع کثرت وقـوع (Frequency Distribution) یـاد مـی‌نماینـد کـه در جـدول مـدنظر فـوق سـت توزیـع کثـرت وقـوع آن عبـارت از:

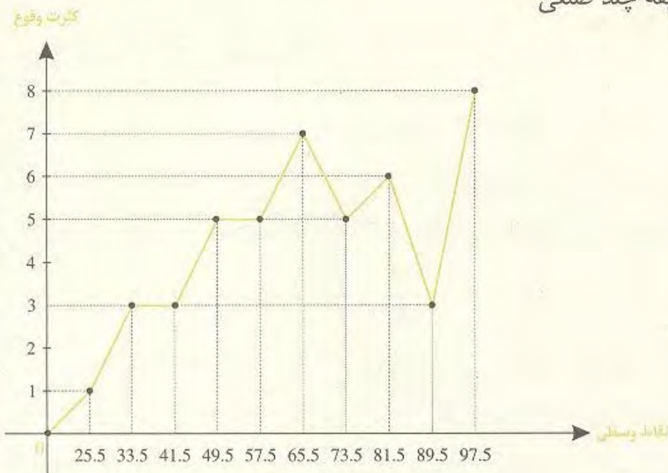
$$=\{1,3,3,5,5,7,5,6,3,8\}$$

که می توان به کمک این ست معلومات ارائه شده جدول کثـرت وقـوع را روی یک دیاگرام به طریقه هستوگرام (Histogram) و چنـد ضـلعی کثـرت وقوع (Frequency polygon) چنین نمایش داد.

طریقه هستو گرام



طریقه چند ضلعی



تحلیل معلومات

طوریکه قبلاً مطالعه نمودیم به منظور تقلیل یک مجموعه بزرگ از معلومات دست داشته به یک شکل قابل درک که به سهولت می‌توان این معلومات را به کمک آنها ارزیابی و تحقیق نمود و جدول کثرت وقوع معلومات را تشکیل نموده، هستوگرام و یا گراف چند ضلعی آن را ترسیم نمودیم.

حال می‌خواهیم طرز ارائه معلومات را با استفاده از بعضی اندازه‌های دیگر عیار نماییم.

پس هر روش اندازه‌گیری که بتواند به یک مرکز توزیع، معلومات را مشخص نماید، به نام مقایس مرکز تراکم یا معیارهای تمرکز نامیده می‌شود که این معیارهای تمرکز عبارت از اوسط حسابی، وسط (میانه)، اوسط هندسی، اوسط هارمونیک، اوسط مربعی می‌باشند، که هریک را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱) اوسط حسابی (Arithmetic Mean): هرگاه $x \in IR$ باشد، پس اوسط حسابی اعداد $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ عبارت از:

$$M_a = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

طوریکه n تعداد اعداد را نشان می‌دهد.

مثلاً مقدار محصولات ادویه در یک کمپنی تولید ادویه‌جات طبی در شش ماه اخیر سال ۱۳۹۰ قرار ذیل معلومات داده شده است:

12000 قطی ...... ماه میزان
21000 قطی ...... ماه عقرب
28000 قطی ...... ماه قوس
30000 قطی ...... ماه جدی
15000 قطی ...... ماه دلو
14000 قطی ...... ماه حوت

پس اوسط حسابی تولید این کمپنی عبارت از:

$$M_a = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6}$$

$$= \frac{12000 + 21000 + 28000 + 30000 + 15000 + 14000}{6}$$

$$M_a = \bar{x} = \frac{120000}{6} = 20000$$

پس اوسط حسابی تولید ادویه‌جات در کمپنی مذکور در مدت 6 ماه سال به اندازه 20000 قطی در فی ماه می‌باشد.

۳) اوسط وزنی (مؤثر): اگر data با ضریب خاص بیان شده باشند، به این معنا است که تأثیر data یکسان نبوده بلکه بستگی به ضریب آن دارد. در این حالت در جدول ضریب‌ها به عنوان کثرت آن data به حساب آمده و با w نشان داده می‌شوند.

اوسط به دست آمده در این حالت اوسط وزنی می‌نامند.

$$\text{اوسط وزنی} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \ldots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \ldots w_n}$$

$$\text{اوسط وزنی} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

مثال‌ها:

مثال ۱: یک دکاندار 28 کیلوگرام چای را از قرار فی کیلوگرام 20 افغانی، ۱۸ کیلوگرام چای را از قرار فی کیلوگرام 130 افغانی و 48 کیلوگرام چای را از قرار فی کیلوگرام 135 افغانی فروخت. قیمت اوسط فی کیلوگرام چای را معلوم کنید.

حل: $x_1 = 120$ ، $x_2 = 130$ و $x_3 = 135$ و به همین ترتیب $w_1 = 28$ ، $w_2 = 18$ و $w_3 = 48$ است، بناءً:

$$\text{اوسط وزنی } \overline{x} = \frac{28\cdot(120)+18\cdot(130)+48\cdot(135)}{28+18+48} = 129.6$$

مثال ۲: نمرات یک محصل در پنج مضمون با در نظرداشـت کریـدیت آن قرار ذیل داده شده است، اوسط نمرات این محصل را دریابید.

مضمون	نمره عددی (x_i)	کریدیت (w_i)	حاصل‌ضرب $(x_i w_i)$
ریاضیات	10	3	30
فزیک	8	2	16
کیمیا	6	2	12
بیولوژی	5	1	5
هندسه	9	2	18

یکی از حالت خصوصی استفاده از اوسط مؤثر (وزنی) در حالتی اسـت کـه اوسط کلی چندین ست آمار یا ارقام به اساس اوسطهای هر ست آن مطلـوب باشد، مثلاً $\overline{x_1}$ اوسط n_1 عدد $\overline{x_2}$ اوسط n_2 به همـین ترتیـب بـالاخره $\overline{x}_k$ اوسط n_k عدد باشد، تحت این شرایط اوسط کلی مساویست به:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \overline{x}_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

مثال: اوسط نمرات 20 نفر یک صنف 75، اوسـط 25 نفـر دیگـر همـین صنف 35 و اوسط 40 نفر باقیمانده 20 است. اوسط نمـره صـنف را محاسـبه کنید.

$$\overline{x} = \frac{20\cdot(75)+25\cdot(35)+40\cdot(120)}{20+25+40} = \frac{3175}{85} = 37.35$$

۳) وسط یا میانه (Median): میانه اعـداد مرتـب $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ در حالیکه $x \in IR$ است، عبارت از:

$M_d = x_{\frac{n+1}{2}}$ در صورتیکه n طاق باشد

$M_d = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)$ در صورتیکه n جفت باشد

مثلاً وسط اعداد $8,3,4,7,6,5,1$ را دریابید.

اولاً اعداد را مرتب می‌نماییم.

$1,3,4,5,6,7,8$

$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5, x_5 = 6, x_6 = 7, x_7 = 8$

چون $n = 7$ طاق است پس وسط (M_d) آن عبارت از:

$M_d = x_{\frac{n+1}{2}} = x_{\frac{7+1}{2}} = x_4 = 5$

همچنان وسط اعداد $7,5,11,8,13,15$ را دریابید.

اولاً اعداد را مرتب می‌نماییم.

$5,7,8,11,13,15$

$x_1 = 5, x_2 = 7, x_3 = 8, x_4 = 11, x_5 = 13, x_6 = 15$

چون $n = 6$ جفت است پس وسط (M_d) آن عبارت از:

$$M_d = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{6}{2}} + x_{\frac{6}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}(x_3 + x_4)$$

$$M_d = \frac{1}{2}(8+11) = \frac{1}{2}(19) = \frac{19}{2} = 9.5$$

٤) اوسط هندسی (Geometric Mean): اوسط هندسی تعداد n عـدد مثبت $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ عبارت از:

$$M_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, \dots, \cdot x_n}$$

که می‌توان با استفاده از لوگارتم محاسبه اعداد مذکور را به سهولت انجام داد، یعنی:

$$\log_g M = \frac{1}{n}\left(\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + ... + \log x_n\right)$$

مثال: اوسط هندسی اعداد $64,32,2,25$ را دریابید.

$$x_1 = 64, x_2 = 32, x_3 = 2, x_4 = 25$$

چون $n = 4$ است، پس داریم که:

$$M_g = \sqrt[4]{64\cdot 32\cdot 2\cdot 625} = \sqrt[4]{2^6\cdot 2^5\cdot 2^1\cdot 5^4} = \sqrt[4]{2^{12}\cdot 5^4} = \sqrt[4]{(2^3\cdot 5)^4}$$

$$M_g = 2^3\cdot 5 \Rightarrow M_g = 8\cdot 5 \Rightarrow M_g = 40$$

و یا به کمک لوگارتم می‌توان چنین نوشت:

$$M_g = \sqrt[4]{64\cdot 32\cdot 2\cdot 625} \Rightarrow \log\left(M_g\right) = \log\sqrt[4]{2560000}$$

$$\Rightarrow \log\left(M_g\right) = \log(2560000)^{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \log\left(M_g\right) = \frac{1}{4}\log(2560000)$$

$$\Rightarrow \log\left(M_g\right) = \frac{1}{4}(6.4082399) \Rightarrow \log\left(M_g\right) = 1.6020$$

$$\Rightarrow M_g = 40$$

۵) اوسط هارمونیک (Harmonic Mean): اوسط هارمونیکی تعداد n عدد خلاف صفر $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ عبارت از:

$$M_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + ... + \frac{1}{x_n}} \Rightarrow M_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

که از اوسط هارمونیک معمولاً در اندازه‌گیری اوسط سرعت‌ها، در فاصله‌های معین ثابت می‌توان استفاده نمود.

مثلاً یک موتر فاصله $250km$ را با سرعت $50km/h$، $250km$ را با سرعت $75km/h$ و فاصله $250km$ را به سرعت $100km/h$ پیموده است، سرعت متوسط آن را محاسبه نمایید.

$$M_a = \overline{V} = \frac{3d}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{3d}{\frac{d}{V_1} + \frac{d}{V_2} + \frac{d}{V_3}} = \frac{3\cdot 250}{\frac{250}{50} + \frac{250}{75} + \frac{250}{100}}$$

$$M_a = \frac{750}{5 + \frac{10}{3} + \frac{5}{2}} = \frac{750}{\frac{30+20+15}{6}} = \frac{750\cdot 6}{65} = \frac{150\cdot 6}{13} = \frac{900}{13} = 69.2$$

ویا $M_h = \frac{n}{\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3}} = \frac{3}{\frac{1}{50} + \frac{1}{75} + \frac{1}{100}} = \frac{3}{\frac{6+4+3}{300}}$

$$M_h = \frac{900}{13} = 69.2$$

طوریکه ملاحظه می‌گردد، اوسط حسابی سرعت‌ها مساوی به اوسط هارمونیک آن‌ها می‌باشد.

۶) اوسط مربعی (Quadratic Mean): جذر مربع وسط حسابی مربعات چند عدد را اوسط مربعی آن‌ها می‌نامند، یعنی:

$$M_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

مثال: اوسط مربعی اعداد $4,5,3,8$ را دریابید.

$$x_1 = 8, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 4$$

$$\Rightarrow M_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{4}} = \sqrt{\frac{8^2 + 3^2 + 5^2 + 4^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{64 + 9 + 25 + 16}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{114} \simeq \frac{1}{2}(10.68) \simeq 5.34$$

معیارهای پراگنده‌گی (Measures of Dispersion)

برعلاوه این که اوسط حسابی یک معیار خوب و تقریباً قابل اعتبـار بـرای مشخص نمودن یک مرکز تراکم عددی است، اما این معیار نخواهـد توانـست ما را در روشنی از نوعیت توزیع قیمت‌های عددی متحول قرار دهد.

بناءً ضرورت به معرفی معیارهای دیگر می‌باشد، که مفـاهیم ماننـد اوسـط انحراف و اریانس و انحراف معیاری را معیار (مقیاس) پراگنده‌گی یاد می‌نمایند که ذیلاً آن‌ها را توضیح می‌نماییم.

۱- اوسط انحراف (The Mean Deviation)

هرگاه اوسط حسابی اعداد $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ عبارت از عدد $(\overline{x})$ باشد، پس اوسط انحراف اعداد مذکور چنین تعریف گردیده است:

$$MD = \frac{1}{n}\left(\left|x_1 - \overline{x}\right| + \left|x_2 - \overline{x}\right| + \left|x_3 - \overline{x}\right| + ... + \left|x_n - \overline{x}\right|\right)$$

$$\Rightarrow MD = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \overline{x}\right|$$

مثال: اوسط انحراف معلومات عددی ذیل را تعیین نمایید.

12,35,41,25,19,48

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{n} = \frac{12+35+41+25+19+48}{6} = 30$$

$$\Rightarrow MD = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \overline{x}\right|$$

$$MD = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \left|x_1 - \overline{x}\right| + \left|x_2 - \overline{x}\right| + \left|x_3 - \overline{x}\right| + \left|x_4 - \overline{x}\right| \\ + \left|x_5 - \overline{x}\right| + \left|x_6 - \overline{x}\right| \end{pmatrix}$$

$$MD = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \left|12-30\right| + \left|35-30\right| + \left|41-30\right| + \left|25-30\right| \\ + \left|19-30\right| + \left|48-30\right| \end{pmatrix}$$

$$MD = \frac{1}{6}(18+5+11+5+11+18))$$

$$MD = \frac{1}{6}(68) = 11.\overline{3}$$

۲) واریانس (Variance)

هرگاه اوسط حسابی اعداد $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ عبـارت از عـدد $\overline{x}$ باشـد، پس واریانس اعداد مذکور قرار ذیل تعریف گردیده است:

$$V_{ar} = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2\right]$$

$$\Rightarrow V_{ar} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

مثال: واریانس معلومات عددی 15,17,35,11,22 را تعیین نمایید.

$$x_1 = 15,\ x_2 = 17,\ x_3 = 35,\ x_4 = 11,\ x_5 = 22$$

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{n} = \frac{15+17+35+11+22}{5} = 20$$

$$\Rightarrow V_{ar} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$V_{ar} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i - 20)^2$$

$$V_{ar} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2 + (x_3 - 20)^2 \\ + (x_4 - 20)^2 + (x_5 - 20)^2 \end{bmatrix}$$

$$V_{ar} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} (15-20)^2 + (17-20)^2 + (35-20)^2 \\ + (11-20)^2 + (22-20)^2 \end{bmatrix}$$

$$V_{ar} = \frac{1}{5}(25+9+225+81+4)$$

$$V_{ar} = \frac{1}{5}(344) = 68.8$$

۳) انحراف معیاری (Standard Deviation)

جذر مربع واریانس اعـداد $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ بـه نـام انحـراف معیـاری نامیده می‌شود، یعنی:

$$\delta = \sqrt{V_{ar}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

مثال: انحــراف معیــاری معلومــات عــددی ذیــل را دریابیــد.

25,32,12,9,13,20,8

$$x_1 = 25,\ x_2 = 32,\ x_3 = 12,\ x_4 = 9,\ x_5 = 13,\ x_6 = 20,\ x_7 = 8$$

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{n}$$

$$= \frac{25 + 32 + 12 + 9 + 13 + 20 + 8}{7}$$

$$\overline{x} = \frac{119}{7} = 17$$

$$\Rightarrow V_{ar} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}(x_i - 17)^2$$

$$V_{ar} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}(x_1 - 17)^2 + (x_2 - 17)^2 + (x_3 - 17)^2 + (x_4 - 17)^2 \\ + (x_5 - 17)^2 + (x_6 - 17)^2 + (x_7 - 17)^2\end{bmatrix}$$

$$V_{ar} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}(25 - 17)^2 + (32 - 17)^2 + (12 - 17)^2 \\ + (9 - 17)^2 + (13 - 17)^2 + (20 - 17)^2 + (8 - 17)^2\end{bmatrix}$$

$$V_{ar} = \frac{1}{7}(64 + 225 + 25 + 64 + 16 + 9 + 81)$$

$$V_{ar} = \frac{1}{7}(484) \simeq 69.1$$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{V_{ar}} = \sqrt{69.1} \simeq 8.3$$

اوسط حسابی معلومات عددی در توزیع کثرت وقوع

اگر در یک توزیع کثرت وقـوع، اعـداد $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ نقـاط وسـطی صنوف و $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ بالترتیب کثرت وقوع (فریکونسی) آنها باشد در این صورت اوسط حسابی معلومـات عـددی (Data) از رابطـه ذیـل تعیـین و تخمین می‌گردد:

$$\overline{x} \approx \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + \ldots + f_n \cdot x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

مثال: نمرات 30 نفر شاگردان را در امتحان مـضمون احتمـالات از روی (100) قرار ذیل داده شده است، اولاً توزیع کثرت وقوع آن را دریافتـه بعـداً اوسط حسابی آن را دریافت نمایید.

75, 46, 73, 85, 49, 79, 53, 92, 81, 56, 37, 96, 65, 38, 93, 70, 69, 83, 60, 43, 100, 58, 84, 73, 65, 98, 40, 65, 99, 51

حل: اولاً اعداد مذکور را به اساس صعودی ترتیب می‌نماییم.

37, 38, 40, 43, 46, 49, 51, 53, 56, 58, 60, 65, 65, 65, 69, 70, 73, 73, 75, 79, 81, 83, 84, 85, 92, 93, 96, 98, 99, 100

$$Range = 100 - 37 = 63$$

$$\frac{63}{8} = 7.875$$

آن را به هشت کلاس تقسیم می‌نماییم.

که برای سهولت کار آن را 8 در نظر می‌گیریم. سپس سرحد پایین اولین کلاس را عدد 36.5 درنظر گرفته جـدول توزیـع کثـرت وقـوع آنـرا ترتیـب می‌نماییم.

حدود صنوف (کلاس ها)	نقاط وسطی کلاس ها (x)	کثرت وقوع (فریکونسی f)	$f \cdot x$
36.5-44.5	40.5	4	162
44.5-52.5	48.5	3	145.5
52.5-60.5	56.5	4	226
60.5-68.5	64.5	3	193.5
68.5-76.5	72.5	5	362.5
76.5-84.5	80.5	4	322
84.5-92.5	88.5	2	177
92.5-100.5	96.5	5	482.5
		$\sum_{i=1}^{8} f_i = 30$	$\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x = 2071$

پس در نتیجه اوسط حسابی نمرات فوق عبارت از:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{2071}{30} = 69.0\overline{3}$$

انحراف معیاری در توزیع کثرت وقوع

هرگاه $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ نقاط وسطی صنوف و $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ بـه ترتیب کثرت وقوع (فریکونسی) آن‌هـا باشـد، در اینـصورت انحـراف معیـاری معلومات عددی (data) آنها از رابطه ذیل به دست می‌آید:

$$\delta = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot f_2 + ... + (x_n - \overline{x})^2 \cdot f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n}}$$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

مثال: انحـراف معیـاری معلومـات عـددی data کثـرت وقـوع را بـا در نظرداشت مثال قبلی دریابید.

حل: از محاسبه جدول مثال قبلی می‌دانیم کـه اوسـط حـسابی معلومـات عددی در توزیع کثرت وقوع $69.0\overline{3}$ می‌باشد. پس می‌توان انحراف معیـاری معلومات عددی داده شده را بر اساس جدول ذیل نوشت:

i	x_i	f_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i$
1	40.5	4	-28.53	3255.84
2	48.5	3	-20.53	1264.44
3	56.5	4	-12.53	628.00
4	64.5	3	-4.53	61.56
5	72.5	5	3.47	60.20
6	80.5	4	11.47	526.24
7	88.5	2	19.47	758.16
8	96.5	5	27.47	3773.00
		$\sum_{i=1}^{8} f_i = 30$		$\sum_{i=1}^{8} (x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i = 1032744$

پس درنتیجه انحراف معیاری data کثرت وقوع جدول فوق عبارت از:

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_1 - \overline{x})^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{10327.44}{30}} = \sqrt{344.248} \simeq 18.55$$

$\delta = 18.55$

ضریب تبدیلی یا ضریب تغییرات (Coefficient Variation)

نسبت انحراف معیاری بر اوسط حسابی یک معلومات عددی data عبارت از ضریب تغییرات گفته می‌شود که از رابطه ذیل قابل دریافت می‌باشد:

$$C \cdot V = \frac{\delta}{\overline{x}}$$

طوریکه در رابطه فوق $C \cdot V$ ضریب تغییرات، δ انحراف معیاری و $\overline{x}$

اوسط حسابی را نشان می‌دهد.

فیصدی ضریب تغییرات را به نام تحول ضریب یاد می‌نمایند، یعنی:

$$C \cdot V = \frac{\delta}{\overline{x}} \cdot 100$$ ..... تحول ضریب

مثال: معلومات عددی data ذیل داده شده است، ضریب تبدیلی آن را دریابید.

$$A = \{7,5,9,8,13,10,18\}$$

اولاً آن را ترتیب نموده داریم که: $A = \{5,7,8,9,10,13,18\}$

$$x_1 = 5,\ x_2 = 7,\ x_3 = 8,\ x_4 = 9,\ x_5 = 10,\ x_6 = 13,\ x_7 = 18$$

$$\Rightarrow \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{n}$$

$$= \frac{5+7+8+9+10+13+18}{7}$$

$$\overline{x} = \frac{70}{7} = 10$$

چون در معلومات فوق کثرت وقوع (فریکونسی) $f = 1$ می‌باشد، پس فورمول انحراف معیاری شکل ذیل را به خود اختیار می‌نماید.

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

بناءً می‌توان نوشت که:

$$\sum_{i=1}^{7}(x_i - \overline{x})^2 = (5-10)^2 + (7-10)^2 + (8-10)^2 + (9-10)^2 + (10-10)^2 + (13-10)^2 + (18-10)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{7}(x_i - \overline{x})^2 = 25+9+4+1+0+9+64 = 112$$

انحراف معیاری $\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7}(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{7}(112)} = \sqrt{16} = 4$

پس ضریب تغییرات عبارت از: $\Rightarrow C \cdot V = \frac{\delta}{\overline{x}} = \frac{4}{10} = 0.4$

فیصدی ضریب تبدیلی (ضریب تغییرات) عبارت از:

$$\Rightarrow 0.4 \cdot 100 = 40\%$$

توزیع (Distribution)

آزمایش برنولی و توزیع دو جمله‌یی (Binomial Distribution)

آزمایش‌های برنولی را در علم احتمالات مطالعه نمودیم و دریافت نمودیم که هرگاه یک آزمایش n مراتبه تکرار گردد یک ردیف آزمایش‌ها خواهیم داشت. هرگاه این آزمایش‌ها سه شرط ذیل را صدق نماید، آن را آزمایش‌های برنولی می‌گویند.

۱- هر آزمایش به یکی از دو حالت کامیابی یا ناکامی می‌انجامد.

۲- احتمال کامیابی (ناکامی) در تمام این آزمایش‌ها ثابت باقی بماند.

۳- تمام آزمایش‌ها در عین شرایط و به صورت غیر مرتبط انجام شود.

پس هرگاه (n) آزمایش را درنظر بگیریم طوریکه در هر آزمایش، احتمال کامیابی P و احتمال ناکامی $q = 1 - p$ باشد، پس احتمال m کامیابی در n آزمایش از رابطه ذیل به دست می‌آید:

$$P_{(m)} = c\binom{n}{m} p^m \cdot q^{n-m}$$

مثال: هرگاه احتمال ناکامی یک محصل در یک مضمون 0.7 باشد در صورتیکه 20 نفر محصل در این امتحان اشتراک نموده باشند چند فیصد احتمال دارد که از جمله 5 نفر کامیاب گردند؟

$$n=20,\; m=5,\; q=0.7,\; p=1-q,\; p=1-0.7,\; p=0.3$$

$$p_{(m)}=c\binom{n}{m}p^m\cdot q^{n-m}$$

$$p_{(5)}=c\binom{20}{5}\cdot(0.3)^5\cdot(0.7)^{20-5}$$

$$p_{(5)}=\frac{20!}{(20-5)!\cdot 5!}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^5\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{15}$$

$$p_{(5)}=\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15!}{15!\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{3^5}{10^5}\cdot\frac{7^{15}}{10^{15}}$$

$$P_{(5)}\simeq\frac{1.78862833541\cdot10^{19}}{10^{20}}\simeq0.178862833541$$
$$\simeq0.1789\cdot100\simeq17.89\%\simeq17.9\%$$

توزیع پواسن (Poisson Distribution)

برای محاسبه تقریبی m اشکال کامیابی از n آزمایش وقتی که n بزرگ و احتمال کامیابی (P) کوچک باشد، با استفاده از فورمول پواسن (Poisson) می‌توان چنین نوشت:

$$P_{(m)}=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^m}{m!}$$

در فورمول فوق $\lambda=n\cdot P$ و $e=2.718281....$ بوده، P احتمال کامیابی، n تعداد مجموعی آزمایش، m اشکال کامیابی را نشان می‌دهد.

مثال: هرگاه در یکی از پوهنحی‌های پوهنتون کابل 800 نفر جهت پذیرش‌های دوم واجد شرایط باشد و به اساس ضرورت احتمال جذب جدید شمول 0.005 باشد، احتمال این که (10) نفر شامل این پوهنحی گردد، چند فیصد خواهد بود؟

$$n=800,\; p=0,005,\; m=10,\; p(m)=?\;\Rightarrow\;\lambda=n\cdot P=800\cdot0.005=4$$

$$P_{(m)}=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^m}{m!}=\frac{(2.718281)^{-4}\cdot(4)^{10}}{10!}$$

$$P_{(10)}=\frac{\frac{1}{(2.718281)^4}\cdot(4)^{10}}{10!}=\frac{\frac{1}{53.144}\cdot1048576}{3628800}$$

$$P_{(10)}=\frac{19730.84449}{3628800}=0.005437291\cdot100=0.54\%$$

توزیع نورمال: در صورتیکه $\delta=\sqrt{n\cdot P\cdot q}$ انحراف معیاری توزیع دو جمله‌یی، x نقطه وسطی یک کلاس، $\overline{x}$ اوسط حسابی، $e=2.718281$ و $\pi=3.14189$ باشد، تابع توزیع احتمال نورمال متحول اتفاقی (x) از رابطه ذیل به دست می‌آید:

$$f(x)=\frac{N}{\delta\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\overline{x}}{\delta}\right)^2}$$

در حالیکه N تعداد مراتب (دفعات) n آزمایش را نشان می‌دهد.

چون احتمال وقوع متحول x عبارت از:

$$P(x)=\frac{f(x)}{N}$$

در نتیجه:

$$P(x)=\frac{\frac{N}{\delta\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\overline{x}}{\delta}\right)^2}}{N}$$

$$\Rightarrow P(x)=\frac{1}{\delta\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\overline{x}}{\delta}\right)^2}$$

رابطه اخیر را به نام احتمال نورمال متحول اتفاقی (x) یاد می‌نمایند.

هرگاه در رابطه $f(x)=\frac{N}{\delta\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\overline{x}}{\delta}\right)^2}$ اطراف مساوات به δ ضرب گردد، پس داریم که:

$$\delta\cdot f(x)=\frac{N}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\overline{x}}{\delta}\right)^2}$$

هرگاه $y=\delta\cdot f(x)$ و $Z=\frac{x-\overline{x}}{\delta}$ وضع گردد، پس داریم که:

$$y=\frac{N}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

رابطه اخیر را به نام توزیع نورمال معیاری یاد می‌نمایند.

مثال: هرگاه 16 سکه را به تعداد 256 مراتبه انداخته شود با توجه به این که احتمال کامیابی در یک سکه $P=\frac{1}{2}$ است، با استفاده از توزیع نورمال معیاری احتمال آمدن 10 خط را دریابید.

$$\left.\begin{array}{l} n=16 \\ N=256 \\ P=\frac{1}{2} \\ x=10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \overline{x}=n\cdot P=16\cdot\frac{1}{2}=8 \\ \delta=\sqrt{n\cdot P\cdot q}=\sqrt{16\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2 \\ Z=\frac{x-\overline{x}}{\delta}=\frac{10-8}{2}=\frac{2}{2}=1 \end{array}$$

$$y=\frac{N}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}=\frac{256}{\sqrt{2\cdot 3.14}}\cdot(2.7182)^{-\frac{1}{2}}=\frac{256}{\sqrt{6.28}\cdot\sqrt{2.7182}}$$

$$y=\frac{256}{\sqrt{17.07}}=\frac{256}{4.13}\simeq 61.98\approx 62$$

$$\Rightarrow y\approx 62$$

چون $y=\delta\cdot f(x)$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{y}{\delta}=\frac{62}{2}=31$$

پس احتمال آمدن (10) خط در انداختن (16) سکه به تعداد (256) مراتبه عبارت است از:

$$P(x)=\frac{f(x)}{N}=\frac{31}{256}=0.1211=0.1211\cdot 100$$

$$P(x)=12.11\%$$

تمرینات فصل دوازدهم

۱) کلمه Stute به معنی؟

۲) علمی که با جمع آوری، ترتیب، تجزیه، تحلیل و تغییر معلومات عددی (date) سروکار دارد. عبارت از؟

۳) یکی از مهمترین بخش‌های طرزالعمل احصائیوی .... می‌باشد؟

۴) عموماً روش‌های بیان معلومات عدد به چند طریقه صورت می‌گیرد؟

۵) هرگاه تغییرات یک متحول به صورت متمـادی و یـا در وقفـه زمـانی صورت گرفته باشد از کدام گراف استفاده می‌گردد؟

۶) در جدول ذیل سن کاندیدان دوره ماستری ریاضیات برای سال 2014 در یک اکادمی علوم قرار ذیل ارائه گردیـده اسـت. پـس گـراف خـط منکسر آن را ترسیم نمایید؟

۷) تعداد دانش آموزان یک مرکز آموزشی در رشته‌های مختلف قرار ذیل معلومات داده شده است؟

معلومات ذیل را بر روی محیط دایره نشان دهید.

رشته	ریاضیات	فزیک	کیمیا	لسان انگلیسی	مجموع
تعداد دانش‌آموزان	1000	700	500	400	2600

۸) در یک امتحان نتایج شاگردان از قرار نمره 100 طور ذیـل بـه دسـت آمده است:

10, 11, 12, 15, 16, 18, 20, 20, 22, 22, 23, 24, 25, 25, 27, 29, 30, 35, 38, 40, 45, 50, 54, 55, 58, 60, 65, 68, 70, 73, 75, 76, 78, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 90, 90, 92, 93, 95, 95, 96, 96, 97, 98, 99.

با استفاده از معلومات عددی توزیع کثرت وقوع ارقام فوق را ترتیب نمایید.

۹) هرگاه $a \in IR$ باشد پس اوسط حـسابی اعـداد $a_1, a_2 ......a_n$ از رابطه ذیل به دست می‌آید؟

۱۰) اوسط حسابی اعداد 8 ,7 ,6 ,5 ,4 را دریافت نمایید؟

۱۱) هرگاه یک کمپنی جاکت‌بافی در شش ماه اول سال قرار ذیل تولیدات داشته بوده باشد پس اوسط حسابی تولیدات این کمپنی عبارت از:

200	ماه سرطان	300	ماه حمل
400	ماه اسد	400	ماه ثور
800	ماه سنبله	300	ماه جوزا

۱۲) میانه داتاهای ذیل را دریابید: 12 ,11 ,10 ,8,9

۱۳) میانه داتاهای ذیل را دریابید: 24,26,28,30,32

۱۴) میانه داتاهای ذیل را دریابید: 18,24,30,36

۱۵) میانه داتاهای ذیل را دریابید: 80,81,82,83

۱۶) اوسط هندسی داتاهای ذیل را دریابید: 14 ,10

۱۷) اوسط هندسی داتاهای ذیل را دریابید: 64,27,343

۱۸) اوسط مربعی اعداد از کدام رابطه محاسبه می‌گردد؟

۱۹) اوسط مربعی اعداد 4، 3، 5، 6 را دریابید؟

۲۰) اوسط مربعی اعداد 5,4,10 را دریابید؟

۲۱) اوسط وزنی از کدام رابطه محاسبه می‌گردد؟

۲۲) اگـر در یـک امتحـان کـانکور نمـرات یـک شـاگرد بـه ترتیـب 70,65,61,53 و ضریب آن به ترتیب 1، 1، 2، 3 باشد اوسـط وزنـی نمرات این شاگرد را حساب کنید؟

۲۳) اوسـطی کـه معمـولاً بـرای دریافـت سـرعت وسـطی و همچنـان متحرک‌هایی که فاصله‌های مساوی را به سرعت‌هـای متفـاوت طـی نموده باشند، از کدام رابطه به دست می‌آید؟

۲۴) اوسط هارمونیکی از کدام رابطه محاسبه می‌گردد؟

۳۵) یک موتر مسافه 100km را با سرعت $20\frac{km}{h}$ و فاصله $100km$ را با سرعت $25\frac{km}{h}$ و همچنان فاصله $100km$ را با سرعت $50\frac{km}{h}$ پیموده است سرعت متوسط آن را محاسبه کنید؟

۳۶) اوسط انحراف از کدام رابطه محاسبه می‌گردد؟

۳۷) اوسط انحراف معلومات عددی ذیل را تعیین نمایید: 13,15,12,20

۳۸) اوسط انحراف معلومات عددی ذیل را تعیین نمایید: 3,10,12,15

۳۹) واریانس از کدام رابطه محاسبه می‌گردد؟

۳۰) واریانس معلومات عددی ذیل 30,32,34,36 را تعیین نمایید؟

۳۱) واریانس معلومات عددی ذیل 25,15,29,31 را تعیین نمایید؟

۳۲) انحراف معیاری از کدام رابطه محاسبه می‌گردد.

۳۳) انحراف معیاری معلومات عددی ذیل را تعیین نمایید:

30, 40, 50, 60

۳۴) هرگاه واریانس معلومات عددی عبارت از 625 باشد، پس انحراف معیاری آن را دریابید.

References:

١. افضلی پور، علی. اصول نظریهٔ ریاضی احتمال، ۱۳۵۴، چاپ سوم، انتشارات امیر کبیر، تهران – ایران.

٢. حمیدی، عبدالباقی. احصائیهٔ عالی، ۱۳۸۸، انتشارات پوهنتون تعلیم و تربیه، کابل – افغانستان.

٣. خراسانی، ع.ر.خاوری. حل‌المسایل لوگاریتم، ۱۳۹۶، چاپ چهارم، مؤسسهٔ انتشارات آسیا، تهران – ایران.

٤. دمیدوویچ، ترجمهٔ پرویز شهریاری، تمرین‌ها و مسایل آنالیز ریاضی، ۱۳۸۵، چاپ سوم، مؤسسهٔ انتشارات امیر کبیر، تهران – ایران.

٥. رضوی، مجید. بسطام، حسین. دوره کامل حساب دیفرانسیل ۱ و ۲، پاییز ۱۳۸۰، چاپ چهارم، انتشارات راه اندیشه، تهران – ایران.

٦. غلام پور، محمد حسن. کریمی نژاد، غلام رضا. ایزدی، جواد. ریاضیات عمومی ۱-۲، ۱۳۸۵، چاپ اول، انتشارات مؤسسهٔ آموزش عالی علمی کاربردی، تهران - ایران.

٧. غوری، محمد انور، ریاضی عمومی، ۱۳۸۹، چاپ هفتم، انتشارات سعید، کابل – افغانستان.

٨. هیأت علمی تألیف کتاب‌های درسی وزارت معارف، کتاب‌های ریاضی صنوف ۱۰، ۱۱ و ۱۲، ۱۳۹۰ – ۱۳۹۲، کابل – افغانستان.

9. Frank-Michael Becker, Gunter Bootz, et al, Formeln und Tabellen, 2002, 3rd edition, Gedruckt auf chlorfrei gebleichtern Papier, Berlin – Germany.

10. Hughes-Hallet, Gleason, McCallum et al. Calculus, 2002, 3rd edition, John Wiley & Sons Inc, United Status of America.

11. Micheal Evans, Josian Astruc, Neil Cracknell, Peter Jones, Kay Lipson, Specialist Mathematics, 1994, 1st edition, Coghill Publishing Company, Malven 3144 Australia.

جواب سوالات تمرین فصل اول (حساب)

1	1211
2	37548
3	102171
4	708864841
5	9624494
6	72049335
7	26284
8	88199
9	23088
10	57487081
11	11385
12	179776
13	421994
14	3012110400
15	247480000000
16	262144
17	32768
18	117649
19	1
20	15
21	باقیمانده 2 و خارج قسمت 98
22	باقیمانده 5 و خارج قسمت 99
23	باقیمانده 0 و خارج قسمت 365
24	باقیمانده 2 و خارج قسمت 270
25	باقیمانده 0 و خارج قسمت 5595
26	باقیمانده 0 و خارج قسمت 2540
27	باقیمانده 12 و خارج قسمت 4
28	باقیمانده 544 و خارج قسمت 88
29	باقیمانده 227 و خارج قسمت 159
30	باقیمانده 940 و خارج قسمت 1076
31	27
32	67
33	68
34	44
35	40
36	140
37	32
38	122
39	40
40	15
41	2520
42	104
43	51
44	236
45	45
46	505
47	59
48	2128
49	1795
50	9996
51	به اعداد 2، 3 و 6 پوره تقسیم می‌گردد.
52	به اعداد 3 و 5 پوره تقسیم می‌گردد.
53	به اعداد 3، 5 و 7 پوره تقسیم می‌گردد.
54	اعداد 2، 3، 4، 6، 7، 8، 11 و 12 پوره تقسیم می‌گردد.
55	به اعداد 2، 3، 4، 5، 6، 7، 10، 11 و 12 پوره تقسیم می‌گردد.
56	$2^2 \cdot 3 \cdot 37$
57	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$

58	$2^4 \cdot 3 \cdot 7^2$
59	$2^4 \cdot 3 \cdot 11$
60	$5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2$
61	5
62	10
63	21
64	12
65	24
66	150
67	120
68	168
69	12600
70	96
71	کسر غیر واقعی
72	کسر واقعی
73	کسر غیر واقعی
74	کسر واقعی
75	کسر واقعی
76	$2\frac{1}{4}$
77	$2\frac{9}{13}$
78	$2\frac{9}{41}$
79	$5\frac{3}{8}$
80	$6\frac{3}{12}$
81	$\frac{38}{5}$
82	$\frac{148}{15}$
83	$\frac{138}{17}$
84	$\frac{202}{13}$
85	$\frac{671}{29}$
86	$\frac{10}{16}, \frac{15}{24}, \frac{20}{32}$
87	$\frac{18}{8}, \frac{36}{16}, \frac{45}{20}$
88	$\frac{9}{15}, \frac{6}{10}, \frac{21}{35}$
89	$\frac{16}{22}, \frac{24}{33}, \frac{40}{55}$
90	$\frac{26}{18}, \frac{39}{27}, \frac{65}{45}$
91	$\frac{1}{15}$

92	$\frac{1}{5}$
93	$\frac{7}{3}$
94	$\frac{28}{35}$
95	$\frac{13}{12}$
96	$\frac{16}{20}, \frac{12}{20}$
97	$\frac{40}{60}, \frac{15}{60}, \frac{36}{60}$
98	$\frac{18}{36}, \frac{24}{36}, \frac{42}{36}$
99	$\frac{24}{60}, \frac{45}{60}, \frac{20}{60}$
100	$\frac{50}{30}, \frac{54}{30}, \frac{75}{30}$
101	$\frac{72}{324}, \frac{540}{324}, \frac{189}{324}$
102	$\frac{7}{5} > \frac{3}{5}$
103	$\frac{5}{8} < \frac{13}{8}$
104	$\frac{5}{3} > \frac{5}{11}$
105	$\frac{17}{8} < \frac{17}{5}$
106	$\frac{2}{3} < \frac{7}{4}$
107	$\frac{11}{12} < \frac{15}{13}$
108	$\frac{8}{5} > \frac{14}{9}$
109	$\frac{9}{11} < \frac{35}{23}$
110	$\frac{33}{7}$
111	$\frac{59}{7}$
112	$\frac{25}{3}$
113	$\frac{33}{5}$
114	$\frac{34}{5}$

کلید جوابات ۴۸۸ پیشتاز ریاضی

115	$\frac{16}{3}$
116	$\frac{34}{3}$
117	$\frac{19}{4}$
118	$\frac{107}{8}$
119	5
120	6
121	$\frac{3}{11}$
122	$\frac{11}{20}$
123	$\frac{103}{20}$
124	$\frac{41}{12}$
125	3
126	$\frac{28}{15}$
127	$\frac{92}{15}$
128	$\frac{87}{20}$
129	$\frac{491}{110}$
130	$\frac{12}{7}$
131	$\frac{7}{15}$
132	$\frac{1}{4}$
133	$\frac{391}{20}$
134	12
135	$\frac{35}{12}$
136	26
137	10
138	6
139	$\frac{165}{7}$
140	$\frac{4}{5}$
141	$\frac{5}{2}$
142	$\frac{8}{15}$
143	$\frac{27}{20}$
144	$\frac{26}{15}$
145	6
146	$\frac{1}{3}$
147	$\frac{11}{6}$
148	$\frac{33}{8}$
149	$\frac{373}{20}$
150	$\frac{619}{105}$
151	$\frac{167}{30}$
152	$\frac{71}{42}$
153	$\frac{1525}{1638}$
154	$\frac{44}{69}$
155	$\frac{709}{562}$
156	3.64
157	7.43
158	6.431
159	8.142
160	25.5531
161	3.4458
162	35.5019
163	76.1677
164	1.26
165	100
166	70.6222
167	300.61255
168	0.0000008
169	0.0000399
170	0.368
171	11.68
172	6.255
173	587.5
174	17
175	2.15
176	141.6
177	99375
178	40.948
179	5.82
180	8.32
181	19
182	181.40
183	38.80
184	7.33
185	19.67
186	7.05
187	5.80
188	33.44
189	1324.74
190	0.96
191	13.451
192	5.883
193	172.225
194	71.44
195	12.585
196	0.437
197	2.216
198	18.001
199	2.4
200	4.25
201	97.5
202	4.375
203	$10.\overline{6}$
204	7.428
205	85.5
206	$4.\overline{09}$
207	$1.1\overline{3}$
208	9.041
209	140.235
210	$\frac{3}{10}$
211	$\frac{42}{100}$
212	$\frac{14}{10}$
213	$\frac{185}{10}$
214	$\frac{34}{10}$
215	$\frac{7002}{1000}$
216	$\frac{19125}{1000}$
217	$\frac{375}{100}$
218	$\frac{6}{9}$
219	$\frac{24}{99}$
220	$\frac{34}{99}$
221	$\frac{414}{999}$
222	$\frac{19}{9}$
223	$\frac{408}{99}$
224	$\frac{21}{9}$

225	$\frac{33}{9}$
226	$\frac{43}{90}$
227	$\frac{5865}{990}$
228	$\frac{14071}{9900}$
229	$\frac{41}{5}$
230	$\frac{967}{690}$
231	$\frac{37}{250}$
232	$\frac{1060}{3281}$
233	$\frac{2368}{39325}$
234	$\frac{21641}{17500}$
235	61
236	$\frac{5}{9}$ یا $\frac{9}{5}$
237	125cc
238	2400 افغانی
239	8 جلد کتابچه
240	140kg حصه اول و 100kg حصه دوم
241	1200 A حصه نفر
242	19000 نفع نفر دوم
243	46000 ضرر نفر اول
244	a) $x=\frac{15}{8}$ b) $x=4$ c) $x=24$ d) $x=\frac{4}{3}$
245	$x=\sqrt{\frac{8}{15}}$
246	$x=\sqrt{6}$
247	15000 اوسط فروشات
248	16 دانه قلم
249	12 نفر
250	25 روز
251	13.5 ساعت
252	12.5 روز
253	36 روز
254	359.375 دالر
255	250 دانه صابون
256	1560 افغانی
257	1344 افغانی
258	5000cc
259	25%

260	125000
261	10800
262	10.34%
263	24000
264	60000
265	22500
266	70000
267	3.75%
268	1 سال
269	30 سال
270	112000
271	2 سال
272	54073
273	33275
274	$A=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$
275	$B=\{x/x\in z^+, 0\le x\le 8\}$
276	$A=\{a,b,c,d,e\}$ $B=\{1,2,3,4,5\}$
277	$A=\{\square,\square,\Delta,O\}$ $B=\{O,\square,\Delta,\square\}$
278	a) $A=\{11,13,17,19\}$ b) $B=\{10,12,14,16,18,20\}$ c) $P=\{11,13,15,17,19\}$
279	$M=\{a\},N=\{b\},P=\{c\},Q\{a,b\},R=\{a,c\}$ $S=\{b,c\},T=\{a,b,c\},H=\{\quad\}$
280	32set
281	$C_A^B=B'=\{2,3,4,d\}$
282	$A\cup B=\{2,3,5,7,9\}$
283	$M\cup B=\{1,2,3,5\}$
284	$B\cup B=\{5,8,9\}, B\cup\phi=\{5,8,9\}$
285	$B\cup A=\{1,3,5,7\}$
286	$A\cup(B\cup C)=\{2,5,8,10\}$
287	$A\cap B=\{11\}$
288	$A\cap\phi=\{a,b,m,k\}, A\cap A=\{a,b,m,k\}$
289	1) $A\cup(B\cup C)=\{1,2,3,4,5,8,9\}$ 2) $(A\cup B)\cup C=\{1,2,3,4,5,8,9\}$ 3) $A\cup(B\cap C)=\{1,2,3,4,5,8,9\}$ 4) $(A\cup B)\cap C=\{1,2,3,4,5\}$ 5) $A\cap(B\cap C)=\{5\}$ 6) $(A\cap B)\cup C=\{1,2,3,4,5,8\}$ 7) $(A\cap B)\cap C=\{5\}$
290	$A\setminus B=\{b,m\}, B\setminus A=\{5,8\}$

جواب سوالات تمرین فصل دوم (الجبر)

1	+85
2	-43
3	+15.75
4	-4.9
5	-0,56
6	-77
7	+8.953
8	$-\frac{117}{56}$
9	-4.32
10	$-\frac{1621}{140}$
11	-11.932
12	+53.293
13	$-\frac{13}{12}$
14	$-\infty$
15	$+\frac{23}{90}$
16	$-\frac{61}{18}$
17	$+\frac{175}{1456}$
18	$-\frac{2}{9}$
19	+14.514
20	+1.72
21	$3.2\cdot 10^{7}$
22	$7,453\cdot 10^{11}$
23	$4,32\cdot 10^{14}$
24	10^{18}
25	$5\cdot 10^{9}$
26	$6,9\cdot 10^{8}$
27	$\approx 4,965\cdot 10^{13}$
28	$4,923\cdot 10^{11}$
29	$5,67462\cdot 10^{7}$
30	$\approx 3,566\cdot 10^{11}$
31	$4\cdot 10^{-4}$
32	$8,5\cdot 10^{-5}$
33	$1,83\cdot 10^{-8}$
34	$6,1492\cdot 10^{-10}$
35	$7,626\cdot 10^{-7}$
36	256
37	2861
38	3021
39	4002
40	3201
41	1470
42	3400
43	8 66

44	2,828
45	19,261
46	75,458
47	67,683
48	8656,536
49	621,3
50	43,241
51	1,884
52	0,286
53	0,03084….
54	23,65
55	21,354
56	75,6389…
57	0,917
58	0,0906
59	-2
60	+5
61	+8
62	$-\frac{5}{8}$
63	$-\sqrt{2}$
64	+3,52
65	F
66	A
67	C_2
68	B
69	C
70	E
71	D
72	مونوم
73	ترینوم
74	مونوم
75	بینوم
76	ترینوم
77	بینوم
78	مونوم
79	مونوم
80	بینوم
81	ترینوم
82	درجه چهار
83	درجه چهار
84	درجه دوازده
85	درجه هفت
86	درجا شانزده
87	درجه دوم
88	درجه سه
89	درجه دو
90	درجه پنج
91	درجه پنج
92	درجه سه
93	نظر به x و y درجه ده، نظر به y درجه دوازده، نظر به x درجه سیزده
94	نظر به a و b درجه چهار، نظر به b درجه چهار، نظر به a درجه سه
95	ترتیب صعودی $8+5x-2x^2$، ترتیب نزولی $-2x^2+5x+8$
96	ترتیب صعودی $a-2a^2-7a^3-a^5+2a^5$، ترتیب نزولی $2a^5-a^4-7a^3-2a^2+a$
97	ترتیب صعودی $-2-2x+\frac{3}{5}x^2+x^3$، ترتیب نزولی $x^3+\frac{3}{5}x^2-2x-2$
98	ترتیب صعودی $\frac{3}{5}+8y+5y^2-y^3+2y^4$، ترتیب نزولی $2y^4-y^3+5y^2+8y+\frac{3}{5}$
99	ترتیب صعودی $8-5m+2m^2+m^3$، ترتیب نزولی m^3+2m^2-5m+8
100	$3x^3+0.x^2-5x+1$
101	$8a^3+5a^2+0.a-12$
102	$y^5+0.y^4+8y^4+8y^2+0.y-7$
103	$a^4+0.a^3+0.a^2-2a+9$
104	$m^4+0\cdot m^3+0\cdot m^2+0\cdot m-16$
105	-1
106	-742
107	-133
108	13,458
109	$\frac{19}{8}$
110	-9
111	$-\frac{47}{36}$
112	3
113	3
114	$\sqrt{\frac{28}{17}}$
115	$(2x)^{10}=1024x^{10}$
116	$\frac{1}{a^{12}m^{24}}$
117	$\frac{1}{-3125y^{15}z^5}$
118	$20736x^{12}y^{16}$
119	$\frac{1}{1889568a^5b^5c^5}$
120	$(2x)^6=64x^6$
121	$x^{60}y^{90}$
122	$-128a^{14}b^{21}$
123	$-512a^9x^9$
124	$(8)^8m^{16}$
125	a^8z^8
126	$(-\frac{3}{2y})^{15}$
127	1
128	$(\frac{5y}{2x})^{22}$
129	+1
130	30y
131	$-22xz^2$
132	$-8a^2x^4$
133	$4ab^2$
134	$5a-3b$
135	$-6a^2+b^3+2c$
136	$7x^3-5x^2-4x+2$
137	$A+2B=-2x^2y^3-3x^2y^2-2xy^2+2xy-5$ $3B+3C=-51xy^2+3x^2y^2+15x^2y^3+21xy-12$ $A+B+C=3x^2y^3-9xy^2-4x^2y^2+9xy-1$ $2A+C=x^2y^2+4xy^2-10x^2y^2+8xy+3$
138	$+2xy^2$
139	$-8am^2$
140	$5ab^2c$
141	$10a+6b$
142	$A-B=-x^3+2x^2+3x-2$ $B-A=x^3-2x^2-3x+2$
143	$A-B-C=-7y^2-10y+8$ $2A-3B=-8y^2-22y-13$ $5B-2C=-6y^2+10y+65$ $3B-2A-3C=-11y^2+16y+43$
144	$-40x^3y^5$
145	$3a^5b^4$
146	$3a^4m^5$
147	$-6ax^2y^3+4a^3y^3$
148	$-\frac{12}{5}x^8-2x^5y+x^3y^3$
149	$6x^2-13xy-5y^2$
150	$2a^3-5a^2b+4ab^2-b^3$
151	$6e^{3x}-3e^{3x+1}-3e^{2x}-2e^x+e^{x+1}+1$
152	$x^2-4y+y^2+2x-4y+1$
153	$2a^2-5ab-a-2b^2+3b-1$
154	$+5xy$
155	$-5a^2b^2x^2$
156	$-\frac{24}{25}xz$
157	$-6a+\frac{5}{2}b$
158	$-2x^2-\frac{7}{2}x+2$
159	$2x^2-1$
160	$3y^2+5$
161	$3x-4$
162	$2y-3$
163	x^2-3
164	16

165	-16
166	-95
167	226
168	0
169	$8x^2+16x+30$
170	$9a^2+22a+67$
171	$y+14$
172	$m^4+2m^3+4m^2+8m-16$
173	x^2+2x+2
174	$-3x^2+11x-7$
175	$-3a^4-27a^3+8a^2-5$
176	$5a^2b+4a^3b-22a^2b+6a^2b^2+12ab^2$
177	$-x^4+7x^3-13x^2-35x-4$
178	x^2-6x+9
179	$25a^2+20ab+4b^2$
180	$a^3+9a^2b+27ab^2+27b^3$
181	$27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$
182	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
183	$64m^6-196m^5+240m^4-160m^3+60m^2-12m+1$
184	$m^5-10m^4n+40m^3n^2-80m^2n^3+80mn^4+32n^5$
185	$-15360xy^7$
186	$90720a^4b^4$
187	$(x-2)(x^2+2x+4)$
188	$(8m-5\sqrt{5})(8m+5\sqrt{5})$
189	$(y^2-4)(y^2+4)$ انکشاف اول $(y-2)(y^3+2y^2+4y+16)$ انکشاف دوم
190	$(2n-1)(16n^4+8n^3+4n^2+2n+1)$
191	$(a-2b)(a^5+2a^4b+4a^3b^2+8a^2b^3$ $+16ab^4+32b^5)$
192	$(2x+6)(x^2+3x+9)$
193	$(2y+1)(16y^4-8y^3+4y^2+2y-1)$
194	$(ax+2y)(a^6x^6-2a^5x^5y+4a^4x^4y^2$ $-8a^3x^3y^3+16a^2x^2y^4-32axy^5+64y^6)$
195	$(x+1+\sqrt{2x})(x+1-\sqrt{2x})$
196	$(a^2+b^2+2\sqrt{2}ab)(a^2+b^2-2\sqrt{2}ab)$
197	$(9x^2+25+15\sqrt{2}x)(9x^2+25-15\sqrt{2}x)$
198	$2a(m+4n)$
199	$x(5x+y-8)$
200	$5y(2y^2+4y-1)$
201	$xy^2(3-5x+8x^2y+2y^3)$
202	$x(x-y)(x+y)$
203	$(m-n^2)(m^3+m^2n^2+mn^4+n^6)$
204	$(\frac{2}{5}m-\frac{1}{9})(\frac{2}{5}m+\frac{1}{9})$
205	$(2x-y^2-1)(2x+y^2-1)$

206	$(-a-3b)(3a-b)$
207	$(m^e-1)(m^e+1)$
208	$(ax^3-y^{ax})(ax^3+y^{ax})$
209	$(a-6)(a-6)$
210	$(m+5)(m+5)$
211	$(2x-1)(2x-1)$
212	$(6y-2z)(6y-2z)$
213	$(a^2+b^2)(a^2+b^2)$
214	$(x+y+z)(x+y-z)$
215	$(a+b-c+1)(a+b+c-1)$
216	$(x-1)(ax+b)$
217	$(x-z+1)(x+y)$
218	$(z-1)(x-2y)$
219	$(a-b)(a+x-1)$
220	$(y+1)(y^2+2y+1)$
221	$(x+6)(x+2)$
222	$(y-8)(y-2)$
223	$(a-4)(a-3)$
224	$(m^2+3n^2)(m^2+5n^2)$
225	$(x+2)(x+6)$
226	$(m-3)(m+7)$
227	$(m-3)(m+7)$
228	$(x+9)(x-4)$
229	$(2x-1)(x+2)$
230	$(2y-5)(y+1)$
231	$(7m+2)(2m+1)$
232	$(2x-3)(3x-4)$
233	$(x+3-\sqrt{8})(x+3+\sqrt{8})$
234	$(y-5-\sqrt{26})(y-5+\sqrt{26})$
235	$(2m-4-\sqrt{10})(m-2+\sqrt{\frac{5}{2}})$
236	$(3P-\frac{5+\sqrt{13}}{2})(P-\frac{5-\sqrt{13}}{6})$
237	$(4x-1-\sqrt{11})(2x-\frac{1-\sqrt{11}}{2})$
238	$12m^3n^2$
239	$50x^3y^4$
240	$240a^3b^3$
241	$(a+b)^2$
242	$(a-b)^2$
243	$(x+y)^2(x-y)$
244	$mn(m^2-n^2)$
245	$(a-b)(a^3-b^3)$
246	$(x-2)(x+1)(x+5)(2x-1)$

247	$(y-1)^2(y+2)(y^2+y+1)$
248	$(a-b)$
249	$(a-1)$
250	$(y+7)$
251	$\frac{a^2+am+m^2}{a+m}$
252	$\frac{y+1}{y+2}$
253	$-\frac{3x-1}{y}$
254	$\frac{P-15}{P+2}$
255	$\frac{3ab}{4y^2}$
256	$\frac{2x-2}{(y-1)(x+1)}$
257	$\frac{1}{x}$
258	1
259	$\frac{x}{y}-y$
260	$\frac{1}{2mn}$
261	$\frac{x}{x-7}$
262	$(a-b)^2$
263	$\frac{x^2+2xy+y^2}{x}$
264	1
265	$\frac{9a^2-4b^2}{16a^3b^2}$
266	4
267	$\frac{3a^2+2ab+3b^2}{2(a^2+b^2)}$
268	-1
269	0
270	$\frac{y^2+2xy-x^2}{xy}$
271	$\frac{-m^2+2mn+3m+2y+1}{mn}$
272	$\frac{7x^2+6x}{1-x^2}$
273	$\frac{3-7a+7b}{a^2-b^2}$
274	$\frac{y^2-2}{(y+1)^2}$

275	$\frac{4x^2-1}{x^3-2x^2-9x+8}$
276	$\frac{6}{2-3x}$
277	$\frac{1}{4}$
278	-1
279	$\frac{a-1}{a}$
280	-1
281	$\frac{a^2b+1}{2b-3a}$
282	$\frac{x^3+x^2-x-1}{2x^2-x}$
283	$\frac{2a^4-2a^3-a^2-2a-3}{3a^5-3a^4-2a^3+3a^2-a}$
284	$\frac{a^2b+a+2ab^2+2b}{a^2b+a-b}$
285	$\sqrt[5]{8a^3}$
286	$\sqrt{3x^2y}$
287	$\sqrt[11]{(\frac{2}{5}am^3)^9}$
288	$\sqrt{216x^6y^9z^3}$
289	$(2x)^{\frac{1}{3}}$
290	$(3a^2)^{\frac{2}{5}}$
291	$(a+2b)^{\frac{4}{7}}$
292	$(xy^2)^{\frac{7}{4}}$
293	$(am)^{\frac{1}{2}}$
294	$\sqrt[6]{8x^3}$
295	$\sqrt[12]{m^8}$, $\sqrt[12]{m^9}$
296	$\sqrt[15]{(a-b)^9}$, $\sqrt[15]{(a+b)^{10}}$
297	$\sqrt[10]{(3xy)^5}$, $\sqrt[10]{(mx^2)^2}$
298	$\sqrt[84]{x^{36}y^{12}}$, $\sqrt[84]{x^{54}y^{30}}$
299	$\sqrt{23}<\sqrt{75}$
300	$\sqrt[3]{81}<\sqrt[3]{125}$
301	$\sqrt[4]{3}<\sqrt[4]{7}$
302	$\sqrt[2]{2}=\sqrt[4]{4}$
303	$\sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{2}$
304	$\sqrt[4]{2}<\sqrt[5]{3}$
305	$\sqrt[3]{x^2}>\sqrt{x}$

306	$\sqrt[5]{2y}<\sqrt[3]{3y^2}$
307	$\sqrt{3m}<\sqrt[3]{4m^2}$
308	$\sqrt[7]{2x^5}<\sqrt[4]{2x^3}$
309	$\sqrt[3]{2xy}$
310	$\sqrt[9]{mx}$
311	$\sqrt[8]{8}yz^2\sqrt{x}$
312	$\sqrt[5]{x^3}$
313	$\sqrt[6]{32y^5}$
314	$\sqrt{15xy}$
315	$\sqrt[3]{30m^6}$
316	$x-y$
317	$(a+1)^2$
318	1
319	$\sqrt[6]{108x^2y^3}$
320	$\sqrt[15]{x^9y^{10}}$
321	$\sqrt[8]{32x^5y^4}$
322	$(x-1)\sqrt[15]{(x-1)^4}$
323	$(a+b)\sqrt[24]{(a+b)^{19}}$
324	5
325	$2x\cdot\sqrt[12]{3x^2}$
326	$2xy^2$
327	$18\sqrt{y}$
328	$\sqrt[12]{\frac{x^5}{y^5}}$
329	$\sqrt[21]{\frac{8}{a^{11}b}}$
330	$\sqrt[10]{x+y}$
331	$8x\sqrt{2x}$
332	$2xy\sqrt[3]{2y^2}$
333	$5m\sqrt[3]{2m}$
334	$3abc^2\sqrt[4]{2a}$
335	$2x^2y^2\sqrt[5]{xy^2}$
336	$2x^2y^3\sqrt[4]{3x^2y}$
337	$\sqrt{45}$
338	$\sqrt{98}$
339	$\sqrt[3]{40}$
340	$\sqrt[3]{54x^5}$
341	$\sqrt[4]{243a^7b^9}$
342	$\sqrt[3]{2y^8}$

343	$6\sqrt{2}$
344	$5\sqrt[3]{5}$
345	$18x\sqrt[4]{3x}$
346	0
347	$20\sqrt{m}$
348	$(16x-1)\sqrt[3]{5x}$
349	$A+B=11\sqrt{2}-\sqrt{5}$, $A-B=5\sqrt{5}-5\sqrt{2}$
350	$A+B=10x+4\sqrt{2x}+6$, $A-B-4x-6\sqrt{2x}-4$
351	$A+B=5x\sqrt{2y}+3\sqrt{3x}$, $A-B=-x\sqrt{2y}-9\sqrt{3x}$
352	$4\sqrt{2}+9$
353	a^2+b
354	$x-y$
355	$\sqrt{x}-\sqrt{y}$
356	$m+n+\sqrt{mn}-n\sqrt{m}-n\sqrt{n}-\sqrt{m}$
357	$\sqrt{3}-\frac{5\sqrt{2}}{2}$
358	$6\sqrt{15}+6\sqrt{5}$
359	$\sqrt{42}-\sqrt{35}+\sqrt{6}-\sqrt{5}$
360	$\frac{3x\sqrt{x}-2}{2}$
361	$y\sqrt{x}+y$
362	$(m^2+mn+n^2)(\sqrt{m}+\sqrt{n})$
363	11i
364	11i
365	-16
366	1i
367	-35
368	5i
369	$\frac{8}{25}$
370	-0,3i
371	8+i
372	$\frac{17}{3}i+4$
373	6i – 11
374	12,5 - 0,8i
375	24i + 6
376	60 + 35i
377	-14i + 22
378	-5
379	3,5 + 2,5i
380	2,4 – i
381	-4,5i – 4
382	1,6 – 1,8i

جواب سوالات تمرین فصل سوم (معادلات)

1	$x=\frac{4}{3}$
2	$y=-3$
3	$a=-\frac{20}{3}$
4	$x=\frac{12}{31}$
5	$m=\frac{7}{8}$
6	$x=1$
7	$x=\frac{23}{13}$
8	$m=5$
9	$x=-38$
10	$x=-\frac{16}{25}$
11	$x=\frac{7}{2}$
12	$P=\frac{31}{29}$
13	$x_1=-2\,, x_2=-8$
14	$x_1=3\,, x_2=-2$
15	$x_1=\frac{5}{32}\,, x_2=\frac{1}{32}$
16	$x_1=2\,, x_2=-\frac{10}{3}$
17	$x=\frac{1}{10}$
18	$x=\frac{5}{13}$
19	$y=-\frac{3}{50}$
20	$x=\frac{15}{13}$
21	$x=\frac{9}{4}$
22	$a=\frac{9}{7}$
23	هیچ حل ندارد.
24	$m=-\frac{39}{2}$
25	$y=-9$
26	$x=18$
27	$x=25$

28	$m=\frac{11}{3}$
29	$x=64$
30	$y=\frac{1}{12}$
31	$m=243$
32	$x=7$
33	$x=\frac{134}{13}$
34	$x=1$
35	$y=14$
36	$a=\frac{b+c}{2}$
37	$y=\frac{6-3x}{2}$
38	$x=\frac{1}{m-2n}$
39	$y=\sqrt{\frac{3p}{2x}}$
40	$F=\frac{ab}{a+b}$
41	$d=\frac{2S-2an}{n^2-n}$
42	$r=\sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$
43	$n=\frac{A+360}{180}$
44	$h=\frac{y+4}{10}$
45	$n=\sqrt[r-1]{\frac{l}{m}}$
46	$y=\frac{8cd}{c-5}$
47	$b=-\frac{3c}{2m-3n}$
48	$x=3,\ y=\frac{1}{2}$
49	$n=1, m=2$
50	$x=8,\ y=-2$
51	$a=b=2$
52	$x=\frac{7}{27},\ y=\frac{-7}{3}$
53	$x=a+b,\ y=a-b$
54	$x=2,\ y=3$
55	$x=1,\ y=7$
56	$a=-6, b=-16$

57	$n=\frac{2}{3}, m=\frac{7}{3}$
58	$a=15, d=12$
59	$x=-1,\ y=-7$
60	$x=3, y=1$
61	$x=1,\ y=1$
62	$x=2,\ y=1$
63	$m=5, n=2$
64	$a=\frac{233}{48}, b=-\frac{169}{144}$
65	$m=\frac{13}{12}, n=\frac{29}{36}$
66	ناحیه اول
67	ناحیه دوم
68	ناحیه سوم
69	ناحیه چهارم
70	ناحیه چهارم
71	روی محور x به طرف چپ مبدأ
72	روی محور y به طرف پائین مبدأ
73	مبدأ کمیات وضعیه قایم
74	ناحیه دوم
75	ناحیه چهارم
76	y, x, 0, 2, −2, $y-x=-2$
77	y, x, 1, 0, 0.5, $2x+y-1=0$
78	y, x, 3.5, 1.6, 0, $2y-6x=7$

79	$3x-y=-2$; y ; x ; 2 ; -0.6 ; 0
80	$y=\frac{x+2}{3}$; y ; x ; 0.6 ; -2 ; 0
81	$5y-10=3x$; y ; x ; 2 ; -3.3 ; 0
82	$x=3,\ y=2$
83	$x=5,\ y=2$
84	$x=1,\ y=2$
85	هیچ حل ندارد.
86	$x=1,\ y=-1,\ z=-1$
87	$x=-4,\ y=-1,\ z=7$
88	$x=\frac{1}{2},\ y=1,\ z=-\frac{1}{5}$
89	$x=\frac{47}{39},\ y=-\frac{37}{39},\ z=\frac{97}{117}$
90	$A+B=\begin{pmatrix}11\\3\end{pmatrix},\ A-B=\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$
91	$A+B=\begin{pmatrix}5&13\\-4&9\end{pmatrix},\quad A-B=\begin{pmatrix}-1&-3\\2&-1\end{pmatrix},\quad B-A=\begin{pmatrix}1&3\\-2&1\end{pmatrix}$
92	$A+B=\begin{pmatrix}-5&0\\7&-2\\-1&5\end{pmatrix},\ A-B=\begin{pmatrix}-11&-8\\3&2\\-1&1\end{pmatrix}$
93	$A+B+C=\begin{pmatrix}13&9&4\\0&9&4\\-4&-2&-8\end{pmatrix},$
	$A-B-C=\begin{pmatrix}5&3&4\\4&-1&6\\-10&-2&-2\end{pmatrix},$
	$A-B-C=\begin{pmatrix}1&-7&6\\4&-1&2\\4&2&-2\end{pmatrix}$
94	$M+N=\begin{pmatrix}-2&8&5&6\\2&-6&1&6\end{pmatrix},$
	$M-N=\begin{pmatrix}8&-4&5&-8\\6&4&-1&0\end{pmatrix},$
	$N-M=\begin{pmatrix}-8&4&-5&8\\-6&-4&1&0\end{pmatrix}$
95	$K\cdot A=\begin{pmatrix}10&25\\-5&20\end{pmatrix}$
96	$K\cdot M=\begin{pmatrix}-\frac{9}{5}&-3&\frac{3}{5}\\-\frac{9}{5}&3&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$
97	$K(A+B)=\begin{pmatrix}4&-32\\-16&-16\\-24&0\end{pmatrix},$
	$K(A-B)=\begin{pmatrix}-28&-8\\-24&24\\-8&-24\end{pmatrix}$
98	$A\cdot B=\begin{pmatrix}32\\0\end{pmatrix}$
99	$A\cdot B=\begin{pmatrix}10&3\\12&11\end{pmatrix}$
100	$A\cdot B=\begin{pmatrix}17&48&31\\6&26&13\end{pmatrix}$
101	$A^T=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}$
102	$B^T=\begin{pmatrix}-5&3&4\end{pmatrix}$
103	$M^T=\begin{pmatrix}4&5\\2&-1\end{pmatrix}$
104	$N^T=\begin{pmatrix}6&5\\4&-1\\1&0\\2&3\end{pmatrix}$
105	$K\cdot A^T=\begin{pmatrix}10&-2\\6&8\\12&4\end{pmatrix}$
106	$A^T+B^T=\begin{pmatrix}5&2\\2&-4\end{pmatrix}$
107	$(A-B)^T=\begin{pmatrix}5&-4\\6&6\end{pmatrix}$
108	$\lvert A\rvert=-22$
109	$\lvert B\rvert=16$
110	$\lvert C\rvert=-2$
111	$\lvert M\rvert=\frac{19}{3}$
112	$\lvert P\rvert=-\frac{23}{8}$
113	$\lvert A\rvert=11$
114	$\lvert B\rvert=-22$
115	$\lvert A\rvert=-26$
116	$\lvert B\rvert=-34$
117	$\lvert M\rvert=18$
118	$\lvert N\rvert=0$
119	$Adj\ A=\begin{pmatrix}L&-P\\T&m\end{pmatrix}$
120	$Adj\ A=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$
121	$Adj\ B=\begin{pmatrix}-43&-51\\-32&-41\end{pmatrix}$
122	$Adj\ B=\begin{pmatrix}15&-3\\-5&-2\end{pmatrix}$
123	$Adj\ C=\begin{pmatrix}0&-5\\-1&2\end{pmatrix}$
124	$Adj\ D=\begin{pmatrix}-5&1\\-3&4\end{pmatrix}$
125	$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3\\3&-5\end{pmatrix}$
126	$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}\\-1&2\end{pmatrix}$

شماره	جواب
127	$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & \frac{3}{2}\\ 3 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$
128	$M^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}$
129	$x=3,\ y=2$
130	$x=-15,\ y=9$
131	$x=1,\ y=4$
132	$x=\frac{11}{4},\ y=\frac{3}{4}$
133	$x=1,\ y=2$
134	$x=2,\ y=1$
135	$x=2,\ y=-2$
136	$x=\frac{1}{2},\ y=3$
137	$x=7,\ y=0$
138	$x=2,\ y=1,\ z=3$
139	$x=-\frac{1}{2},\ y=-2,\ z=3$
140	$x=4,\ y=-2,\ z=0$
141	$x=47,\ y=27,\ z=-43$
142	$x=y=1$
143	$x=2,\ y=1$
144	$x=\frac{8}{25},\ y=\frac{31}{25}$
145	$x=\frac{25}{8},\ y=-\frac{15}{4}$
146	$x=\frac{1}{9},\ y=\frac{35}{9},\ z=-\frac{17}{9}$
147	$x=4,\ y=-2,\ z=0$
148	$x=+3,\ y=-\frac{15}{11},\ z=1$
149	حل ندارد
150	6 = عدد کوچک، 8 = عدد بزرگ
151	3 = عدد کوچک، 15 = عدد بزرگ
152	28 = عدد
153	8, 9, 10
154	21, 23
155	62, 64, 66
156	9
157	13
158	8 سال بعد
159	6= عمر پسر و 24 = عمر پدر
160	25cm = طول هر ضلع
161	10m = عرض و 20m = طول
162	60 = تانک دوم و 36 = تانک اول

شماره	جواب
163	$3{,}5h$ = زمان حرکت به بایسکل و $1{,}5h$ = زمان حرکت به پیاده
164	3 عدد = قلم سرخ، 9 عدد = قلم آبی
165	$A=35,\ B=72,\ C=81$
166	$x=3$
167	$x=0$
168	$x=\frac{3}{2}$
169	$x=\frac{1}{3}$
170	$x=-\frac{1}{6}$
171	$x=\frac{7}{8}$
172	$y=2$
173	$m=0$
174	$x=5$
175	$x=3$
176	$m=5$
177	$x=2$
178	$x_1=0,\ x_2=2$
179	$x=3$
180	$x=-1,\ y=1$
181	$x=-\frac{3}{4},\ y=\frac{7}{4}$
182	$\frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}$
183	$\frac{5}{x-1}+\frac{2}{x+1}$
184	$\frac{2}{x-1}-\frac{7}{x+5}$
185	$\frac{-14}{39x+13}-\frac{17}{13x-52}$
186	$\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+2}$
187	$\frac{-52x-15}{25x^2+25}-\frac{1}{x+5}$
188	$\frac{2}{x}+\frac{1-x}{x^2+5}$
189	$\frac{3}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}$
190	$\frac{1}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{5}{(x+1)^3}$
191	$x+1+\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+1}$
192	به قیمت‌های $2 > x$ اشاره منفی، به قیمت‌های $x > 2$ اشاره مثبت

شماره	جواب
193	به قیمت‌های $x > 5$ اشاره منفی، به قیمت‌های $5 > x$ اشاره مثبت
194	به قیمت‌های $\sqrt{3} > x$ اشاره منفی، به قیمت‌های $x > \sqrt{3}$ اشاره مثبت
195	به قیمت‌های $x > 3$ اشاره مثبت، به قیمت‌های $3 > x$ اشاره منفی
196	$\frac{5}{2}<x<4$
197	$x>\frac{1}{4},\ x<-\frac{4}{5}$
198	$x>3$
199	$x>\frac{7}{2}$
200	$x<-5,\ \frac{1}{2}<x<1,\ x>4$
201	$x>3,\ -4<x<-\frac{2}{3}$
202	$x<-\frac{9}{5}$
203	$x\geq 1$
204	$x\geq 10$
205	$x>-2$
206	$-2<x<3$
207	$x<-\frac{5}{3},\ x>1$
208	$x<3$
209	$x<-\frac{9}{2}$
210	$x<\frac{9}{2}$
211	$-\frac{1}{3}<x<0$
212	$-\frac{3}{2}<x<\frac{13}{2}$
213	$x<-\frac{6}{5},\ x>4$
214	$-4<x<-2,\ -8<x<-6$
215	$x<-1$
216	$x>\frac{1}{2}$
217	y, x, 0, 4, −3

218	
219	
220	
221	
222	
223	$x=\pm 3$
224	$x=\pm 2$
225	$y=\pm\frac{1}{2}$
226	جذر حقیقی ندارد.
227	$x_1=0,\ x_2=-\frac{5}{3}$

228	$x_1=0,\ x_2=\frac{2\sqrt{2}}{3}$
229	$m_1=0,\ m_2=-2$
230	$a=\pm 5$
231	$y_1=0,\ y_2=-\frac{5}{4}$
232	$P_1=0,\ P_2=\frac{1}{10}$
233	$x_1=-2,\ x_2=-1$
234	$m_1=6,\ m_2=2$
235	$P_1=-5,\ P_2=+6$
236	$y_1=-3,\ y_2=+2$
237	$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=4$
238	$x_1=-\frac{1}{3},\ x_2=-1$
239	$x_1=-1,\ x_2=-\frac{5}{2}$
240	$y_1=y_2=7$
241	$x_1=-1{,}45,\ x_2=3{,}45$
242	$a_1=\frac{-5+3\sqrt{3}}{2},\ a_2=\frac{-5-3\sqrt{3}}{2}$
243	$x_1=4,\ x_2=-9$
244	$y_1=2,\ y_2=-3$
245	$x_1=-4+4\sqrt{2},\ x_2=-4-4\sqrt{2}$
246	$m_1=m_2=1$
247	$y_1=-\frac{3}{2},\ y_2=1$
248	$x_1=-\frac{5}{3},\ x_2=1$
249	$a_1=a_2=-\frac{1}{3}$
250	جذر حقیقی ندارد.
251	$x_1=0,\ x_2=-2$
252	$x=\pm\sqrt{2}$
253	$x_1=-\frac{1-i}{2},\ x_2=-\frac{1+i}{2}$
254	$x_1=1-2i,\ x_2=1+2i$
255	$x_1=-1+7i,\ x_2=-1-7i$
256	$x_1=5i,\ x_2=2i$
257	$x_1=0,\ x_2=\sqrt{5}i$
258	قطع نمی‌کند.
259	قطع نمی‌کند.
260	در یک نقطه مماس است.

261	در یک نقطه مماس است.
262	در دو نقطه قطع می‌نمائید.
263	در دو نقطه قطع می‌کند.
264	$P_1(-5,0),\ P_2(2,0)$
265	$P(5,0)$
266	$P(0,-2)$
267	تقاطع با محور x $P_1(-1,0), P_2(6,0)$ و تقاطع با محور y $P(0,-6)$
268	جذر حقیقی ندارد.
269	$x_1=0,\ x_2=+4$
270	جذر حقیقی ندارد.
271	$x_1=-\frac{3}{2},\ x_2=3$
272	$x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{8},\ x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{8}$
273	$x_1=0,\ x_2=3$
274	$x=1$
275	$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=7$
276	$x_1=-1,\ x_2=+1,\ x_3=-2$
277	$x=1$
278	$x=\pm 3,\ x=\pm 2$
279	$x=0,\ x=\pm 5$
280	$x_1=x_2=+1,\ x_3=x_4=-1$
281	جذر حقیقی ندارد.
282	دو جذر هم علامه منفی
283	دو جذر هم علامه منفی
284	دو جذر هم علامه منفی
285	دو جذر مختلف‌العلامه
286	دو جذر مختلف‌العلامه
287	دو جذرهم علامه مثبت
288	دو جذر هم‌علامه مثبت
289	دو جذر مختلف‌العلامه
290	دو جذر مختلف‌العلامه
291	جذر حقیقی ندارد.
292	جذر دوم اشاره مثبت، یک جذر بدون اشاره
293	یک جذر بدون اشاره و جذر دو اشاره مثبت
294	$3x^2-5x+28=0$
295	$x^2-4x-3=0$
296	$25x^2-9=0$
297	$x^2-11x-80=0$
298	$x^2-13x+40=0$
299	$x^2-10x-12=0$
300	$3x^2+5x-8=0$
301	$x^2+2x-1=0$

302	$x^2-3x-40=0$
303	$x_1+x_2=-\frac{5}{3}$
304	$x_1\cdot x_2=-\frac{7}{8}$
305	$x_1\cdot x_2=\frac{121}{25}$
306	-6
307	$\frac{17}{6}$
308	$\frac{1}{8}$
309	$-\frac{36}{7}$
310	50
311	$\frac{98}{3375}$
312	$x=7,\ y=2$
313	$x_1=2,\ x_2=3$
314	$m=6$
315	$k=\frac{1}{8}$
316	$P=-\frac{1}{2}$
317	$k=-1,\ k=\frac{2}{5}$
318	$m=\frac{22}{25}$
319	$k<0$
320	$m=\frac{25}{8}$
321	$m>-\frac{39}{8}$
322	$m<0,\ m>4$
323	$k>\frac{5}{14}$
324	$F=\frac{4}{3}$
325	$P=\frac{25}{22}$
326	به تمام قیمت‌های x
327	به هیچ قیمت x
328	$(-\infty,+\infty)-\left\{\frac{1}{3}\right\}$
329	$-5<x<2$
330	$x<-1,\ x>\frac{5}{2}$

331	$x<-5,\ x>5$
332	$(-10,-1)\cup(\frac{1}{5},3)$
333	به تمام قیمت‌های x $(-\infty,+\infty)$
334	به هیچ قیمت x
335	$x<1,\ x>\frac{3}{2}$
336	به هیچ قیمت x
337	$(-\infty,+\infty)-\left\{\frac{1}{4}\right\}$
338	به هیچ قیمت x
339	$x<-\frac{5}{3},\ x>\frac{3}{2}$
340	$-5<x<-2$
341	$x<-\frac{5}{2},\ x>3$
342	$x<-5,\ 0<x<1,\ x>5$
343	$(-\infty,-1)\cup(+1,+\infty)$
344	$(-2,2)\cup(3,6)$
345	$-\frac{1}{2}<x<+1$
346	$(-\infty,-4.8)\cup(-4,-1)\cup(-0.2,0.5)\cup(+1,+\infty)$

جواب سوالات تمرین فصل چهارم (تصاعد)

1	$a_5=0{,}6$
2	$a_4=1{,}5$
3	$a_7=-123$
4	$a_{15}=0{,}27$
5	$a_3=125$
6	$a_3=55$
7	$a_1=35, d=6$
8	$a_1=79,\ d=9$
9	$a_1=12,\ d=35$
10	$a_1=64,\ d=-5$
11	$a_1=107,\ d=-8$
12	$a_1=\frac{4}{9},\ d=\frac{1}{3}$
13	$a_1=35,\ d=-\frac{3}{5}$
14	$a_1=7m^3,\ d=-3$
15	$a_1=8x^2,\ d=3x^2$
16	$a_1=m-r,\ d=2r$
17	$5, 16, 21, 26, ...$
18	$48, \frac{242}{5}, \frac{244}{5}, \frac{246}{5}, ...$
19	$\frac{9}{5}, \frac{22}{10}, \frac{26}{10}, \frac{30}{10}, ...$
20	$-75, -78, -81, -84, ...$
21	$110, 106, 102, 98, 94, ...$
22	$3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, ...$
23	$m-5r, 2m-3r, 3m-r, ...$
24	$3x^2, 8x^2, 13x^2, 18x^2, ...$
25	$\frac{1}{2}, \frac{27}{22}, \frac{43}{22}, ...$
26	تصاعد حسابی است.
27	تصاعد حسابی است.
28	تصاعد حسابی است.
29	تصاعد حسابی است.
30	تصاعد حسابی نیست.
31	تصاعد حسابی است.
32	تصاعد حسابی نیست.
33	تصاعد حسابی است.
34	تصاعد حسابی است.
35	تصاعد حسابی است.
36	تصاعد حسابی نیست.
37	389
38	-190
39	$-37\sqrt{3}$

40	124m
41	198
42	$a_1 = 57$, $d = -8$
43	1235
44	جمله 31
45	$d = -11$
46	$a_1 = 7$
47	7, 12, 17, 22, 27, 32
48	35, 49, 63, 77, 91, 105, 119
49	81, 74, 67, 60, 53, 46, 39, 32, 25
50	19, 21.2, 23.4, 25.6, 27.8, 30
51	5P, 11P, 17P, 23P, 29P, 35P, 41P, 47P
52	119, 144, 169, 194, 219, $a_{32} = 894$
53	10
54	15
55	15
56	$\sum_{k=1}^{n} k$
57	$\sum_{k=1}^{n} 2k$
58	$\sum_{k=1}^{n} k^3$
59	$\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$
60	$\sum_{k=1}^{n} (k^2+1)$
61	100
62	156
63	192
64	970
65	-99
66	$S_n = 5457$
67	$S_{35} = 12250$
68	$S_{73} = 5256$
69	$S_{300} = 184500$
70	$n = 67$
71	$a_n = 360$
72	$S = 31375$
73	$S = 3663$
74	$S = 5256$
75	$S = 32580$
76	$S = 2378$
77	$S = 4692$
78	$S = 3600$
79	$S = 129600$
80	$S = 3721$
81	$S = 13433$
82	$S = 56\frac{1}{3}$
83	$a_n = -4$
84	$S = 583220$

85	$S = 25502500$
86	$S = 695520$
87	$S = 4495$
88	$S = 12497500$
89	$a_m = 9,1$
90	$a_m = 1,8$
91	$a_{11} = 118098$
92	$a_{16} = 163840$
93	$a_{10} = 390625$
94	$a_9 = 16384$
95	$a_8 = 4$
96	$a_7 = 279936$
97	$a_{10} = 10^{-6}$
98	$a_{35} = 7$
99	$a_{10} = 625\sqrt{5}$
100	$n = 7$
101	$n = 12$
102	$r = 2\sqrt[4]{4}$
103	$a_1 = 3000$
104	$a_1 = 5$
105	$r = 2$
106	$M = 6$
107	$M = 10$
108	7, 14, 28, 56, 112, 224, 448, 896
109	5, 15, 45, 135, 405, 1215
110	5, 10, 20, 40, 80, 160, 320
111	1000, 100, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$
112	$2m^3$, $10m^6$, $50m^9$, $250m^{12}$, $1250m^{15}$
113	$S_{10} = 8421$ 114- $S_{10} = 147620$
115	$S_8 = 195312,5$ 116- $S_7 = 10922$
117	$S_6 = 984,4$ 118- $S_7 = 364,3$
119	$S_8 = 11430$
120	$S_n = 22960$ 121- $S_n = 26855466$
122	$S_n = 781,25$ 123- $S_n = 3280$
124	$S_n = 1023,9$ 125- $S_n = 43680$
126	$S_\infty = \infty$ 127- $S_\infty = \infty$
128	$S_\infty = 13,5$ 129- $S_\infty = 16$
130	$a = \frac{5}{9}$, $b = \frac{7}{9}$, $c = \frac{2}{3}$, $d = \frac{1}{11}$, $e = \frac{55}{111}$, $f = \frac{7}{3}$, $g = \frac{5085}{99}$, $h = \frac{45004}{333}$
131	$a = \frac{113}{90}$, $b = \frac{527}{150}$, $c = \frac{7092}{495}$, $d = \frac{3218751}{9900}$, $e = \frac{679}{1500}$

جواب سوالات تمرین فصل پنجم (لوگارتم)

1	قاعده (3)، لوگارتم (243)
2	قاعده (5)، لوگارتم (1)
3	قاعده (7)، لوگارتم (7)
4	قاعده (4)، لوگارتم (64)
5	قاعده (9)، لوگارتم (81)
6	قاعده (10)، لوگارتم (1000)
7	قاعده (2)، لوگارتم $(\frac{1}{32})$
8	قاعده (6)، لوگارتم (216)
9	$\log_3 81 = 4$
10	$\log_5 125 = 3$
11	$\log_9 \frac{1}{81} = -2$
12	$\log_{10} 10000 = 4$
13	$\log_{15} 1 = 0$
14	$\log_8 8 = 1$
15	$\log_4 256 = 4$
16	$\log_{10} 0,01 = -2$
17	$2^4 = 16$
18	$5^3 = 125$
19	$2^7 = 128$
20	$3^0 = 1$
21	$15^1 = 15$
22	$10^{-1} = \frac{1}{10}$
23	$(49)^{\frac{1}{2}} = 7$
24	$6^3 = 216$
25	صفر
26	2
27	3
28	4
29	1
30	صفر
31	3
32	-2
33	-5
34	-4
35	0,8451
36	1,6232
37	1,2304
38	1,7482
39	2,2923
40	2,8136
41	2,8993
42	3,7110
43	3,1761
44	-0,5229

جواب سوالات تمرین فصل ششم (توابع)

1	$A=\{x/x\in IR, -\infty<x<+\infty\}$
2	$B\{x/x\in IR, -8\le x\le -5\}$
3	$C=\{x/x\in IR, 7\le x\le 8\}$
4	$D=\{x/x\in IR, -19<x\le 0\}$
5	$M=\{y/y\in IR, -2<y<+2\}$
6	$N=\{a/a\in IR, +7<a<0\}$
7	$P=\{m/m\in IR, -4\le m\le 0\}$
8	$K=\{t/t\in IR, -5\le t\le -1\}$
9	x ; −∞ · −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4 · +∞
10	x ; −∞ · −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 · +∞
11	x ; −∞ · −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 · +∞
12	x ; −∞ · −1 0 +1 +2 +3 +4 +5 · +∞
13	x ; −∞ · +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 · +∞
14	−∞ · x · +∞ ; 0
15	x ; −∞ · −2.5 0 · +∞
16	x ; −∞ · 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 · +∞
17	$[-5,+8]$
18	$(-\frac{5}{2},+1]$
19	$(-\infty,0]$
20	$[0,5.5]$
21	$(-\infty,0]$
22	$[-2,\infty)$
23	$[+2,+10)$
24	$(+3,\infty)$
25	$(2,a)$, $(2,b)$
26	$(5,k)$, $(5,P)$, $(7,K)$, $(7,P)$
27	$(x,1)$, $(x,2)$, $(x,3)$, $(y,1)$, $(y,2)$, $(y,3)$
28	(m,a), (m,b), (m,c), (m,d), (n,a), (n,b), (n,c), (n,d)
29	$A=\{(4.1),(5.7)\}$
30	$B=\{(3.2),(12.5)\}$
31	$R=\{(3.4),(0.1),(2.9)\}$

45	-0,3010
46	-1,3010
47	-2,3010
48	-3,3010
49	-4,3010
50	1,6990
51	2,6990
52	3,6990
53	4,6990
54	5,6990
55	83,8
56	55,9
57	816
58	415
59	1,84
60	1,34
61	50,7
62	0,000387
63	0,7222
64	1,4396
65	2,1216
66	4,8004
67	-1,3647
68	-2,1413
69	3,010
70	2,385
71	2,796
72	-0,0333
73	0,4013
74	3,0512
75	0,2731
76	0,619
77	1,0988
78	1,9377
79	0,6825
80	2,5850
81	6,67
82	-2,167
83	4
84	2
85	0,57
86	3
87	25
88	3,5
89	675
90	130
91	8,25
92	5
93	6
94	1
95	1,5
96	0,5
97	8,6
98	+8
99	-4
100	1,77
101	$x=13{,}5$
102	$x=3$
103	$x=1$
104	$x=10$
105	$x=2$
106	$x=26{,}67$

107	$x=1{,}3$
108	$x=3{,}5$
109	$x=5$
110	$x=5$
111	$x=3$
112	$x=2$
113	$x=4$
114	$x=2$
115	$x=5$
116	$x=1$
117	$x=7$
118	$x=11$
119	$a=3$
120	$x=4$
121	$x_1=25$, $x_2=\frac{1}{25}$
122	$x=5$
123	$x=5$
124	$x=4$
125	$x=\frac{1}{2}$
126	$x=1$
127	$x=5$
128	$x=38{,}4$
129	$x=1{,}6758$
130	$x=0{,}8612$

کلید جوابات ۵۰۰ پیشتاز ریاضی

شماره	جواب
32	$M=\{(b.a),(n.m),(k.p)\}$
33	$f(5)=10$
34	$g(\frac{3}{2})=\frac{59}{4}$
35	$h(2.3)=1.6$
36	$f(1)=\frac{4}{3}$
37	$g(-2)=22$
38	$f(5)=215$
39	$f(\frac{1}{2})=-\frac{7}{4}$
40	Domain: $-3, +1, 0, +4, -4, +3$ — Range: $+13, -3, -5, 27$
41	Domain: $0, -5, +2, -1, +1, +5$ — Range: $0, -125, +8, -1, +1, 125$
42	Domain: $+1, +2, +3, -1, -5$ — Range: $+2, 0, +12, 56$
43	Domain: $24, +6, 0, +4$ — Range: $+7, -7, +\sqrt{113}, -\sqrt{113}, +1, -1, +3, -3$ مساوات فوق یک تابع نمی‌باشد.
44	$f(x)=-2$
45	$g(x)=\frac{5}{2}$
46	$f(x)=x$
47	$g(x)=x+1$
48	$h(x)=2x+6$
49	$p(x)=2x^2$
50	تابع جفت
51	تابع جفت
52	تابع طاق
53	تابع طاق
54	تابع جفت
55	تابع جفت
56	تابع طاق
57	تابع طاق
58	تابع طاق
59	تابع جفت
60	به هیچ قیمت x غیر متمادی، به تمام قیمت‌های x متمادی
61	به هیچ قیمت x غیر متمادی، به تمام قیمت‌های x متمادی
62	به هیچ قیمت x غیر متمادی، به تمام قیمت‌های x متمادی
63	به هیچ قیمت x غیر متمادی، به تمام قیمت‌های x متمادی
64	به قیمت‌های $x=\pm1$ غیر تمادی، به قیمت‌های $(-\infty,+\infty)-\{\pm1\}$ متمادی
65	به قیمت $x=3$ غیر متمادی، به قیمت‌های $(-\infty,+\infty)-\{3\}$ متمادی
66	به قیمت‌های $x<1$ غیر متمادی، به قیمت‌های $x\geq1$ متمادی
67	به هیچ قیمت x غیر متمادی، به تمام قیمت‌های x متمادی
68	به قیمت‌های $x<-4$ غیر متمادی، به قیمت‌های $x\geq-4$ متمادی
69	به قیمت‌های $(-1,+2)$ غیر متمادی، به قیمت‌های $(-\infty,-1]\cup[+2,+\infty)$ متمادی
70	به هیچ قیمت x غیر متمادی، به تمام قیمت‌های x متمادی
71	به هیچ قیمت x غیر متمادی، به تمام قیمت‌های x متمادی
72	$A=\{x/x\in IR,-\infty<x<+\infty\}$
73	$B=\{x/x\in IR,-\infty<x<+\infty\}$
74	$M=\{x/x\in IR,-\infty<x<-1,-1<x<+1,+1<x<+\infty\}$
75	$K=\{x/x\in IR,-\infty<x<3,3<x<+\infty\}$
76	$A=\{x/x\in IR,-\infty<x\leq-4,4\leq x<+\infty\}$
77	$B=\{x/x\in IR,x\geq3\}$
78	$P=\{x/x\in IR,-\infty<x<+\infty\}$

جواب سوالات تمرین فصل هفتم (لیمت)

1	4
2	4
3	3
4	-57
5	33
6	-0, 4
7	-1
8	$-\frac{3}{2}$
9	1024
10	2
11	3
12	2
13	$\frac{1}{8}$
14	$\frac{3}{5}$
15	$-\frac{2}{15}$
16	$-\frac{4}{9}$
17	0,0875
18	9
19	$\frac{21}{23}$
20	$1,\bar{4}$
21	$\frac{13}{48}$
22	-0, 25
23	$\frac{\sqrt{5}}{5}$
24	$0,041\bar{6}$
25	$\frac{4}{3}$
26	-4
27	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
28	$\frac{1}{192}$
29	0.1
30	$\frac{3}{32}$
31	$\frac{2}{3}$
32	$-\frac{1}{3}$
33	5
34	1
35	2

36	صفر
37	∞
38	3
39	$\frac{1}{2}$
40	$\frac{3}{5}$
41	3
42	1
43	$\frac{1}{3}$
44	4
45	0,25
46	$\frac{1}{6}$
47	1
48	$\frac{1}{2}$
49	$\frac{1}{5}$
50	0
51	0
52	$\frac{1}{2}$
53	$\frac{3}{2}$
54	$-\frac{1}{4}$
55	$\frac{2}{3}$
56	10
57	1
58	1
59	$\frac{6}{5}$
60	5
61	1
62	3
63	-1
64	1
65	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
66	10
67	$-\frac{1}{2}$
68	-1
69	-1
70	∞
71	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
72	0
73	-2

79	$H=\{x/x\in IR, -\infty < x < +\infty\}$
80	$(fog)(x)=2\sqrt{x-1}+4,\ (gof)(x)=\sqrt{2x+3}$
81	$(fog)(x)=9x^2-15x+5,\ (gof)(x)=3x^2-9x+2$
82	$(fog)(x)=\frac{5x+26}{x+5},\ (gof)(x)=\frac{1}{x+10}$
83	$(fog)(x)=\frac{8}{x^3},\ (gof)(x)=\frac{2}{x^3}$
84	$(fog)(x)=\sec x$
85	$(gof)(x)=\log^2 x-3\log x+1$
86	$f^{-1}(x)=\frac{x+8}{5}$
87	$f^{-1}(x)=3x-5$
88	$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$
89	$f^{-1}(x)=\log_2 x$
90	$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\cdot 5^x$
91	$f^{-1}(x)=arc\cos x$
92	مجانب افقی $y=5$ ، مجانب عمودی $x=2$
93	مجانب افقی $y=-\frac{1}{4}$ ، مجانب عمودی $x=-\frac{1}{2}$
94	مجانب افقی $y=0$ ، مجانب عمودی $x=1$
95	محور x مجانب افقی
96	مجانب افقی $y=3$
97	معادله مجانب مایل $y_1=x-1$ ، مجانب‌های عمودی $x=-1, x=0$
98	محور x مجانب افقی، محور y مجانب عمودی
99	مجانب افقی $y=0$ ، مجانب عمودی $x=2$
100	معادله مجانب مایل $y_1=x+1$ ، مجانب‌های افقی $x=0, x=1$

74	∞
75	e
76	e^{-2}
77	e^{15}
78	e^{3}
79	e^{5}
80	e
81	e^{-4}
82	e^{2}
83	$e^{2}\sqrt{e}$
84	$\ln 2$

جواب سوالات تمرین فصل هشتم (مشتق)

1	$y'=0$
2	$y'=7$
3	$y'=10x$
4	$y'=\frac{1}{x^2}$
5	$y'=\frac{3}{2\sqrt{3x}}$
6	$y'=12x^2$
7	$y'=-\frac{2}{5}$
8	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
9	$y'=2x$
10	$y'=\cos x$
11	$y'=0$
12	$y'=0$
13	$y'=0$
14	$y'=0$
15	$y'=0$
16	$y'=8$
17	$y'=\frac{3}{5}$
18	$y'=\sqrt{2}$
19	$y'=40x^4$
20	$y'=-28x^{-5}$
21	$y'=\frac{12}{25\sqrt[5]{x^2}}$
22	$y'=\frac{-36}{x^{13}}$
23	$y'=-x$
24	$y'=3x^2-1$
25	$y'=\frac{-14}{3\cdot\sqrt[3]{x^5}}$
26	$y'=20x^4-24x^2$
27	$y'=2x+x^{-3}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$
28	$m=1$
29	$m=12$
30	$\frac{dy}{dx}=9x^2$
31	$\frac{dy}{dt}=-10t^4+1$
32	$\frac{dy}{dz}=6z^2+5$
33	$y'_n=-6n^2+4n$
34	$y'_x=-10x^{-3}+2x$
35	$y'=20x^3-10$
36	$y'=6x^5+3x^2$
37	$y'=2x^{-3}+2x$
38	$y'=10x^4+16x^3+4x^2-2x$
39	$y'=-40x^4+16$
40	$y'=\frac{24}{5}x^3+\frac{24}{5}$
41	$y'=\frac{-7}{(2x-1)^2}$
42	$y'=-\frac{x^4+23x^2+8}{(x^3+x)^2}$
43	$y'=-\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$
44	$y'=\frac{21x^2}{(x^3+2)^2}$
45	$y'=\frac{25x^4-2}{5}$
46	$y'=\frac{-5+15x^2}{(x-x^3)^2}$
47	$y'=\frac{2x+4}{\sqrt{2x^2+8x-1}}$
48	$y'=\frac{1}{(x+)\sqrt{x^2-1}}$
49	$y'=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x+4)^2}}$
50	$y'=(12x-30)(x^2-5x+1)^2$
51	$y'=\frac{36x}{(3x^2+2)^4}$
52	$y'=\frac{150x^2}{7\cdot\sqrt[7]{(2x^3+1)^2}}$
53	$y'=0$
54	$y'=\cos x$
55	$y'=3\cos(x+\frac{\pi}{2})$
56	$y'=-\frac{2\cos\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$
57	$y'=(10x^4-3x^2)\cos(2x^5-x^3)$
58	$y'=-\frac{8x\cos\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2+5}}$
59	$y'=\cos x\cdot\cos(\sin x)$
60	$y'=10\cos x\cdot\sin^4 x$
61	$y'=\frac{24\cos x}{\sin^4 x}$
62	$y'=-\frac{4}{5}\cot gx\cdot\cos ecx$
63	$y'=\frac{x\cos^2 x}{\sqrt{\sin x^2}}$
64	$y'=3(\sin x+x\cdot\cos x)$
65	$y'=\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}$
66	$y'=12x^2\sin^2(x^3-1)\cdot\cos(x^3-1)$
67	$y'=x^2\cdot\sin x(3\sin x+2x\cdot\cos x)$
68	$y'=-3\pi\sin\frac{3\pi x}{2}$
69	$y'=2\sin 2x$
70	$y'=1-3\sin x$
71	$y'=2\sin(x+\pi)$
72	$y'=\frac{6\sin\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}}$
73	$y'=-21x^2\sin(3x^7-1)$
74	$y'=\frac{7}{3x^2}\cdot\sin(\frac{1}{x})$
75	$y'=28\sin x\cdot\cos^6 x$
76	$y'=-\sin x\cdot\cos^2 x$
77	$y'=5tgx\cdot\cos ec^2 x$
78	$y'=\frac{2\sin x-2}{(x+\cos x)^2}$
79	$y'=x^2(3\cos x-x\cdot\sin x)$

80	$y' = \cos x(\frac{\cos x - 4x\cdot\sin x}{2\sqrt{x}})$
81	$y'=\frac{3x(2\cos x + x\cdot\sin x)}{\cos^2 x}$
82	$y'=40\sin(2x+4)\cdot\cos^4(2x+4)$
83	$y'=0$
84	$y'=\sec^2(x+\frac{\pi}{2})$
85	$y'=0$
86	$y'=0$
87	$y'=2\cos 2x$
88	$y'=2\sin x\cdot\cos^2 x-\sin^3 x$
89	$y'=0$
90	$y'=(9x^2-9)\sec^2(x^3-3x+4)$
91	$y'=10tg^4 x\cdot\sec^2 x$
92	$y'=\frac{4\sec^2 x}{\sqrt{tgx}}$
93	$y'=2x\cdot\cos x^2+3x^2\sec^2 x^3$
94	$y'=tgx+x\cdot\sec^2 x$
95	$y'=2x+5\sec^2 x$
96	$y'=120x^2\sec^2(8x^3+2)$
97	$y'=\frac{6\sin^2 x}{5\cos^4 x}$
98	$y'=\frac{6\sec^2 x}{tg^4 x}$
99	$y'=\frac{tgx-x\cdot\sec^2 x}{tg^2 x}$
100	$y'=\frac{3-3\sec^2 x}{(x-tgx)^2}$
101	$y'=2x(tg2x+x\sec^2 x)$
102	$y'=\frac{1+\sec^2 x}{2\sqrt{x+tgx}}$
103	$y'=-3x^2\cos ec^2(x^3-1)$
104	$y'=\frac{\cos ec^2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$
105	$y'=2(\cot g^2 x-2x\cdot\cos ec^2 x^2)$
106	$y'=8\cos ec^2 x\cdot\cot g^3 x$
107	$y'=\frac{6x^2\cdot\cos ec^2 x^3}{\cot g^3 x^3}$
108	$y'=2(\cos x\cdot\cot gx-\cos ecx)$
109	$y'=24x^2\cdot\sec(8x^3-1)\cdot tg(8x^3-1)$
110	$y'=4\sec^2 x\cdot tgx$

111	$y'=15x^2\sec(x^3-1)\cdot tg(x^3-1)$
112	$y'=7-2\sec^2 x\cdot tgx$
113	$y'=-(6x^2+2)\cdot\cos ec(x^3+x)\cdot\cot g(x^3+x)$
114	$y'=\frac{1+x\cdot\cot gx}{\cos ecx}$
115	$y'=25\cos ec^5 x\cdot\cot gx$
116	$y'=\frac{-2\cot gx}{15\cdot\sqrt[15]{\cos ecx}}$
117	$y'_{(x)}=\frac{y}{y-x}$
118	$y'_{(x)}=\frac{5y^2+1}{12-10xy}$
119	$y'_{(x)}=\frac{x}{y}$
120	$y'_{(x)}=\frac{8y^2-2x}{5-16xy}$
121	$y'_{(x)}=\frac{3y^2-2xy-1}{6xy-x^2}$
122	$y'_{(x)}=\frac{2x-1}{2y+1}$
123	$y'=\frac{2}{x}\log_5 e$
124	$y'=\frac{5x^4-2}{x^5-2x}\cdot\log e$
125	$y'=\cot gx\cdot\log_2 e$
126	$y'=\frac{\log e}{2x\sqrt{\log x}}$
127	$y'=\frac{6}{x}\log^2 x\cdot\log e$
128	$y'=\frac{4\log_2 e}{6x+15}$
129	$y'=5x(2\log_7 x+\log_7 e)$
130	$y'=\frac{\log x-\log e}{\log^2 x}$
131	$y'=\frac{-\log_3 x-2\log_3 e}{2\sqrt{x}}$
132	$y'=\frac{3x^2-2}{x^3-2x+4}$
133	$y'=\frac{1}{x}\cos x-\sin x\cdot\ln 2x$
134	$y'=\frac{\sin x-x\cdot\cos x\cdot\ln x}{x\cdot\sin^2 x}$
135	$y'=-tgx$

136	$y'=\frac{30\ln^4 x^2}{x}$
137	$y'=\frac{-6\log e}{x\cdot\log^4 x}$
138	$y'=e^x(\ln 5x+\frac{1}{x})$
139	$y'=1+4x\cdot e^{x^2}-\frac{3}{x}$
140	$y'=-\frac{(1+e^{2x}+2x\cdot e^{2x}-2x\cdot e^{2x}\cdot\ln x)}{(1+e^{2x})^2}$
141	$y'=(3x^2-1)e^{x^3-x}$
142	$y'=\sec^2 x\cdot e^{tgx}$
143	$y'=-2e^{x^2}(1+2x^2)$
144	$y'=\frac{20x^2(3-2x)}{e^{2x}}$
145	$y'=\frac{e^{x3}(3x^3-1)}{2x^2}$
146	$y'=\cos x\cdot e^{\sin x}$
147	$y'=(3x^2-\sec x\cdot tgx)\cdot e^{x^3-\sec x}$
148	$y'=\frac{1}{x}\cdot\log e\cdot e^{\log 2x}$
149	$y'=3e^x\cdot\cos^4 x(\cos x-5\sin x)$
150	$y'=2e^{3x}\cdot\sin x(3\sin x+2\cos x)$
151	$y'=\frac{5+e^x}{2\sqrt{5x+e^x}}$
152	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}$
153	$y'=(3x^2-3)\cdot\ln 5\cdot 5^{x^3-3x+1}$
154	$y'=a^x(1+x\ln a)$
155	$y'=2^x[\cot gx+\ln 2, \ln(\sin x)]$
156	$y'=5^{x^2}\cdot e^{x^3}\cdot x(2\cdot\ln 5+3x)$
157	$y'=2x\cdot\ln 3\cdot\cos x^2\cdot 3^{\sin x^2}$
158	$y'=\frac{\ln 2}{x}\cdot\log_3 e\cdot 2^{\log_3 x}$
159	$y'=x^2\cdot 5^{2x}(3+2x\cdot\ln 5)$
160	$y'=\frac{2x(1-x^2\cdot\ln 2-\ln 2)}{2^{x^2}}$
161	$y'=x^{x^x}\cdot x^x(1+\frac{1}{x}+\ln x)$
162	$y'=[\ln(\cos x)-x\cdot\cot gx]\cdot(\cos x)^x$
163	$y'=(3\ln x\cdot\cos x+\frac{3}{x}\cdot\sin x)\cdot x^{3\sin x}$

164	$y' = [\ln(\cot gx) \cdot \cos x - \sec x] \cdot (\cot gx)^{\sin x}$
165	$(14x+17)(x+1)^2(2x+3)^3$
166	$y' = \frac{(4x-2) \cdot \sqrt[3]{x-1}}{3x-3}$
167	$y' = -3(x^2+8x+5) \cdot (\frac{3x+4}{x^2-1})^4$
168	$y' = (\frac{12}{15x-5} - \frac{12x}{2x^2-1}) \cdot \frac{\sqrt[5]{(3x-1)^4}}{(2x^2-1)^3}$
169	$y' = \frac{(30x^3-27x^2-26x+7)(3x^2-1)(x+2)^4}{(2x-1)^5}$
170	$y' = (\frac{42x}{35x^2-5} - \frac{12x^2}{7x^3+7}) \cdot \frac{\sqrt[5]{(7x^2-1)^3}}{\sqrt[7]{(x^3+1)^4}}$
171	$y' = (\frac{7}{3} - \frac{4x^2}{3x^2-3}) \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$
172	$y' = \frac{\sqrt{x}(2+\ln x)}{2x} \cdot (x)^{\sqrt{x}}$
173	$y' = \frac{35x^6}{\sqrt{1-25x^{14}}}$
174	$y' = \frac{-30(\arcsin x)^4}{\sqrt{1-x^2}}$
175	$y' = \frac{4}{\sqrt{x-x^2}}$
176	$y' = \frac{-3x^2}{2\sqrt{(1-x^6) arc\cos x^3}}$
177	$y' = \frac{30x^4-3}{\sqrt{1-4x^{10}+4x^6-x^2}}$
178	$y' = \frac{-6x \cdot (arc\cos x^2)^2}{\sqrt{1-x^4}}$
179	$y' = 5x^4 \cdot arc\cos x - \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}$
180	$y' = -\sin x \cdot arc\cos x - \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}$
181	$y' = \frac{6x^2}{x^4-4x^3+5}$
182	$y' = \frac{(1+x^2) arc\, tgx - x}{(1+x^2)(arc\, tgx)^2}$
183	$y' = \frac{42}{1+4x^2}(arc\cot g 2x)^2$
184	$y' = \frac{-1}{2x\sqrt{2x-1}}$

185	$y' = \frac{1}{\ln x^x \sqrt{\ln^2 x - 1}}$
186	$y' = \frac{-5}{x\sqrt{x^2-1} \cdot (arc\sec x)^6}$
187	$y' = \frac{-60x^4+6}{(2x^5-x)\sqrt{(2x^5-x)^6-1}}$
188	$y' = (x)^{arc\cos ecx}(\frac{\sqrt{x^2-1} \cdot arc\cos ecx - \ln x}{x\sqrt{x^2-1}})$
189	$y' = \frac{-e^{arc\cot gx}}{1+x^2}$
190	$y' = \frac{-tgx}{2\sqrt{\cos x - 1}}$
191	$y' = 6x \cdot arc\cos ecx - \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$
192	$y' = \frac{-1}{\sqrt{e^{2a+2}-1}}$
193	$y'' = 140x^3$
194	$y''' = 480x$
195	$y^{(10)} = 0$
196	$y''' = -\frac{140}{x^8}$
197	$y'' = -\frac{1}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$
198	$y^{(7)} = \sin x$
199	$f^{(5)}(x) = \frac{-192}{(2x-1)^5}$
200	$f^{(4)}(x) = -2\cos ec^2 x(2\cot gx + \cos ec^2 x)$
201	$y^{(n)} = 5^n \cdot e^{5x}$
202	$y^{(n)} = \frac{2(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n}$

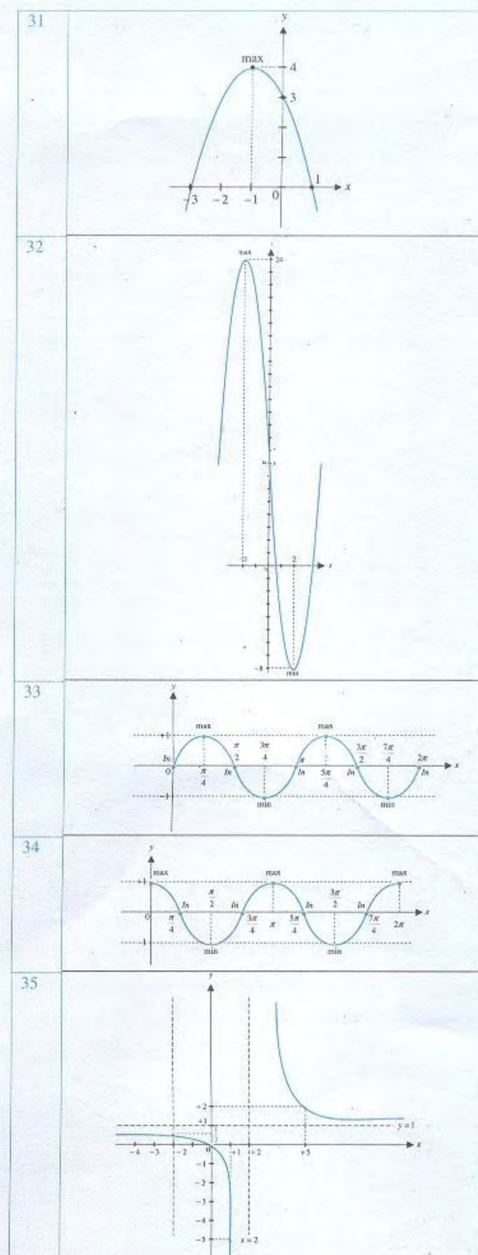
جواب سوالات تمرین فصل نهم (تطبیقات مشتق)

1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{7}{5}$
3	2,5
4	1
5	$\frac{1}{20}$
6	48
7	$0,\bar{2}$
8	1,5
9	$\frac{2\sqrt{5}}{3}$
10	3
11	1
12	$\frac{1}{4}$
13	$\frac{1}{64}$
14	$\sqrt{2}$
15	0
16	-1
17	$\frac{\ln a}{\ln b}$
18	$-\cot ga$
19	0
20	0
21	1
22	5
23	∞
24	e
25	$(0,-4)$
26	$P(1,4)$
27	$P_1(+1,0)$, $P_2(-1,4)$
28	$In(-1,5)$
29	ندارد
30	

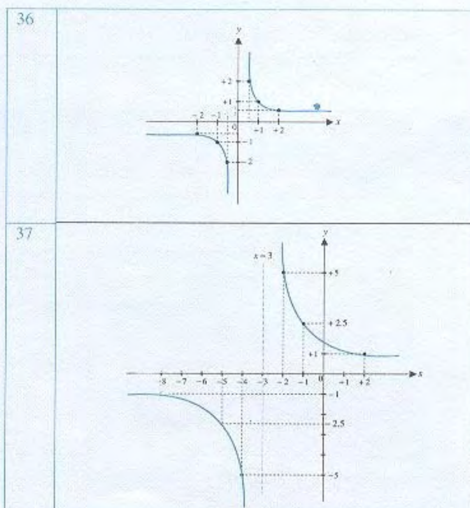
جواب سوالات تمرین فصل دهم (انتیگرال)

1	$8x+c$
2	$-\frac{3}{5}x+c$
3	$\sqrt{2}x+c$
4	$\frac{1}{5}x^5+c$
5	$\frac{1}{20}x^{12}+c$
6	$\frac{4}{3}m^6+c$
7	$\frac{3}{25}P^5+c$
8	x^4-x^2+5x+c
9	$\frac{3}{x}+c$
10	$3a\sqrt[3]{a^2}+c$
11	$\frac{3}{5}x^5-x^2-\frac{1}{2x^2}+c$
12	$-3\cos x+c$
13	$-\frac{1}{2}\sin x+c$
14	$\frac{5}{3}e^x+c$
15	$\frac{3}{50}(5x^2+2)^5+c$
16	$\frac{2}{5}\sqrt{5x+4}+c$
17	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+c$
18	$-\frac{5}{7}\cos x\cdot\sqrt[5]{\cos^2 x}+c$
19	$2\ln\lvert 3x-1\rvert+c$
20	$\frac{5}{6}\ln\lvert 3x^2+2\rvert+c$
21	$\frac{2^{x^2+5}}{2\ln 2}+c$
22	$\frac{5}{3}e^{x^3+1}+c$
23	$-\frac{5}{4(1+e^{2x+1})}+c$
24	$\frac{5}{24}\ln^4(3x^2+1)+c$
25	$\frac{1}{9}\ln^6(7x)+c$

31, 32, 33, 34, 35



36, 37



26	$\frac{1}{4}(arc\,tgx)^2+c$
27	$\frac{3}{10}\ln(5x^2+\sqrt{1+25x^4})+c$
28	$\frac{x}{2}-\frac{\sin 6x}{12}+c$
29	$-\frac{1}{6}\cot g^6 x+c$
30	$\frac{1}{4}tg^4 x+c$
31	$-\frac{1}{8}\cos^8 x+c$
32	$\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+c$
33	$\frac{1}{2}arc\,tg\;2x+c$
34	$-\frac{1}{16}\ln\left\|\frac{3-4x^2}{3+4x^2}\right\|+c$
35	$\frac{5}{6}arc\sin(\frac{2x^3}{5})+c$
36	$x\cdot e^x-e^x+c$
37	$\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\frac{1}{4}x^2+c$
38	$\sin x-x\cdot\cos x+c$
39	$\ln\|1-x\|(x-1)+\frac{x^2}{1-x}-\frac{1}{1-x}+c$
40	$x\,arc\sin x+\sqrt{1-x^2}+c$
41	$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\cdot\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+c$
42	$\frac{1}{2}\ln^2 x+c$
43	$2x\cdot tgx+2\ln\|\cos x\|+c$
44	$\frac{5}{2}x\cdot\sin 2x+\frac{5}{4}\cos 2x+c$
45	$\frac{1}{2}arc\,tgx\cdot(x^2+1)-\frac{x}{2}+c$
46	$\frac{-1}{x+1}+c$
47	$arc\,tg\,(x-3)+c$
48	$\frac{\sqrt{2}}{6}arc\,tg\,\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}}{3}+c$
49	$\frac{\sqrt{5}}{10}\ln\left\|\frac{x-2-\sqrt{5}}{x-2+\sqrt{5}}\right\|+c$
50	$\frac{1}{2}arc\sin\frac{2x}{\sqrt{5}}+c$

51	$\ln\left\|x+5+\sqrt{x^2+10x+29}\right\|+c$
52	$arc\sin\frac{x+3}{5}+c$
53	$3\ln\|x-2\|-\ln\|x-1\|+c$
54	$-\frac{1}{8}\ln\|x+1\|+\frac{3}{4}\ln\|x+3\|-\frac{5}{8}\ln\|x+5\|+c$
55	$\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{1}{2}\ln\|x+1\|+\frac{1}{6}\ln\|x-1\|+\frac{16}{3}\ln\|x+2\|+c$
56	$x+\frac{5}{7}\ln\|x+4\|+\frac{23}{7}\ln\|x-3\|+c$
57	$\frac{5}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\|+c$
58	$\ln\|x+2\|+5arctgx+c$
59	$\ln\|x+1\|-\frac{6x+11}{2(x+1)^2}+c$
60	$\ln(x+2)^2+\frac{3}{x+2}+c$
61	$\frac{1}{2}x^2+2\ln\|x+1\|+\ln\|x+4\|+c$
62	97,2
63	$\frac{9}{3}$
64	$\frac{320}{9}$
65	212
66	$8-3e^3+3e+\ln 3$
67	$e^{14}-e^5$
68	0,4050
69	0,2
70	$\frac{16e^8}{9}+\frac{2}{9e}$
71	0,85
72	$6^0-0{,}35$
73	0,24
74	$\frac{1}{3}$
75	8
76	10, 7

جواب سوالات تمرین فصل یازدهم (احتمالات)

1	27
2	6
3	18 گروپ
4	7
5	300
6	60
7	6
8	12
9	14
10	1008
11	288
12	30
13	120
14	11880
15	60
16	24
17	453600
18	56
19	35
20	840
21	12600
22	59
23	56
24	30240
25	5040
26	$77520x^{13}$
27	$16,\bar{6}\%$
28	$83,\bar{3}\%$
29	50%
30	الف) 40% ب) 25% ج) 35% د) 0%
31	0,018099%
32	$S=\{0,1,2,3\}$
33	S = {HHH, TTT, HHT, HTH, THH, THT, TTH}
34	9
35	5
36	$83,\bar{3}\%$
37	$16,\bar{6}\%$
38	$5,\bar{5}\%$
39	$77,\bar{7}\%$
40	50%
41	18,18%
42	25%
43	5,26%
44	2,28%
45	الف) 13.18% ب) 45,6% ج) 18,86%

جواب سوالات تمرین فصل دوازدهم (احصائیه)

شماره	جواب
1	دولت
2	احصائیه
3	جمع‌آوری معلومات
4	به دو طریقه (جدول و گراف)
5	گراف خط منکسر
6	
7	
8	$Range = 99 - 10 = 89 \div 10 = 8.9 \approx 9$

حدود صنوف	نقاط وسطی x_i	فریکونسی f_i
9.5 – 18.5	14	6
18.5 – 27.5	23	9
27.5 – 36.5	32	3
36.5 – 45.5	41	3
45.5 – 54.5	50	2
54.5 – 63.5	59	3
63.5 – 72.5	68	3
72.5 – 81.5	77	6
81.5 – 90.5	86	6
90.5 – 99.5	95	9

شماره	جواب
9	$M_a = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} xi$
10	$\bar{x} = 6$
11	$\bar{x} = 400$
12	$M_d = 10$
13	$M_d = 28$
14	$M_d = 27$
15	$M_d = 81,5$
16	$M_q = \sqrt{140}$
17	$M_q = 84$
18	$M_q = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

| 17 | $M_q = 84$ |
| 18 | $M_q = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ |

شماره	جواب
19	$M_q = \sqrt{21,5}$
20	$M_q = \sqrt{141}$
21	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$
22	$\bar{x} = w = 51,86$
23	وسط هارمونیک
24	$H_m = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$
25	$\bar{v} = 27,2$
26	$M_D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
27	$M_D = 2,5$
28	$M_D = 3,5$
29	$v_{ar} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$
30	$v_{ar} = 5$
31	$v_{ar} = 38$
32	$\delta = \sqrt{\mathrm{var}}$ یا $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (xi - \bar{x})^2}$
33	$\delta = \sqrt{137,5}$
34	$\delta = 25$


د بري امید
۱
د کانکور مخکښ
مؤلف:
استاد محمد عظیم خاموش
امید پیروزی
۱
پیشتاز کانکور
شامل بخش های:
حساب
الجبر
مثلثات
هندسه
فزیک
مؤلف:
استاد محمد عظیم خاموش
د بري امید
۲
د پوهنتون د کانکور
د تیاری تمرینونه
(شامل د دې برخو: حساب، الجبر، مثلثات، هندسه و فزیک)
ترتیب کوونکی:
استاد محمد عظیم خاموش
امید پیروزی
۲
تمرینات آماده‌گی
کانکور پوهنتون
د بري امید
۳
د ریاضی
مخکښ
مؤلف:
استاد محمد عظیم خاموش
امید پیروزی
۳
پیشتاز
ریاضی
شامل موضوعات:
تالیف:
استاد محمد عظیم خاموش


د مثلثات مخکښ
پیشتاز مثلثات
د فزیک مخکښ
پیشتاز فزیک
کیمیای کانکور
بیولوژی کانکور
پښتو د کانکور آزموینې لپاره
ادبیات دری برای کانکور پوهنتون



امید پیروزی
تقویه دانش ۱
سوالات تاریخ دورهٔ متوسط
تقویه دانش ۲
سوالات جغرافیه دورهٔ متوسط
تقویه دانش ۳
سوالات علوم دینی دورهٔ متوسط
تقویه دانش ۴
سوالات تاریخ دورهٔ ثانوی
تقویه دانش ۵
سوالات جغرافیه دورهٔ ثانوی
تقویه دانش ۶
سوالات تفسیر شریف و عقاید شریف دورهٔ ثانوی
تقویه دانش ۷
سوالات کانکور بخش فزیک
تقویه دانش ۸
سوالات معلومات عمومی